

<http://www.fisem.org/www/index.php>
<https://union.fespm.es/index.php/UNION>

Interpretaciones y equivalencia de gráficos estadísticos: Un estudio con profesores de matemáticas

Gladys Mejía Osori, Pedro Javier Rojas Garzón

Fecha de recepción: 13/06/2020
 Fecha de aceptación: 30/11/2020

<p>Resumen</p>	<p>El presente trabajo indaga sobre las interpretaciones que realiza un grupo de profesores de matemáticas (primaria y secundaria) sobre gráficos estadísticos de barras y sectores, así como sus dificultades para reconocer la equivalencia de representaciones mediante transformaciones entre lenguaje natural, lenguaje gráfico (barras - sectores) y entre gráficos (conversiones). Investigación que se está desarrollando en el marco del Doctorado Interinstitucional en Educación - énfasis Educación Matemática de la Universidad Francisco José de Caldas. Los resultados obtenidos muestran que algunos profesores establecen la correspondencia entre el enunciado dado en lenguaje natural con el gráfico de barras, pero no logran pasar de lenguaje natural o el gráfico de barras al gráfico de sectores, debido a una interpretación errónea de porcentajes o el desconocimiento del cálculo. Palabras clave: Gráficos estadísticos, equivalencia, configuración de objetos, interpretación de gráficos estadísticos.</p>
<p>Abstract</p>	<p>This work investigates the interpretations made by a group of teachers of mathematics (primary and secondary) on statistical graphs of bars and sectors, as well as their difficulties in recognizing the equivalence of representations through transformations between natural language, graphic language (bars - sectors) and between graphics (conversions). Research that is being developed within the framework of the inter-institutional doctorate in education - emphasis in Mathematical Education at the Francisco José de Caldas University. The results obtained show that some teachers establish the correspondence between the statement given in natural language with the bar graph, but they cannot pass from natural language or the bar graph to the sector graph, due to an erroneous interpretation of percentages or ignorance of the calculation. Keywords: Statistical graphs, equivalence, object configuration, interpretation of statistical graphs.</p>
<p>Resumo</p>	<p>Este trabalho tem por objetivo investigar as interpretações de um grupo de professores de matemática (fundamental e médio) sobre gráficos estatísticos de barras e setores, bem como suas dificuldades em reconhecer a equivalência de representações mediante transformações entre linguagem natural, linguagem gráfica (barras - setores) e entre gráficos (conversões). Pesquisa em desenvolvimento no âmbito do doutorado interinstitucional em Educação - ênfase em Educação Matemática na Universidade Francisco José de Caldas. Os resultados obtidos mostram que alguns professores estabelecem a correspondência entre o enunciado em linguagem natural com o gráfico de barras, mas não conseguem passar da linguagem natural ou do gráfico de barras para o gráfico setorial, devido a uma interpretação inadequada de porcentagens ou desconhecimento do cálculo. Palavras-chave: Gráficos estatísticos, equivalência, configuração de objetos, interpretação de gráficos estatísticos.</p>

1. Introducción

Actualmente los ciudadanos se enfrentan con mayor frecuencia a diversa información proveniente de internet, medios de comunicación, textos, etc., que en muchas ocasiones es presentada por medio de un gráfico, el cual requiere ser leído e interpretado de manera adecuada para tomar decisiones acertadas; por esta razón socialmente se ha venido reconociendo la importancia de la enseñanza y aprendizaje de la estadística y su incorporación en los diferentes planes de estudio a nivel mundial. Al respecto, Pfannkuch y Wild (2004, citado por Gea, Arteaga y Cañadas, 2017) plantean que el lenguaje gráfico es esencial en la organización y análisis de datos, puesto que permite representar de forma diferente una información y descubrir características de una distribución de datos a partir de una representación gráfica de la misma. En virtud de ello, la interpretación de gráficos estadísticos es un componente esencial en la formación de los sujetos, la cual no puede limitarse a una lectura literal de los gráficos, sino que debe posibilitar el realizar inferencias, identificar tendencias, variabilidad de los datos, así como interpretar y representar la misma información por medio de diferentes representaciones, que en el presente estudio se denomina *equivalencia contextual de gráficos estadísticos*.

En Colombia, desde los lineamientos curriculares para el área de matemáticas (1998), se han planteado orientaciones específicas sobre el uso de representaciones gráficas, por ejemplo, para captar la aleatoriedad y la incertidumbre tanto en forma cuantitativa como cualitativa, desde las cuales se pueden hacer evaluaciones y tomar decisiones sin recurrir a un esquema único de cálculo que llevaría a encontrar valores deterministas definidos; en tal sentido, se plantea que en el contexto escolar, los procesos relacionados con la comprensión y construcción de gráficos estadísticos deben ser abordados desde los primeros ciclos escolares; lo cual presupone una adecuada formación de los profesores en cuanto a conocimiento didáctico, disciplinar y pedagógico. Si bien en el campo de la didáctica de las matemáticas se reportan diversas investigaciones sobre el conocimiento didáctico-matemático del estudiante para profesor, aún son escasos los estudios que documentan los conocimientos de los profesores de matemáticas en ejercicio. El presente estudio indaga por las interpretaciones de un grupo de profesores de matemáticas en ejercicio, sobre gráficos estadísticos de barras y sectores, así como las dificultades que encuentran para reconocer la equivalencia de transformaciones entre diferentes representaciones en lenguaje natural, gráfico de barras y gráfico de sectores, esto es, obtenidas mediante transformaciones semióticas de conversión (Duval, 2002). Si bien, desde los planteamientos de Font, Godino y D'Amore (2007), dos o más gráficos estadísticos no pueden ser equivalentes en tanto relacionan conceptos matemáticos diferentes, pues en su construcción se emplean diferentes objetos matemáticos y la actividad semiótica que se pone en juego es más o menos compleja, en el presente estudio, cuando la información relacionada con una situación dada se presenta en gráficos estadísticos diferentes, los cuales incluyen la misma información, y se hace referencia al aspecto del contexto que enmarca la situación, se dirá que existe una equivalencia contextual de los gráficos estadísticos.

2. Antecedentes de investigación

Se realizó un rastreo de estudios que indagan sobre la interpretación de gráficos estadísticos, así como sobre equivalencia de expresiones. Gea, et al. (2017) realizaron un estudio con 65 futuros profesores de educación secundaria con especialidad en matemáticas cuyo objetivo se centró en evaluar la interpretación de gráficos estadísticos, analizando sus respuestas a tres tareas específicas: interpretar el histograma, diagrama acumulativo y gráfico de caja de la distribución de la esperanza de vida al nacer en 193 países. Reportaron evidencias de algunos errores frente a la interpretación de conceptos estadísticos que deben ser considerados en la formación de profesores; las cuales fueron analizadas en función del nivel de lectura alcanzado propuesto por Curcio (1987) y de acuerdo con los resúmenes estadísticos y elementos del gráfico que se desea interpretar.

