ISSN: 1815-0640
Número 73. Abril 2025
Páginas 01-12

Campos conceptuales y complejidad ontológica en resolución de problemas de matemáticas

Campos conceituais e complexidade ontológica na resolução de problemas matemáticos

Victor Manuel Oxley Insfrán

Fecha de recepción: 25-09-2024
Fecha de aceptación: 20-01-2025

Resumen	Este artículo examina la interacción entre los campos conceptuales de Gérard Vergnaud y la complejidad ontológica presente en la resolución de problemas matemáticos en el contexto escolar. A través de un enfoque teórico, el análisis se basa en la teoría de los campos conceptuales y cómo los estudiantes desarrollan estrategias de resolución de problemas al comprender las invariantes y situaciones asociadas a conceptos matemáticos. Se concluye que una comprensión de la complejidad ontológica, facilitada por una enseñanza que integre diversas representaciones semióticas, mejora significativamente las capacidades de resolución de problemas. **Palabras clave:** complejidad ontológica, campos conceptuales, educación matemática, resolución de problemas.
Abstract	This article examines the interaction between Gérard Vergnaud's conceptual fields and the ontological complexity present in mathematical problem solving in the school context. Through a theoretical approach, the analysis is based on the theory of conceptual fields and how students develop problem solving strategies by understanding the invariants and situations associated with mathematical concepts. It is concluded that an understanding of ontological complexity, facilitated by teaching that integrates various semiotic representations, significantly improves problem solving capabilities. **Keywords:** Ontological complexity, conceptual fields, mathematics education, problem solving.
Resumo	Este artigo examina a interação entre os campos conceituais de Gérard Vergnaud e a complexidade ontológica presente na resolução de problemas matemáticos no contexto escolar. Através de uma abordagem teórica, a análise baseia-se na teoria dos campos conceituais e na forma como os alunos desenvolvem estratégias de resolução de problemas através da compreensão dos invariantes e situações associadas aos conceitos matemáticos. Conclui-se que a compreensão da complexidade ontológica, facilitada por um ensino que integra diversas representações semióticas, melhora significativamente a capacidade de resolução de problemas. **Palavras-chave:** Complexidade ontológica, campos conceituais, educação matemática, resolução de problemas.

1. Introducción

En el ámbito educativo, particularmente en el contexto de la enseñanza de las matemáticas, uno de los grandes desafíos es garantizar que los estudiantes comprendan no solo las operaciones y procedimientos necesarios para resolver problemas, sino también los conceptos matemáticos subyacentes. Este proceso involucra más que la simple manipulación de números y fórmulas; implica una comprensión profunda de la ontología de los conceptos matemáticos, es decir, la naturaleza de los objetos y las relaciones que se manejan dentro de los enunciados de los problemas.

El trabajo de Gérard Vergnaud (1990) sobre los campos conceptuales proporciona una estructura teórica útil para analizar cómo los estudiantes adquieren y aplican este conocimiento. Los campos conceptuales son conjuntos de conceptos interrelacionados que permiten a los estudiantes construir una comprensión estructurada de las matemáticas y, por ende, resolver problemas de manera efectiva. Estos campos no solo están compuestos por los conceptos mismos, sino también por situaciones en las que estos conceptos son aplicables, las invariantes que mantienen estos conceptos estables y las formas de representación semiótica utilizadas para describirlos (Vergnaud, 1998).

La teoría de los campos conceptuales de Gérard Vergnaud conceptualiza el aprendizaje matemático a través de la interacción entre tres componentes: el conjunto de situaciones (S), el conjunto de invariantes (I) y el conjunto de formas (G). Esta estructura formal permite entender cómo los estudiantes comprenden y aplican los conceptos en diversos contextos.

1. Conjunto de situaciones (S): Representa los contextos donde un concepto es relevante. Un concepto como el "triángulo" puede aplicarse en situaciones geométricas en un plano, en la construcción de estructuras o en ejemplos cotidianos. Estas situaciones se formalizan como:

$S(x)$ ≡ "*x* es una situación geométrica que involucra triángulos".

Por ejemplo, si los estudiantes deben determinar si tres segmentos de línea forman un triángulo, la situación se puede representar simbólicamente como:

$S(x)$ ≡ "*x* es la situación donde se deben determinar si los segmentos de línea dados forman un triángulo".

2. Conjunto de invariantes (I): Son las características esenciales de un concepto que permanecen constantes en diferentes situaciones. Para el triángulo, algunos invariantes son:

$L(x)$: Indica que '*x*' es un triángulo con tres lados.
$A(x)$: Indica que '*x*' es un triángulo con tres ángulos internos.
$S(x)$: Indica que '*x*' es un triángulo cuya suma de ángulos internos es igual a 180 grados.

Estos invariantes son cruciales para la comprensión del concepto, ya que permiten a los estudiantes identificar las propiedades básicas que no cambian, independientemente del contexto en que se apliquen.

3. Conjunto de formas (G): Este conjunto incluye las diversas maneras en que un concepto puede ser representado simbólicamente, ya sea de forma lingüística (palabras y términos) o no lingüística (diagramas, símbolos matemáticos). En el caso de la "suma de fracciones", las formas simbólicas pueden incluir: - Notación matemática estándar:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$$

- Diagramas visuales que representen fracciones, como círculos divididos en partes.

- Manipulativos físicos que permitan a los estudiantes interactuar con el concepto de manera tangible.

Este formalismo refiere los conceptos matemáticos en diversos contextos, identificando sus invariantes y formas simbólicas. Esta estructuración señala como los estudiantes aplican los conceptos en diferentes situaciones, construyendo una comprensión sólida y operativa.

El modelo lógico de los campos conceptuales de Gérard Vergnaud organiza los conceptos dentro de una disciplina (como las matemáticas) en una estructura de relaciones lógicas. Estas relaciones incluyen subordinación, inclusión e implicación, y se establecen a diferentes niveles de complejidad cognitiva.

Definición del campo conceptual: Un campo conceptual C se define como un conjunto de conceptos C_i relacionados entre sí en una disciplina particular, representados como:

$$C=\{c_1,c_2,\ldots,c_n\}$$

C_1: Números naturales, C_2: Suma, C_3: Resta, C_4: Multiplicación, C_5: División

Relaciones entre conceptos: Estas relaciones pueden ser de inclusión o subordinación. Formalmente, la inclusión se expresa como:

$C_i \subset C_j \equiv$ "El concepto C_i esta´ incluido en C_j"

Donde C_i está incluido en C_j si C_i es un caso específico de C_j.

$$C_1 \subset C_2,\ C_1 \subset C_3,\ C_1 \subset C_4,\ C_1 \subset C_5$$

Indicamos así que C_1 está incluido en C_2, C_3, C_4 y C_5, ya que las operaciones aritméticas básicas se realizan con números naturales.

Para expresar que C_2, C_3, C_4, C_5 están subordinados a C_1, podemos utilizar el símbolo de implicación →.

$$C_2 \rightarrow C_1,\ C_3 \rightarrow C_1,\ C_4 \rightarrow C_1,\ C_5 \rightarrow C_1$$

Esto indica que cada uno de los conceptos C_2, C_3, C_4 y C_5 están subordinados a C_1, lo que significa que son casos específicos o instancias de C_1, pues implican operaciones que se realizan con números naturales (La suma implica el uso de números naturales).

Niveles de complejidad: Los conceptos se organizan en niveles. En el nivel básico, se encuentran los conceptos fundamentales como la suma y la resta. En el nivel intermedio, los conceptos son más complejos, como la resolución de ecuaciones lineales:

I_1: Resolución de ecuaciones lineales.

I_2: Factorización de expresiones algebraicas.

I_3: Simplificación de expresiones algebraicas.

I_4: Resolución de problemas que involucran ecuaciones de primer grado.

Podemos expresar relaciones lógicas entre estos conceptos utilizando operadores lógicos y expresiones lógicas.

I_1 implica I_4: $I_1 \Rightarrow I_4$. Esto indica que la capacidad para resolver ecuaciones lineales implica la capacidad para resolver problemas que involucran ecuaciones de primer grado.

I_2 y I_3 están relacionados: $I_2 \leftrightarrow I_3$. Esto indica una relación bidireccional entre la factorización y la simplificación de expresiones algebraicas, ya que a menudo estas habilidades están interconectadas.