Por su parte, Arteaga, Batanero y Contreras (2011) realizaron un estudio sobre gráficos estadísticos en la educación primaria y la formación de profesores, mostrando evidencias que la construcción de gráficos y la lectura e interpretación de los mismos es una habilidad altamente compleja que se adquiere de manera gradual, para lo cual movilizan conocimientos y sentimientos que inciden en su comprensión; por ejemplo, al interpretar un gráfico sobre incidencia de cáncer en las mujeres y otro matemáticamente equivalente sobre tiempo de gestación de diferentes especies animales, el primero arrojó mejores resultados que en el segundo. En relación con los errores en la construcción de gráficos, los resultados obtenidos permitieron clasificarlos en los siguientes tipos: fallas en la formación de la distribución de frecuencias a partir de una lista de datos, errores en las escalas o divisiones de los ejes, elección de un gráfico inadecuado o la variabilidad de los datos, confusión entre variable dependiente e independiente en un gráfico o la no distinción entre valor de la variable estadística y frecuencia, representación incorrecta de intervalos en la recta numérica y comparaciones numéricas inadecuadas

Sanoja y Ortíz (2013) presentan un estudio sobre el conocimiento de contenido estadístico de los maestros y muestran evidencias que existe una necesidad de “reforzar” los conceptos básicos de estadística para orientar procesos de enseñanza y aprendizaje de niñas y niños desde los primeros años de escolaridad, en tanto encontraron concepciones erróneas de los maestros y algunas dificultades relacionadas con la visualización de datos (conceptos básicos y organización de datos); medidas de tendencia central (moda, mediana y media aritmética) y probabilidades; las cuales se manifestaron en cuanto a: (i) error en la concepción del concepto de variable; (ii) errores al asociar el tipo de gráfico con la variable; (iii) dificultad en la comprensión de los gráficos de línea e histograma, así como dificultades en la lectura de estos gráficos, tanto en lectura literal del gráfico como en la interpretación del mismo, este tipo de lecturas son las que Curcio (1987, citado por Sanoja y Ortíz, 2013) denominó “leer los datos y leer entre los datos”. Dichos autores también encontraron que algunos profesores no comprenden el significado de la media aritmética, aun cuando conocían el procedimiento para su cálculo; en lo que respecta a la mediana, los maestros no tenían conocimiento del procedimiento para su determinación; tampoco se evidenció dominio de concepto de evento posible; aunque encontraron algunas fortalezas relacionadas con el dominio procedimental de

los profesores en la construcción de tablas de frecuencia simples y de doble entrada, así como en la construcción, lectura e interpretación del gráfico de barras y en la construcción de pictogramas.

En el área de las matemáticas los estudios desarrollados sobre equivalencia de expresiones se han centrado en dos tópicos: conjuntos numéricos y álgebra. En los primeros años de escolaridad la equivalencia surge en el desarrollo del concepto de número, la ampliación del sistema numérico decimal y las relaciones que existen entre números, para reconocer sus distintas representaciones, relaciones entre sus operaciones y para resolver cierto tipo de problemas. En el contexto algebraico, se estudian las relaciones entre diferentes tipos de expresiones, aplicando reglas de transformación de expresiones (perspectiva sintáctica) o mediante la comprensión del empleo de métodos numéricos (perspectiva semántica). Las investigaciones han puesto de manifiesto que un factor importante sobre la equivalencia de expresiones algebraicas es el tipo de expresión matemática con la que se trabaja, es decir, si se trata de una ecuación, un polinomio, una función polinomial o racional, etc.; para decidir la equivalencia de este tipo de expresiones es necesario tener en cuenta su naturaleza y las restricciones que presenta (Solares y Kieran, 2013).

El estudio de la equivalencia algebraica ha sido abordado desde dos aproximaciones: la primera, enfatizando una perspectiva sintáctica (Kieran y Saldanha, 2005; Kieran, Boileau, Tanguay y Drijvers, 2013; Solares y Kieran, 2013), de las relaciones y reglas inherentes al álgebra, privilegiando el lenguaje simbólico, aspectos procedimentales y las reglas de transformación de expresiones para probar la equivalencia. Booth (1989, citado por Radford, 2004) señala que la perspectiva sintáctica asocia una perspectiva semántica que no puede obviarse, la cual no coincide exactamente con la caracterización anterior sobre la perspectiva semántica; pues la habilidad para manipular símbolos algebraicos requiere aplicar propiedades estructurales de las operaciones y otras relaciones matemáticas, las cuales requieren ser comprendidas por los sujetos; la segunda, enfatizando en una perspectiva semántica (Chalé-Can, Font y Acuña, 2017) desde la interpretación del contexto para establecer la equivalencia de expresiones.

Mejías (2019) evaluó los conocimientos didácticos y matemáticos de profesores en ejercicio de educación primaria en Chile con respecto al álgebra temprana; incluyendo tareas sobre equivalencia de expresiones algebraicas, como inferir si era válida la siguiente afirmación realizada por un estudiante *“Sumo tres números consecutivos. Si divido el resultado por tres, obtengo siempre el segundo número”*. Plantea que para el estudio y desarrollo de la noción de equivalencia algebraica es necesario tener en cuenta elementos sintácticos y semánticos de las expresiones algebraicas, los cuales deben ser conectados y desarrollados a la par para promover una mejor comprensión de dicha noción (Solares y Kieran, 2013; Kieran et al., 2013; Chalé-Can et al., 2017), y sugiere la necesidad de una transición desde una noción espontánea de equivalencia, hacia una concepción que esté más asociada con el aspecto semántico (Kieran et al, 2013).

Por su parte Chalé-Can (2018) investigó el papel que juegan los aspectos sintácticos y semánticos en la equivalencia de expresiones algebraicas en secuencias

visuales y encontró que se hace fundamental relacionar dichos aspectos en el aula para una mejor comprensión de la equivalencia algebraica; reconociendo la necesidad de un proceso de significación que dé sentido a los símbolos y posibilite un proceso de generalización que permita enunciar una proposición como punto de partida para el tratamiento simbólico posterior. Previamente Chalé-Can et al. (2017) habían planteado la complejidad de la noción de equivalencia en términos de una dialéctica entre aproximaciones desde lo sintáctico y lo semántico, y su necesaria articulación; reconociendo el papel relevante que tiene el registro de representación propio del contexto y los procesos de significación y de generalización lo cual marca la diferencia con respecto a la perspectiva sintáctica. En la aproximación sintáctica, las expresiones algebraicas aparecen de manera explícita y sobre ellas trabaja el estudiante para mostrar la equivalencia; mientras que, en la aproximación semántica, las expresiones algebraicas no aparecen de manera explícita, sino que emergen del proceso de solución que se propone como tarea.