I_1 y I_2 se combinan para resolver problemas: $I_1 \wedge I_2$.

Esto indica que la resolución de ecuaciones lineales y la factorización de expresiones algebraicas se combinan para resolver problemas más complejos en álgebra.

Nivel avanzado: En este nivel, los conceptos son más abstractos y avanzados que los del nivel intermedio y pueden incluir teoremas, definiciones formales, métodos avanzados de resolución de problemas, entre otros. Por ejemplo:

A_1: Teorema fundamental del cálculo.

A_2: Demostración de la conjetura de Fermat.

A_3: Álgebra abstracta.

A_4: Espacios vectoriales sobre cuerpos no necesariamente conmutativos.

Relaciones entre conceptos: Las relaciones entre conceptos en el nivel avanzado pueden incluir relaciones de dependencia, generalización, y aplicación de conceptos más básicos y medios.

A_1 se deriva de I_1 y I_2: $I_1, I_2 \vdash A_1$, lo que indica que el teorema fundamental del cálculo se deriva de la resolución de ecuaciones lineales y la factorización de expresiones algebraicas.

A_2 implica A_1: $A_2 \Rightarrow A_1$, lo que indica que la demostración de la conjetura de Fermat implica el uso del teorema fundamental del cálculo.

A_3 y A_4 están relacionados: $A_3 \leftrightarrow A_4$, lo que indica una relación bidireccional entre el álgebra abstracta y los espacios vectoriales sobre cuerpos no necesariamente conmutativos.

Expresión lógica: Para formalizar este nivel, utilizamos variables y proposiciones para representar los conceptos y relaciones, junto con operadores lógicos para expresar las relaciones entre ellos.

A_1 se deriva de I_1 y I_2: $(I_1 \wedge I_2) \rightarrow A_1$.

A_2 implica A_1: $A_2 \rightarrow A_1$.

A_3 y A_4 están relacionados: $A_3 \leftrightarrow A_4$.

Este modelo proporciona una base lógica estructurada que permite la organización de los conceptos matemáticos en niveles de complejidad y sus relaciones, facilitando la comprensión progresiva de los estudiantes.

En la resolución de problemas de matemáticas escolares, es crucial distinguir entre complejidad ontológica (Oxley, 2020) y complejidad algorítmica. La complejidad ontológica se refiere a la dificultad intrínseca de los conceptos matemáticos y las relaciones entre los objetos implicados en el problema. Esto abarca la comprensión y manipulación de principios matemáticos subyacentes. Por ejemplo, problemas que involucran álgebra abstracta o geometría avanzada tienen alta complejidad ontológica por la sofisticación de los conceptos.

1. 1. Complejidad algorítmica y ontológica en problemas de matemáticas

Tengamos en cuenta el siguiente enunciado de problema del Terce (Agencia de Calidad de la Educación, 2016, pág. 37), "El número del documento de identidad de Matilde tiene 7 unidades de millón, 7 unidades de mil y 7 decenas". Respuestas: figura 1) 67071007; figura 2) 77377070; figura 3) 57470271; figura 4) 81187037. (Oxley, 2024, pp. 131-135)

El primer paso es comprender la estructura del número proporcionado en el problema. Se identifica que el número tiene 7 unidades de millón, 7 unidades de mil y 7 decenas.

Luego, se debe traducir la descripción textual del número en términos numéricos. Por ejemplo, "7 unidades de millón" significa 7,000,000 y "7 unidades de mil" significa 7,000. Además, "7 decenas" significa 70.

Una vez se ha convertido cada parte del número en su forma numérica correspondiente, se suman todas estas partes para obtener el número total del documento de identidad de Matilde. En este caso, se sumarían 7,000,000 + 7,000 + 70 para obtener el resultado final.