Rojas (2012) reporta, entre otros, casos relacionados con probabilidad en los que los estudiantes reconocen la equivalencia sintáctica pero no la semántica, poniendo en evidencia dificultades para articular diversos significados asignados a expresiones asociadas con un objeto matemático, es decir, dada una de las expresiones logran realizar las transformaciones de tratamiento requeridas para obtener la otra (equivalencia sintáctica) pero no siempre consiguen articular los significados asignados a dichas expresiones (equivalencia semántica) e incluso pueden cambiar el significado inicialmente asignado a éstas; también muestra resultados de cómo algunos estudiantes que a pesar de que inicialmente no logran realizar el proceso de tratamiento requerido para reconocer la equivalencia sintáctica entre las expresiones dadas logran hacerlo luego de un trabajo de interacción, y reporta que algunas de estas dificultades que encuentran los estudiantes para articular los significados asignados a expresiones pueden asociarse en tres grupos: (i) *Reconocimiento icónico de las expresiones*, en tanto asignan significado a las expresiones basados en un reconocimiento icónico de las mismas; (ii) *Anclaje a situaciones dadas*, tendencia a realizar interpretaciones ligadas con la situación propuesta, por ejemplo, al pedir calcular la probabilidad de que lanzando un dado se obtenga un número par; (iii) *Falta de apropiación del lenguaje matemático*.

En la literatura existente son pocas las investigaciones sobre la equivalencia de representaciones en el campo estadístico, específicamente sobre lo que se ha denominado en este escrito equivalencia contextual de gráficos estadísticos, entendida como la habilidad que desarrollan las personas para identificar la misma información presentada por medio de diferentes representaciones. Si bien existen trabajos relacionados con la interpretación de gráficos estadísticos y las dificultades que encuentran los sujetos en su interpretación y construcción, son escasos los estudios que relacionan dicha interpretación y construcción con la equivalencia de gráficos estadísticos articulando el aspecto sintáctico y semántico; al respecto, en el presente trabajo se toman dos gráficos (barras y sectores) y su enunciado natural, de manera análoga a la investigación realizada sobre la equivalencia de expresiones algebraicas, se parte del supuesto que, para el estudio y desarrollo de la noción de equivalencia entre gráficos estadísticos, también es necesario tener en cuenta

elementos sintácticos y semánticos de las representaciones gráficas (Chalé-Can et al., 2017).

3. Marco teórico

El análisis de las producciones de profesores que se reporta en esta investigación se realizó desde el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS a partir de ahora), desde el cual la actividad matemática se describe en términos de prácticas, objetos y procesos activados en ellas. La práctica matemática es asumida como toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por una persona (o compartida en el seno de una institución) para resolver problemas matemáticos, comunicar, validar o generalizar la solución a estos problemas (Godino, Castro, Aké y Wilhelmi, 2012); en esta práctica se activa una configuración de objetos primarios (elementos lingüísticos, conceptos/definiciones, propiedades/proposiciones, procedimientos y argumentos), así como de procesos matemáticos. En relación con los gráficos estadísticos, en particular, es un objeto semiótico complejo en el que intervienen diversas interpretaciones, tanto de la persona que realiza su construcción como de las personas que lo interpretan; según Batanero, Arteaga y Ruiz (2010), intervienen tres aspectos, a saber: la complejidad semiótica, el nivel de lectura que realizan los sujetos, y, los elementos que se deben contemplar para construir un gráfico. Con respecto a los elementos que permiten la comprensión de un gráfico estadístico, plantean que se requiere que las personas identifiquen las variables representadas y sus escalas, así como una percepción de la correspondencia entre los niveles de cada dimensión visual para obtener conclusiones sobre los niveles de cada variable y de las relaciones de la realidad representada.

La comprensión gráfica es asumida como la capacidad de dotar de significado a los gráficos creados por uno mismo o por otros. Curcio (1987) resalta tres elementos en la comprensión de un gráfico estadístico: las *palabras o expresiones* que proporcionan los aspectos en relación a la información para comprender el gráfico y su contexto (título, etiquetas en ejes y escalas), el *contenido matemático* que comprende el gráfico, por ejemplo, los conjuntos numéricos utilizados (enteros, racionales, etc.), el concepto de área en un gráfico de sectores y su correspondencia con los porcentajes, los sistemas de coordenadas cartesianas en un diagrama de dispersión, proporcionalidad (en la mayoría de los gráficos), etc., y, los *convenios específicos* que refiere a los elementos propios de cada tipo de gráfico, por ejemplo, en un gráfico circular la amplitud con el área o la correspondencia de proporción entre la frecuencia y la información dada en un gráfico de barras; además de niveles en su interpretación, como lo proponen Friel, Curcio y Bright (2001, citados por Batanero et al., 2010. p. 5): El Nivel 1 (*Leer los datos*) hace referencia a la lectura literal de la información representada en el gráfico estadístico, por ejemplo, la correspondencia de la frecuencia con un valor en un gráfico barras que realizan los sujetos; el Nivel 2 (*Leer dentro de los datos*) corresponde a la lectura de algo que no está explícitamente o visible dentro del gráfico y requiere que se apliquen procedimientos matemáticos (comparaciones, adiciones, etc.); el Nivel 3 (*Leer más allá de los datos*) se relaciona con la identificación de la información que no está representada en el gráfico y no se puede deducir con operaciones o comparaciones; y el Nivel 4 (*Leer detrás de los*

datos) que hace referencia a inferir la forma en que se recogieron los datos, o la interpretación que otras personas hacen del mismo, así como cuestionar la calidad de los datos y la forma de recolección, es decir, realizar inferencias del contexto y poner en juego elementos matemáticos. Desde lo planteado hasta ahora, además de interpretar adecuadamente un gráfico, es necesario identificar la misma información en otras representaciones gráficas a lo que hemos denominado equivalencia contextual de gráficos estadísticos. Siguiendo los planteamientos de Chalé-Can et al. (2017), en este estudio se reconoce la complejidad de la equivalencia de gráficos, de manera análoga a la equivalencia de expresiones algebraicas, así como la necesidad de los aspectos sintáctico y semántico, y su necesaria articulación.

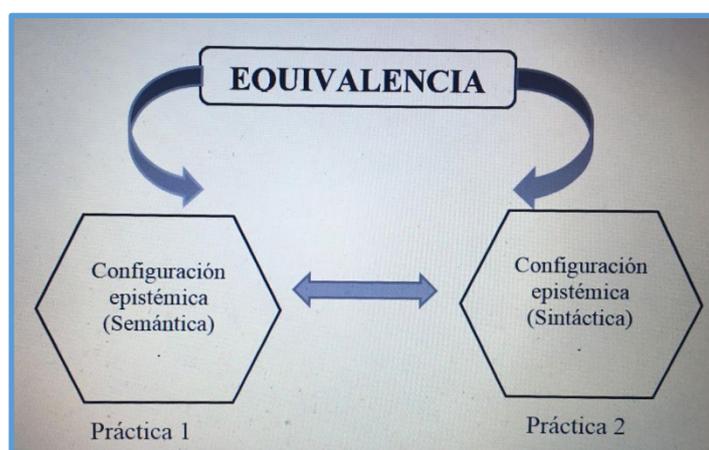


Figura 1. Tomado de Chalé-Can, Font y Acuña (2017). Diagrama adaptado para establecer la equivalencia de gráficos estadísticos.