El resultado final sería el número de documento de identidad de Matilde, que es la suma de las unidades de millón, las unidades de mil y las decenas mencionadas en el problema. Solo resta comparar esta estructura con las opciones en que se acomode ajustándose lo mejor posible a alguna de ellas, considerando las opciones de respuesta proporcionadas:

1) 67071007
2) 77377070
3) 57470271
4) 81187037

Observando si cada opción tiene 7 dígitos en la posición de unidades de millón, 7 dígitos en la posición de unidades de mil y 7 dígitos en la posición de decenas. Después de comparar todas las opciones, se selecciona la que cumpla con las características especificadas en la descripción del problema. Aplicando estos pasos:

La Figura 2) 77.377.070 tiene 7 dígitos en la posición de unidades de millón, 7 dígitos en la posición de unidades de mil y 7 dígitos en la posición de decenas. Por lo tanto, cumple con la descripción y es la respuesta correcta. Las otras opciones no tienen el formato adecuado y no cumplen con las características del número de documento de identidad de Matilde. Entonces, la solución al problema es la Figura 2) 77.377.070.

En cuanto a la complejidad algorítmica, este problema es relativamente simple y tiene una complejidad baja, ya que implica pasos directos y no requiere operaciones complejas o iterativas. El algoritmo para resolver este problema implica principalmente la conversión de las descripciones textuales en números y luego la suma de estos números para obtener el resultado final y una comparación final, por lo tanto, en términos de tiempo y recursos algorítmicos, este problema es bastante sencillo de resolver y tiene una complejidad algorítmica baja.

Dentro de la teoría del campo conceptual de Gérard Vergnaud, este problema de matemáticas puede analizarse desde la perspectiva de la construcción del concepto de número y la comprensión de las operaciones aritméticas básicas.

Concepto de número

El problema implica la representación de números grandes en términos de su estructura posicional. Matilde tiene un número de identificación que consta de unidades de millón, unidades de mil y decenas. Esto requiere que los estudiantes comprendan la relación entre las diferentes posiciones en el sistema numérico y el valor que cada posición representa.

Estructura posicional: El hecho de que el número de identificación tenga 7 unidades de millón, 7 unidades de mil y 7 decenas implica que los estudiantes deben entender cómo se agrupan y organizan los números en diferentes órdenes de magnitud.

Operaciones aritméticas básicas: Para resolver el problema, los estudiantes deben realizar operaciones de suma y multiplicación. Deben multiplicar el número de unidades de millón por 1,000,000, el número de unidades de mil por 1,000, y luego sumar todas las cantidades para obtener el número completo de identificación de Matilde.

Desde la teoría de Vergnaud, se puede observar cómo este problema contribuye al desarrollo del campo conceptual de los estudiantes en relación con la comprensión del sistema numérico, la estructura posicional de los números y la realización de operaciones aritméticas básicas. La resolución del problema requiere que los estudiantes activen y coordinen estos diferentes aspectos del campo conceptual de las matemáticas.

En cuanto a las opciones de ejemplos numéricos como respuesta, estas deberían estar diseñadas de manera que pongan a prueba la comprensión de los estudiantes sobre la estructura posicional y las operaciones aritméticas básicas, ofreciendo números que varíen en sus órdenes de magnitud y posiciones decimales para verificar su comprensión en diferentes contextos numéricos.

Para formalizar los pasos descritos en el cálculo de predicados, podemos definir algunos predicados y cuantificadores apropiados para representar las operaciones aritméticas y la estructura posicional de los números. Vamos a definir los siguientes predicados:

$U_m(x)$: "x es el número de unidades de millón".

$U_{mil}(x)$: "x es el número de unidades de mil".

$U_d(x)$: "x es el número de decenas".

Entonces, los pasos para resolver el problema se formalizarían de la siguiente manera:

1. Multiplicar las unidades de millón por su valor posicional y sumar las unidades de mil por su valor posicional:
2.

$$\sum_{x=1}^{n}(U_m(x) \times 1,000,000) + \sum_{x=1}^{m}(U_{mil}(x) \times 1,000)$$

3. Sumar las decenas:

$$\sum_{x=1}^{p} U_d(x)$$

4. Sumar todas las cantidades calculadas en los pasos 1 y 2 para obtener el número completo de identificación de Matilde:

$$\sum_{x=1}^{n}(U_m(x) \times 1,000,000) + \sum_{x=1}^{m}(U_{mil}(x) \times 1,000) + \sum_{x=1}^{p} U_d(x)$$

Aquí, (*n*), (*m*), y (*p*) representan la cantidad de unidades de millón, unidades de mil y decenas, respectivamente, en el número de identificación de Matilde. Esta formalización en el cálculo de predicados captura los pasos esenciales del problema utilizando predicados y cuantificadores para representar las operaciones aritméticas y la estructura posicional de los números involucrados. Este problema es de complejidad tanto algorítmica y ontológica baja, y como se puede leer en el informe Terce, este problema fue resuelto satisfactoriamente por un 72% de los escolares de los países evaluados (p. 37).