Desde el punto de vista sintáctico, se dice que dos gráficos A y B que provienen del mismo conjunto de datos son equivalentes contextualmente cuando es posible transformar un gráfico en otro mediante dos pasos; primero, obtener información a partir de la interpretación de un gráfico y, segundo, construir un nuevo gráfico a partir de la información obtenida. Desde el punto de vista semántico, se dice que dos gráficos A y B son equivalentes cuando la información que se obtiene de la interpretación de cada uno de ellos se considera que estos son contextualmente equivalentes, es decir, los gráficos adquieren significados en un contexto en el cual se reconoce que representan la misma situación. Para el caso particular de este trabajo se ha elegido el gráfico de barras y el gráfico de sectores para indagar si los sujetos reconocen un enunciado representado por medio de un gráfico de barras y de sectores. Para establecer la equivalencia entre los dos gráficos estadísticos (barras – sectores) los sujetos tendrían dos vías.

1. Realizar una interpretación (semántica) de la situación (expresada en lenguaje natural) y del gráfico de barras y ver que ambas interpretaciones coinciden. Después, dado que los valores obtenidos en la interpretación del gráfico de barras permiten calcular porcentajes y construir un gráfico de sectores, que coincidirá con el dado en el problema, permitiendo concluir que los dos gráficos representan la misma información (semántica y sintácticamente). Por lo tanto, las tres representaciones (lenguaje natural, gráfica de barras y sectores) son equivalentes contextualmente.
2. Realizar una interpretación (semántica) de la situación (expresada en lenguaje natural) y el gráfico de barras, remitirse a la situación dada inicialmente y establecer que la información coincide con el gráfico de sectores, por tanto, dado que la información suministrada en los dos gráficos es la misma, se puede establecer su equivalencia contextual (semántica y sintáctica).



Figura 2. Diagrama sobre la equivalencia de gráficos estadísticos. Interpretación del enunciado, el gráfico de barras y el gráfico de sectores.



Figura 3. Diagrama sobre la equivalencia de gráficos estadísticos. Interpretación del enunciado, y el gráfico de barras y gráfico de sectores

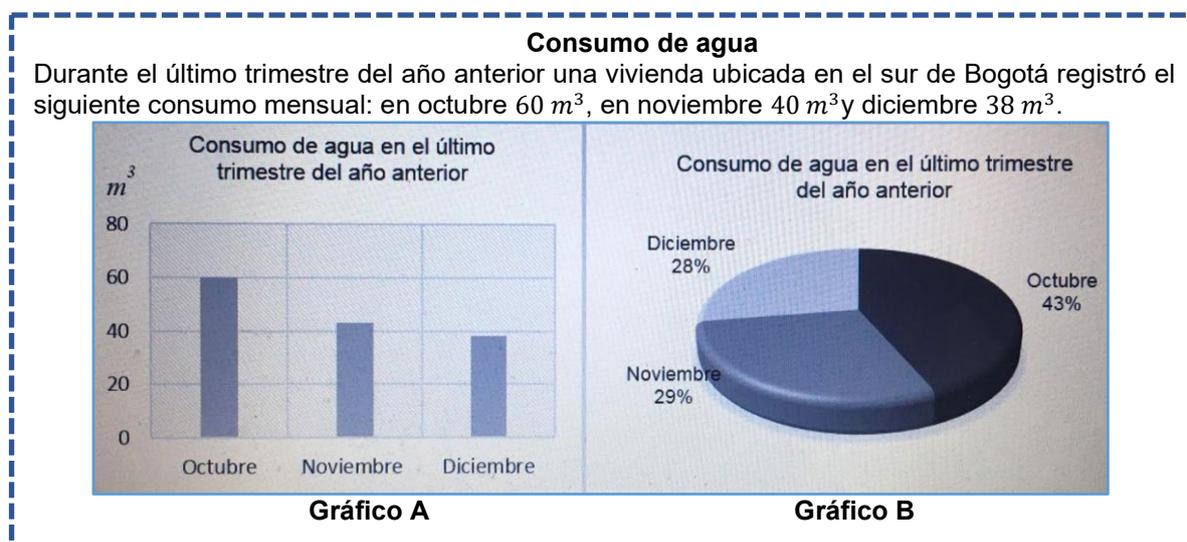
En general, para hablar de equivalencia contextual de gráficos estadísticos se necesitan dos gráficos (A y B) y, para la solución de algunos problemas, es necesario encontrar un gráfico equivalente a otro, es decir, sólo se tiene el gráfico A y el problema se resuelve encontrando un gráfico equivalente B. En algunos casos, el segundo gráfico puede ser obtenido de la aplicación de reglas de construcción, pero en otros no es posible o fácil, como en el caso que se presenta en este trabajo. Cuando se presenta esta dificultad, se considera que se puede recurrir a dar significado a la información del primer gráfico (A) mediante un contexto, visto este como las diferentes referencias que la formulación de un problema evoca en el sujeto.

4. Metodología

Este trabajo se enmarca en un enfoque de investigación cualitativa, de tipo descriptivo e interpretativo (Rodríguez, Gil y García, 1996; Goetz y Lecompte, 1988) que busca reconocer interpretaciones y dificultades de un grupo de profesores de matemáticas en ejercicio para reconocer la equivalencia contextual de dos gráficos estadísticos (barras y sectores); para lo cual se hace uso de herramientas de análisis

propuesto desde el EOS (Godino, 2002), a partir del contenido de la tarea y la solución experta (configuración epistémica) con el objetivo de caracterizar la interpretación realizada por cada profesor (configuración cognitiva), así como las dificultades para reconocer la equivalencia de representaciones mediante transformaciones entre lenguaje natural, gráfico (barras - sectores) y entre los gráficos propuestos; desde el cual es posible describir y caracterizar de manera sistemática los objetos matemáticos primarios que son activados en una práctica matemática sobre interpretación de gráficos estadísticos, por ejemplo, definición de frecuencia y propiedades.

Esta herramienta de configuración cognitiva permitió identificar las diferentes interpretaciones otorgadas por un grupo de 32 profesores de matemáticas en ejercicio (8 de educación primaria y 24 de secundaria), que tenían a su cargo la asignatura de matemáticas en las diferentes instituciones públicas de la ciudad de Bogotá; no todos con formación especializada en el área de matemáticas. El desarrollo del trabajo se realizó en cinco fases. En la primera, se diseñó una situación enmarcada en la interpretación de gráficos estadísticos, así como el establecimiento de la equivalencia entre su enunciado en lenguaje natural, el gráfico de barras y el gráfico de sectores. Para ello, se propuso una tarea que fue abordada por profesores en ejercicio, permitiendo ajustar el contexto, la redacción de la situación, que la actividad se ubicara dentro de la interpretación de gráficos estadísticos y que la información estuviera expresada en al menos dos representaciones (se optó por el gráfico de barras y gráfico de sectores), y que posibilitara evidenciar el reconocimiento o no de la equivalencia contextual de gráficos estadísticos. La tarea propuesta se muestra a continuación:



Los profesores debían marcar con una X y justificar la elección si: a) el gráfico A, b) el gráfico B, c) los gráficos A y B o d) ninguno de los dos gráficos representaba el consumo de agua en el último trimestre de la vivienda. Se considera que la tarea es pertinente para establecer las interpretaciones que otorgan los profesores a diagramas estadísticos, puesto que permite identificar posibles dificultades que encuentran estos para establecer la equivalencia entre la información suministrada en cada representación, en tanto que los profesores deben reconocer la equivalencia contextual entre representaciones mediante transformaciones semióticas en gráficos estadísticos y el enunciado en lenguaje natural. En la segunda se propuso la tarea a

los profesores. En la tercera fase se analizaron las respuestas de los profesores y se establecieron las configuraciones cognitivas, desde categorías de análisis que permitieron clasificar las producciones de los profesores en cuatro grupos teniendo en cuenta las similitudes en las configuraciones activadas por ellos; con base en los resultados obtenidos se realizó una modificación a la tarea propuesta inicialmente, la cual se muestra en el apartado de análisis de los resultados de este escrito, correspondientes a las fases 4 y 5.

5. Análisis y resultados

Con el propósito de evidenciar las interpretaciones realizadas por los profesores de matemáticas sobre gráficos estadísticos, cuando resuelven una tarea específica, así como las dificultades y posibilidades para identificar la equivalencia contextual de dichos gráficos, se presenta una configuración (epistémica) de los objetos primarios requeridos, así como los significados que se espera sean activados en las interpretaciones realizadas por ellos. Esta configuración se constituye en un insumo para analizar las configuraciones cognitivas que surgen de las interpretaciones que realizan los profesores.

5.1. Algunas consideraciones sobre la configuración epistémica:

En la Figura 4 se presenta la configuración epistémica (Godino, Castro, Aké y Wilhelmi, 2012) que se espera sea activada por los profesores de matemáticas al abordar la tarea propuesta, en la que se establecen relaciones o vínculos entre el lenguaje requerido, las definiciones y conceptos implícitos, las propiedades, los procedimientos a utilizar y los argumentos previstos. Para Rondero y Font (2015) en una configuración cognitiva o epistémica los objetos primarios no actúan de manera aislada sino que se vinculan entre sí en tanto que las situaciones-problemas son el origen y motivación de la actividad matemática, el lenguaje actúa como soporte para representar a las entidades y a su vez son soporte para la acción, los argumentos justifican los procedimientos y las proposiciones que, conjuntamente con las definiciones, resuelven las situaciones-problemas; en su conjunto estas relaciones entre los objetos primarios determinan la configuración. Tanto los sistemas de prácticas como las configuraciones se proponen como herramientas teóricas para describir las interpretaciones que realizan los profesores a los gráficos estadísticos.

En el caso particular de la tarea sobre interpretación de gráficos estadísticos el lenguaje refiere a las representaciones empleadas para presentar la tarea como el enunciado natural de la situación y el lenguaje gráfico, específicamente el diagrama de barras y de sectores dados en la situación; las acciones están relacionadas con la identificación de los valores de variables, las frecuencias relativas, absolutas, el cálculo e interpretación de los porcentajes y el establecimiento de la amplitud de cada sector proporcional a la frecuencia relativa, entre otros. Con respecto a los conceptos que se suponen conocidos por el resolutor son: gráfico de barras, gráfico de sectores, frecuencia relativa y absoluta, variable estadística, círculo y porcentajes; además, en cuanto a las proposiciones y propiedades, se espera que el resolutor establezca que las partes conforman el todo y que: i) las frecuencias absolutas forman la frecuencia acumulada, ii) a cada sector del gráfico le corresponde un área y a la suma de todas las áreas la totalidad del círculo. En cuanto a las argumentaciones, se espera que los resolutores realicen al menos dos: i) cada longitud de la barra coincide con la

frecuencia absoluta, ii) a cada sector del gráfico le corresponde un área y la suma de las áreas conforman el total del círculo, así como la amplitud del sector es proporcional a la frecuencia relativa y la suma de estas conforman la frecuencia absoluta.

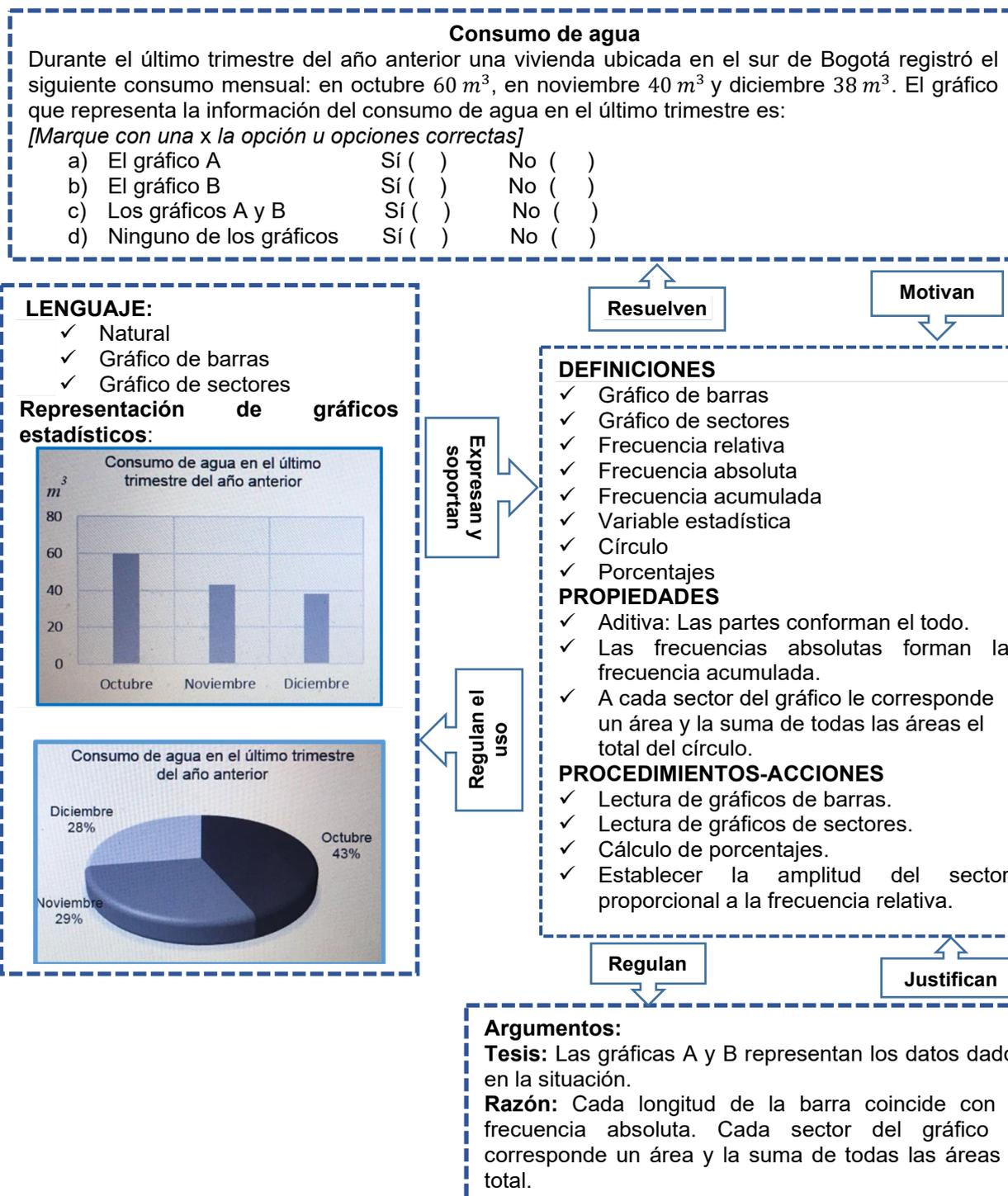


Figura 4. Configuración epistémica esperada que sea activada por el profesor.