Por otro lado, siguiendo el tema que desarrollamos, la complejidad algorítmica se refiere a la dificultad para resolver un problema en términos de los pasos necesarios para llegar a la solución, independientemente de la naturaleza de los conceptos involucrados. Un problema puede ser algorítmicamente complejo si requiere múltiples cálculos o procedimientos, incluso si los conceptos son simples.

Estas dos complejidades están relacionadas: un problema con alta complejidad ontológica tiende a requerir algoritmos más complejos para su solución. En contraste, un problema con baja complejidad ontológica, que incluye conceptos simples, generalmente se resuelve con algoritmos más simples y eficientes.

La dificultad de un problema matemático está determinada por la cantidad y la naturaleza de las relaciones entre las variables. Con menos relaciones, los problemas suelen ser más fáciles de resolver, ya que es más sencillo identificar patrones y aplicar conceptos. Cuando hay muchas relaciones entre variables, la complejidad aumenta, lo que requiere un análisis más detallado y técnicas avanzadas, como lo describe Vergnaud al referirse a la "complejidad creciente".

Por ejemplo, en un triángulo equilátero, donde los ángulos $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 60°$, la relación entre las variables es simple y directa. En un escenario más complejo, si se sabe que $\theta_1 = 60°$ y que $\theta_2 = 45°$, pero no se especifica el tipo de triángulo, se necesitará un análisis más profundo para encontrar θ_3. En un escenario aún más complejo, si se introduce una relación trigonométrica como $\sin(\theta_1) = \cos(\theta_2)$, se requiere aplicar propiedades trigonométricas avanzadas. Así, tanto la cantidad como la naturaleza de las relaciones entre las variables (en este caso, los ángulos) determinan la dificultad del problema y el esfuerzo necesario para resolverlo.

En este artículo, como se ve según lo desarrollado líneas anteriores, se explora cómo la complejidad ontológica, definida como la estructura profunda de los conceptos y las relaciones que subyacen en los problemas matemáticos, afecta la capacidad de los estudiantes para resolver problemas. Se analiza cómo la interacción entre el lenguaje, la representación simbólica y la complejidad conceptual influye en el éxito de los estudiantes en la resolución de problemas matemáticos escolares. Este estudio se enmarca dentro de un enfoque teórico, basado en investigaciones previas y análisis de los procesos cognitivos involucrados en el aprendizaje de las matemáticas.

2. Metodología

El enfoque metodológico utilizado en esta investigación es de carácter conceptual-teórico, lo que implica una revisión exhaustiva de la literatura existente sobre la teoría de los campos conceptuales y la complejidad ontológica en el aprendizaje de las matemáticas. Se ha realizado un análisis en profundidad de cómo los estudiantes abordan la resolución de problemas matemáticos con distintos grados de complejidad ontológica, y cómo la estructura de los enunciados puede influir en su capacidad para desarrollar estrategias de resolución.

Este análisis se fundamenta en los estudios de Vergnaud (1990, 1998), quien argumenta que los conceptos matemáticos se organizan en campos conceptuales que permiten a los estudiantes estructurar su conocimiento y aplicarlo en diversas situaciones. Estos campos incluyen un conjunto de situaciones (S), un conjunto de invariantes (I) que definen los aspectos esenciales de los conceptos, y un conjunto de formas (G) que representan las diferentes maneras en que estos conceptos pueden ser expresados (lingüística o simbólicamente).