5.2. Configuraciones cognitivas de los profesores:

Frente a la tarea propuesta 18 profesores aceptan que el gráfico A representan la información del consumo de agua de la vivienda durante el último trimestre, quienes realizan una lectura literal del gráfico de barras, y argumentan que: *“es más fácil hacer una correspondencia y corroborar los datos”, “muestra la información de las variables de agua m^3 por cada mes”, “comparando la altura de cada barra con el nombre de cada mes y la cantidad en m^3 que indica el enunciado”, o “da una aproximación más cercana visualmente a los datos”*. Otros manifiestan que *“es necesario conocer la cantidad de agua que se consume, por tal motivo solo el gráfico A tiene la información. El gráfico B solo relaciona los porcentajes y no presenta alguna cantidad comparable sobre la unidad de medida del consumo”, “representa el diagrama de cantidad de agua consumida, pero me queda la duda del gráfico B, pues no sé cuánto sería el porcentaje de cada mes” o “permite visualizar el consumo en el último trimestre porque el gráfico B no corresponde los porcentajes”*. Algunos profesores realizan los cálculos de los porcentajes erróneamente o, aunque calculan correctamente los porcentajes, realizan de forma incorrecta el redondeo de estos valores y por ello los porcentajes no coinciden, aspecto que no les permite aceptar la equivalencia entre el lenguaje natural, gráfico de barras y gráfico de sectores. En la tabla 1 se muestran evidencias al respecto. Uno de los profesores no da solución a la tarea, manifestando no recordar el tema, y otro no admite ninguno de los dos gráficos; los 12 restantes establecen que los gráficos de barras y de sectores representan la información dada en el enunciado, entre los argumentos se destacan: *“en el gráfico A se muestran los datos presentados en el enunciado correspondiente al consumo en metros cúbicos de agua en el último trimestre del año, mientras que en el gráfico B se evidencia el consumo de agua durante los últimos tres meses, dando como evidencia del consumo total el porcentaje a cada mes”*.

A partir de los anteriores resultados e identificando la similitud entre sus argumentos, se establecieron 4 categorías que clasifican las producciones a la luz de las configuraciones cognitivas activadas y permiten reconocer las interpretaciones realizadas por los 32 profesores (ver evidencias en la Tabla 1):

1. **GRUPO A: No responden:** Se ubican profesores que no abordaron la situación.
2. **GRUPO B: Conversión del lenguaje natural al lenguaje gráfico de barras (o viceversa).** En las producciones se evidencia que establecen una transformación del lenguaje natural al lenguaje gráfico de barras (conversión), algunos explicitan que coinciden los datos dados en el enunciado con el tamaño de las barras y representa de manera exacta la información suministrada. No es posible tener certeza sobre el orden en que los profesores hacen la lectura de la información, si del lenguaje natural al gráfico de barras o del gráfico de barras al lenguaje natural. Este grupo se encuentra en el Nivel 1 (*leer los datos*, Curcio, 1987), dado que realizan una lectura literal de la información suministrada en el enunciado de la tarea y del gráfico estadístico de barras.
3. **GRUPO C: Conversión del lenguaje gráfico de barras al lenguaje natural y no establecen la conversión entre el lenguaje natural al gráfico de sectores (o viceversa) debido al cálculo o interpretación errónea de porcentajes:** Aplican

procedimientos y algoritmos erróneos o manifiestan un desconocimiento de cómo calcular el porcentaje del consumo en cada mes, aspecto que les impide admitir la equivalencia entre el enunciado de la situación y los gráficos (barras-sectores). Por ejemplo, argumentan “no sé cuánto sería el porcentaje de cada mes, no es tan fácil tal correspondencia, unidad comparable”. Dado que la interpretación del gráfico de sectores requiere realizar procedimientos para el cálculo de porcentajes que no se encuentran de manera explícita en el enunciado de la tarea pero que el profesor argumenta desconocer, no recordar o emplear cálculos erróneos, hacen que el grupo no pueda clasificarse en el Nivel 2 (*Leer dentro de los datos*) de interpretación de gráficos estadísticos, debido a que en el gráfico de sectores no identifican el área total del gráfico que corresponde al consumo trimestral de agua, así como el establecer la proporción que define la amplitud del consumo mes a mes.

4. **GRUPO D: Conversión del lenguaje natural al lenguaje gráfico de barras y del gráfico de barras al gráfico de sectores (o viceversa):** reconocen la equivalencia entre el gráfico de barras y el gráfico de sectores. En las configuraciones logradas se evidencia que identifican el todo y las partes, aplican la propiedad aditiva, entendida como a cada sector del círculo le corresponde un área y su total forman el todo (círculo). Así mismo, cada barra tiene una frecuencia absoluta (partes) y el total de las frecuencias conforman la frecuencia acumulada (todo). Reconocen el todo, expresado en términos del 100% del consumo total en el último trimestre del año; realizan el cálculo de los porcentajes o una interpretación correcta de estos. Aceptar el gráfico B y establecer la equivalencia entre las tres representaciones requiere calcular e interpretar el porcentaje relacionado con el consumo de agua en cada mes, aspecto que no se encuentra presente en el enunciado de la tarea (Nivel 2: *Leer dentro de los datos*). La configuración cognitiva activada se aproxima a la configuración epistémica esperada que fuese activada en esta tarea.

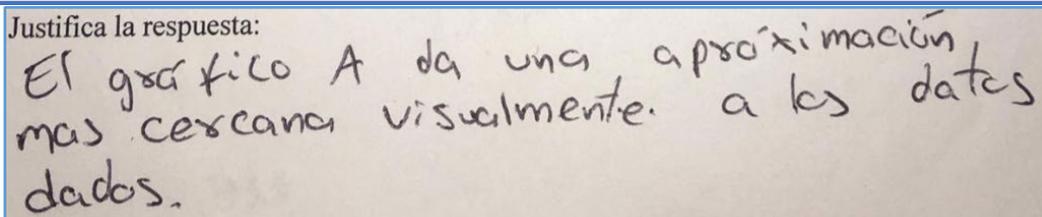
En la tabla 1 se presenta una síntesis de las 32 interpretaciones otorgadas por los profesores a la tarea propuesta, así como las configuraciones cognitivas activadas por estos. Se pudo evidenciar que un 62.5 % de ellos establecieron la equivalencia contextual entre el lenguaje natural y el gráfico de barras, intentan establecer la equivalencia con el gráfico de sectores pero el cálculo de porcentajes, su interpretación, el redondeo de números decimales y el trabajo con estos números no enteros o el desconocimiento de cómo realizar los cálculos para hallar porcentajes, impidió que los profesores identificaran la equivalencia entre el gráfico de barras y gráfico de sectores y el lenguaje natural (situación) y los gráficos de barras y de sectores (*conversión*) para expresar la misma información.

GRUPO	EJEMPLO DE ARGUMENTO	CONFIGURACIÓN COGNITIVA ACTIVADA POR LOS PROFESORES
Grupo A (1 profesor)	<i>No responden</i>	
Grupo B (7 profesores)	<u><i>Comparando</i></u> <i>la altura de cada barra con el nombre de</i>	Elementos que fueron activadas en la configuración cognitiva que agrupa en el grupo B las interpretaciones realizadas por los profesores. 1. Lenguaje:

	<p>cada mes y la cantidad en m^3 que indica el enunciado.</p>	<ul style="list-style-type: none"> ✓ <u>Lenguaje natural</u> ✓ <u>Gráfico de barras</u> ✓ <u>Frecuencia absoluta</u> ✓ <u>Frecuencia acumulada</u> ✓ <u>Variable estadística</u> <p>2. Representaciones: Las dadas en la situación (<u>Gráfico de barras</u> y gráfico de sectores)</p> <p>3. Procedimientos y Acciones:</p> <ul style="list-style-type: none"> ✓ <u>Interpretación de gráficos de barras.</u> <p>4. Proposiciones y propiedades:</p> <ul style="list-style-type: none"> ✓ <u>Aditiva: Las partes conforman el todo. Las frecuencias absolutas forman la frecuencia acumulada.</u> <p>5. Argumentaciones: El gráfico de barras permite establecer la correspondencia entre los datos dados.</p>
--	--	--

EVIDENCIA

Justifica la respuesta:



El gráfico A da una aproximación mas cercana visualmente a los datos dados.

Figura 5. Evidencia. El gráfico A representa la información dada el enunciado.

<p>Grupo C (12 profesores)</p>	<p>En el gráfico A se observa que las barras expresan las cantidades exactas de consumo en el último trimestre, y en el gráfico B los porcentajes no corresponden con los consumos mencionados.</p>	<p>Elementos que fueron activadas en la configuración cognitiva que agrupa en el grupo C las interpretaciones realizadas por los profesores:</p> <p>1. Lenguaje:</p> <ul style="list-style-type: none"> ✓ <u>Lenguaje natural</u> ✓ <u>Gráfico de barras</u> ✓ <u>Frecuencia absoluta</u> ✓ <u>Frecuencia acumulada.</u> ✓ <u>Variable estadística</u> ✓ <u>Porcentajes</u> ✓ <u>Círculo</u> <p>2. Representaciones: Las dadas en la situación (<u>Gráfica de barras</u> y gráfica de sectores)</p> <p>3. Procedimientos y Acciones:</p> <ul style="list-style-type: none"> ✓ <u>Interpretación de gráficos de barras.</u> <p>4. Proposiciones y propiedades:</p> <ul style="list-style-type: none"> ✓ <u>Aditiva: Las partes conforman el todo.</u> ✓ <u>Las frecuencias absolutas forman la frecuencia acumulada.</u> <p>5. Argumentaciones: El gráfico de barras permite establecer la correspondencia entre los datos dados y en gráfico de sectores los porcentajes no coinciden.</p>
---	--	---

EVIDENCIA

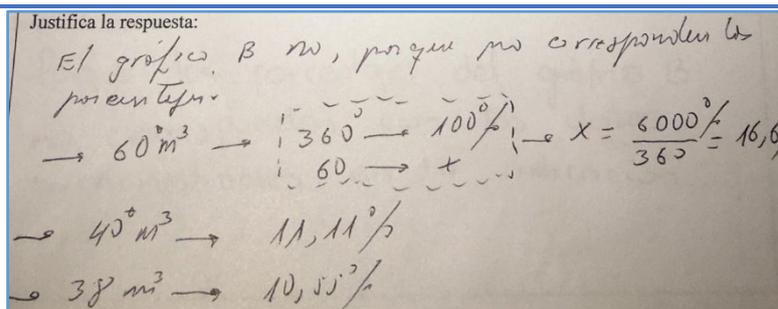


Figura 6. Evidencia. Calcula erróneamente los porcentajes del consumo de agua en el último trimestre.

<p>Grupo D (12 profesores)</p>	<p>En el primer gráfico, muestra el tiempo (<u>mes</u>) <u>vs</u> <u>cantidad de agua</u> en m^3, los datos <u>corresponden</u> a los dados en el enunciado.</p> <p>En el segundo gráfico se observa la cantidad de agua en porcentaje, $60 m^3$ de los datos es 43% así mismo con las otras cantidades.</p>	<p>Elementos que fueron activadas en la configuración cognitiva que agrupa en el grupo D las interpretaciones realizadas por los profesores</p> <p>1: Lenguaje y conceptos:</p> <ul style="list-style-type: none"> ✓ <u>Lenguaje natural</u> ✓ <u>Gráfico de barras</u> ✓ <u>Gráfico de sectores</u> ✓ <u>Frecuencia relativa</u> ✓ <u>Frecuencia acumulada</u> ✓ <u>Variable estadística</u> ✓ <u>Porcentajes</u> ✓ <u>Círculo</u> <p>Representaciones: Las dadas en la situación (<u>Gráfico de barras</u> y gráfico de sectores)</p> <p>1. Procedimientos y Acciones:</p> <ul style="list-style-type: none"> ✓ <u>Interpretación de gráficos de barras.</u> ✓ <u>Interpretación de gráficos de sectores.</u> ✓ <u>Cálculo de porcentajes</u> <p>2. Proposiciones y propiedades:</p> <p><u>Aditiva: Las partes conforman el todo.</u></p> <ul style="list-style-type: none"> ✓ <u>Las frecuencias absolutas forman la frecuencia acumulada.</u> ✓ <u>A cada sector del gráfico le corresponde un área y la suma de todas las áreas el total del círculo.</u> <p>3. Argumentaciones: <u>El primer gráfico muestra el consumo mes a mes del último trimestre y el gráfico de sectores muestra el porcentaje respecto al total consumido en todo el trimestre.</u></p>
---	--	---

EVIDENCIA

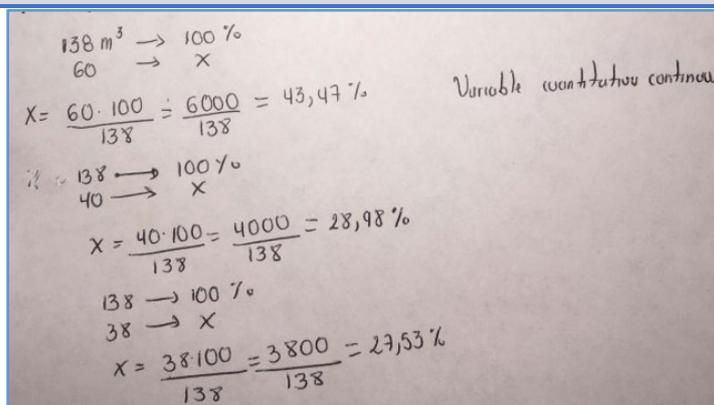


Figura 7. Evidencia. Realiza los cálculos del consumo de la vivienda en cada uno de los meses del último trimestre. El gráfico A y B representa la misma información.