Para este análisis, se han considerado estudios previos sobre cómo la complejidad ontológica afecta la resolución de problemas matemáticos. Uno de estos estudios es el de Mateus-Nieves y Devia Díaz (2021), quienes evaluaron la capacidad de los estudiantes de secundaria para formular y resolver problemas matemáticos después de una intervención educativa. Asimismo, se han revisado investigaciones que utilizan imágenes de resonancia magnética funcional (fMRI) para estudiar cómo el cerebro procesa la resolución de problemas matemáticos y las diferencias entre la computación aritmética y la resolución de problemas más complejos (Zhou et al., 2018).

El análisis se centra en identificar los componentes de la complejidad ontológica en los enunciados de los problemas y cómo estos afectan la construcción de estrategias de resolución por parte de los estudiantes. Además, se analizan los efectos de la representación simbólica en el proceso de comprensión y resolución de problemas, siguiendo los estudios de Duval (2006) sobre la semiótica en matemáticas.

3. Resultados

Los resultados del análisis muestran que la complejidad ontológica de los problemas matemáticos tiene un impacto significativo en la capacidad de los estudiantes para resolverlos. A medida que los enunciados de los problemas incluyen un mayor número de relaciones entre variables y conceptos más abstractos, los estudiantes experimentan dificultades cognitivas para procesar estas relaciones y aplicar los principios matemáticos necesarios para encontrar una solución (Vergnaud, 2013).

Uno de los hallazgos más relevantes es que la estructura de los enunciados matemáticos juega un papel crucial en la dificultad percibida por los estudiantes. Los problemas que contienen relaciones implícitas entre varias variables o que requieren el uso de conceptos abstractos presentan una mayor complejidad ontológica, lo que a su vez incrementa la dificultad algorítmica para resolverlos (Mateus-Nieves y Devia Díaz, 2021). Esto es consistente con la teoría de los campos conceptuales de Vergnaud (1990), que sugiere que los estudiantes desarrollan su comprensión de los conceptos matemáticos a través de situaciones específicas en las que estos conceptos se aplican.

Por ejemplo, los problemas de geometría que involucran triángulos requieren que los estudiantes comprendan una serie de invariantes, como que la suma de los ángulos internos de cualquier triángulo es siempre 180 grados (Vergnaud, 1990). Esta propiedad invariante es esencial para la resolución de problemas, pero los estudiantes deben ser capaces de identificarla y aplicarla en una variedad de situaciones. Sin embargo, cuando se presentan múltiples invariantes o se añaden restricciones adicionales al problema, como en el caso de relaciones trigonométricas entre los ángulos, la complejidad ontológica aumenta considerablemente.

Otro hallazgo importante es que la complejidad ontológica y algorítmica están interrelacionadas. Los problemas que presentan relaciones más complejas entre los objetos matemáticos requieren no solo una comprensión profunda de los conceptos, sino también el desarrollo de algoritmos más elaborados para llegar a una solución (Pinzón Pérez & González Palacio, 2022). Esta relación sugiere que los estudiantes necesitan habilidades tanto conceptuales como procedimentales para abordar con éxito problemas de alta complejidad ontológica.

Además, los resultados muestran que la capacidad de los estudiantes para manejar representaciones semióticas juega un papel clave en la resolución de problemas matemáticos. Según Duval (2006), el manejo de signos y representaciones simbólicas es fundamental para el éxito en matemáticas, ya que permite a los estudiantes visualizar y transformar los objetos matemáticos de manera efectiva. En este sentido, los problemas que requieren múltiples formas de representación (por ejemplo, gráficos, ecuaciones y descripciones verbales) tienden a ser más difíciles para los estudiantes, especialmente si no han desarrollado habilidades suficientes para alternar entre estas representaciones.

4. Discusión

La teoría de los campos conceptuales de Vergnaud ofrece una valiosa perspectiva para entender cómo los estudiantes desarrollan estrategias de resolución de problemas matemáticos, particularmente en relación con la complejidad ontológica de los enunciados. Esta teoría sostiene que los conceptos matemáticos no existen de manera aislada, sino que están interrelacionados en estructuras cognitivas que permiten a los estudiantes aplicar su conocimiento de manera flexible y efectiva en una variedad de situaciones (Vergnaud, 1998).

Uno de los aspectos más importantes de esta teoría es el reconocimiento de que los invariantes juegan un papel fundamental en la comprensión y aplicación de los conceptos matemáticos. Los invariantes son las propiedades esenciales de un concepto que permanecen constantes en todas las situaciones donde se aplica dicho concepto. Por ejemplo, en geometría, la propiedad de que la suma de los ángulos de un triángulo siempre es 180 grados es un invariante que los estudiantes deben reconocer y aplicar en problemas geométricos (Vergnaud, 1990).

Sin embargo, el desafío radica en que los estudiantes no siempre son capaces de identificar estos invariantes, especialmente en problemas que presentan múltiples relaciones entre variables. Como se menciona en estudios previos (Mateus-Nieves y Devia Díaz, 2021), los enunciados matemáticos más complejos suelen implicar una estructura semántica en la que las relaciones entre los conceptos no son explícitas, lo que dificulta su comprensión. Esto resalta la necesidad de enseñar explícitamente cómo descomponer los enunciados y analizar sus componentes ontológicos antes de intentar resolver los problemas.

Además, la complejidad ontológica está estrechamente relacionada con la complejidad algorítmica, ya que los problemas que contienen conceptos más abstractos o relaciones más complejas suelen requerir algoritmos de resolución más sofisticados. Por ejemplo, un problema que involucra relaciones trigonométricas entre los ángulos de un triángulo puede requerir una serie de pasos algorítmicos para descomponer estas relaciones y calcular los valores de los ángulos (Zhou et al., 2018). Este tipo de problemas no solo exige una comprensión conceptual profunda, sino también la capacidad de aplicar algoritmos eficientes para llegar a una solución.

Finalmente, el análisis muestra que la representación semiótica es un componente esencial en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Según Duval (2006), el uso de múltiples formas de representación (gráfica, simbólica, verbal) es clave para desarrollar una comprensión profunda de los conceptos matemáticos. Sin embargo, los estudiantes a menudo experimentan dificultades para alternar entre estas representaciones, especialmente cuando los enunciados de los problemas requieren el uso de diferentes formas de representación. Esto sugiere que una enseñanza más explícita sobre cómo utilizar y transformar las representaciones semióticas podría mejorar el rendimiento de los estudiantes en problemas matemáticos complejos.

4.1. Implicancias pedagógicas

Las implicancias pedagógicas de este estudio son múltiples y tienen un impacto directo en cómo se debe abordar la enseñanza de las matemáticas en los niveles escolares. En primer lugar, es crucial que los docentes presten mayor atención a la complejidad ontológica de los problemas matemáticos que presentan a los estudiantes. Problemas que requieren una comprensión profunda de los conceptos y sus relaciones deben ser introducidos de manera gradual, permitiendo que los estudiantes desarrollen las habilidades necesarias para abordar relaciones más complejas entre variables.

Vergnaud (2013) sugiere que los invariantes juegan un papel crucial en la enseñanza de las matemáticas, ya que estos elementos son los que permiten a los estudiantes transferir su comprensión de un concepto a diferentes situaciones. Los docentes deben hacer hincapié en la identificación y uso de invariantes dentro de los problemas matemáticos, ya que esto facilitará que los estudiantes desarrollen una comprensión más flexible y generalizada de los conceptos matemáticos. Por ejemplo, al enseñar conceptos geométricos, los docentes deben enfatizar propiedades como la suma de los ángulos en los triángulos, y cómo estas propiedades se mantienen constantes en diferentes tipos de triángulos (equiláteros, isósceles, etc.).

Otra implicancia importante es la necesidad de enseñar explícitamente el uso de representaciones semióticas en la resolución de problemas matemáticos. Como señala Duval (2006), los estudiantes a menudo enfrentan dificultades al alternar entre diferentes formas de representación, lo que puede dificultar su comprensión de los problemas. Los docentes deben integrar actividades que expongan a los estudiantes a diversas representaciones de los mismos conceptos matemáticos, desde gráficos y diagramas hasta ecuaciones y descripciones verbales. Esta práctica no solo mejorará la flexibilidad cognitiva de los estudiantes, sino que también les permitirá enfrentar problemas más complejos con mayor éxito.

Finalmente, los resultados de este estudio también sugieren que es necesario que los docentes presten mayor atención a la relación entre complejidad ontológica y complejidad algorítmica. Los problemas que presentan una alta complejidad ontológica requieren, por lo general, algoritmos más elaborados para su resolución. Los docentes deben enseñar a los estudiantes a descomponer los problemas en partes más manejables, identificar los conceptos subyacentes y desarrollar estrategias algorítmicas eficaces para resolverlos. Esto puede implicar la enseñanza de técnicas de resolución paso a paso, así como la incorporación de tecnologías que ayuden a los estudiantes a visualizar y manipular los conceptos matemáticos.

5. Conclusiones

El presente estudio ha demostrado que la complejidad ontológica juega un papel fundamental en la resolución de problemas matemáticos en el contexto escolar. A través del análisis de los campos conceptuales de Gérard Vergnaud, se ha mostrado cómo los estudiantes desarrollan estrategias de resolución de problemas al comprender las invariantes y las relaciones entre los conceptos matemáticos. La complejidad ontológica, definida como la dificultad intrínseca de los conceptos y relaciones involucradas en los problemas, afecta tanto la capacidad de los estudiantes para interpretar los enunciados como su habilidad para aplicar algoritmos de resolución eficaces.

Los hallazgos de este estudio sugieren que una enseñanza que integre explícitamente el uso de representaciones semióticas y que se enfoque en la identificación y aplicación de invariantes matemáticos puede mejorar significativamente el rendimiento de los estudiantes en la resolución de problemas. Además, es crucial que los docentes comprendan la relación entre complejidad ontológica y complejidad algorítmica, ya que esta relación influye directamente en la dificultad de los problemas y en las estrategias de resolución que los estudiantes deben desarrollar.

En resumen, la comprensión de la complejidad ontológica y su impacto en la enseñanza de las matemáticas es esencial para mejorar el rendimiento académico en este campo. Las implicancias pedagógicas de este estudio sugieren que los docentes deben adoptar enfoques más integrales y explícitos para enseñar tanto los conceptos matemáticos como las habilidades de resolución de problemas.

6. Referencias bibliográficas

Agencia de Calidad de la Educación (2016). TERCE: Tercer Estudio Regional Comparativo y Explicativo. Ejemplos de preguntas de Lectura, Matemática y Ciencias, Santiago.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. Educational Studies in Mathematics, 61(1-2), 103-131.

Mateus-Nieves, E. & Devia Díaz, H. (2021). Desarrollo de habilidades del pensamiento matemático desde la formulación y resolución de problemas de enunciado verbal. Acta Scientiae, 23(1), 30-52. https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.5845

Oxley Insfrán, V. M. (2020). Complejidad ontológica y enunciados de problemas matemáticos. *Revista Científica Estudios E Investigaciones*, *9*(1), 17-39. https://doi.org/10.26885/rcei.9.1.17

Oxley Insfrán, V. (2024). Educación Matemática Escolar y otros ensayos. Filosofar la realidad en clave analítica. Bubok.

Pinzón Pérez, D. & González Palacio, E. (2022). Incidencia de las habilidades de pensamiento algorítmico en las habilidades de resolución de problemas. Estudios Pedagógicos, 48(2), 415-433.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. Recherches en Didactique des Mathématiques, 10(2), 133-170.

Vergnaud, G. (1998). El niño, las matemáticas y la realidad. México: Trillas.

Vergnaud, G. (2013). Pourquoi la théorie des champs conceptuels? Infancia y Aprendizaje, 36(2), 131-161.

Zhou, X., Li, M., Li, L., Zhang, Y., Cui, J., Liu, J., & Chen, C. (2018). The semantic system is involved in mathematical problem solving. NeuroImage, 166, 360-370. http://doi.org/10.1016/j.neuroimage.2017.11.017

Victor Manuel Oxley Insfrán

Lic. en Filosofía por la Universidad Nacional de Asunción UNA (Mejor egresado promoción 2002)
Master (2014) y Dr. (2018) en Ciencias de la Educación por la Universidad Gran Asunción UNIGRAN
Es autor de numerosos libros y artículos de interés y de investigación, publicados en revistas de reconocido prestigio del área. Catedrático en varias Universidades e Institutos de Educación Superior. Es investigador en el Sistema Nacional de Investigadores SISNI-PRONII del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología CONACYT (Paraguay)