Tabla 1. Rejilla de configuraciones activadas por el grupo de 32 profesores. Tarea del consumo de agua trimestral.

Aunque los profesores debían realizar una lectura literal en el gráfico de barras no pasa lo mismo al interpretar el gráfico de sectores puesto que requiere que establezcan una correspondencia entre cada porcentaje con la cantidad de metros consumidos mes a mes por ejemplo $60 m^3$ corresponde a 43,47 %, $40 m^3$ a 28,98%, y $38 m^3$ a un 27,53 % valores que además de realizar los respectivos cálculos exigen la realización de redondeos, así como la aplicación de las reglas correspondientes para tal aproximación. Los resultados obtenidos muestran que un grupo considerable de profesores no admiten la equivalencia entre los dos gráficos y el enunciado dado. Ante estos resultados nos preguntamos si la aceptación o no de la equivalencia entre representaciones se debía a un posible cálculo erróneo de porcentajes e interpretación de estos, al manejo con los números decimales específicamente con el redondeo de cifras o el desconociendo de los procedimientos para calcular

Durante el último trimestre del año anterior una vivienda ubicada en el sur de Bogotá registró el siguiente consumo mensual: en octubre $88 m^3$, en noviembre $62 m^3$ y diciembre $50 m^3$.



Gráfico A

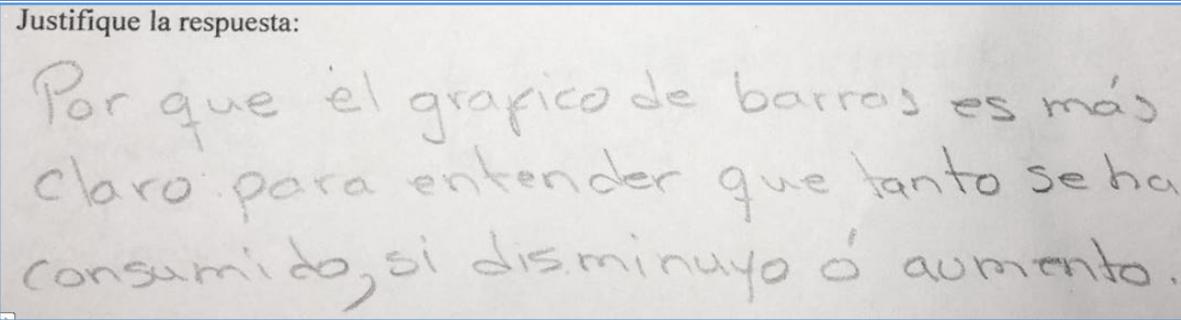
Gráfico B

porcentajes. En busca de evidencias de estos supuestos se modificó la tarea que fue aplicada inicialmente; para ello se variaron los valores dados de tal manera que no se requiriera el manejo de números decimales, manteniendo los aspectos básicos de la tarea inicial, como el contexto “consumo de agua” y las representaciones (lenguaje natural, gráfico de barras y gráfico de sectores), con la modificación de los valores de consumo; específicamente un consumo total de $200 m^3$, con $88 m^3$ en el mes de octubre, $62 m^3$ en el mes de en noviembre y $50 m^3$ en diciembre, cálculos que resultan más sencillos para aceptar la equivalencia entre los dos gráficos y el lenguaje natural, así como realizar los procedimientos para calcular porcentajes que pueden ser obtenidos al establecer relaciones; por ejemplo, el consumo de $50 m^3$ equivale al 25% del total. A continuación, se presenta la tarea:

Al igual que la primera tarea los profesores debían marcar con una X y justificar si: a) el gráfico A representa la información, b) el gráfico B, c) los gráficos A y B, o d) ninguno de los dos gráficos representaba el consumo de agua en el último trimestre de la vivienda. La tarea fue aplicada a 20 profesores, diferentes a los 32 profesores que conformaron inicialmente la población de este estudio, 14 son profesores de educación básica primaria y 6 de secundaria, todos con la particularidad de tener a cargo la asignatura de matemáticas.

En relación con los resultados obtenidos el 100% de los profesores abordan la tarea, 25% de estos se ubican en el grupo B, admiten que el gráfico A representa la información suministrada en el enunciado, algunos manifiestan “en el gráfico de barras (A) se representa la información claramente ya que en el eje (x) se visualiza los meses y en el eje (y) el consumo”, “en el gráfico de barras se puede observar el consumo más exactamente”. Un 75% restante se clasifican en el grupo D, establecen la equivalencia entre los dos gráficos estadísticos y su lenguaje natural; algunos argumentan que “el gráfico A muestra la frecuencia del consumo mensual. El gráfico B muestra el porcentaje de cada frecuencia o consumo por mes. Ambos gráficos reflejan la información sobre el consumo trimestral”. Otros profesores realizan los cálculos respectivos del consumo de la vivienda en cada mes.

En la tabla 2 se presenta una síntesis de las configuraciones activadas por el grupo de los 20 profesores frente a la tarea de interpretación y equivalencia de gráficos estadísticos. La siguiente tabla contiene la configuración activada en cada grupo, el número de profesores que se ubican en cada grupo, un ejemplo de argumento dado por el profesor y una evidencia que refleja el tipo de configuración.

GRUPO	EJEMPLO DE ARGUMENTO	CONFIGURACIÓN COGNITIVA ACTIVADA POR LOS PROFESORES
Grupo B (5 profesores)	Porque el gráfico de barras es más claro para entender qué tanto se ha consumido, si disminuye o aumento.	Elementos que fueron activadas en la configuración cognitiva que agrupa en el grupo B las interpretaciones realizadas por los profesores: <ol style="list-style-type: none"> Lenguaje y conceptos: <ul style="list-style-type: none"> ✓ <u>Lenguaje natural</u> ✓ <u>Gráfico de barras</u> ✓ <u>Frecuencia absoluta</u> ✓ <u>Frecuencia acumulada</u> ✓ <u>Variable estadística</u> Representaciones: Las dadas en la situación (<u>Gráfico de barras</u> y gráfico de sectores) Procedimientos y Acciones: <ul style="list-style-type: none"> ✓ <u>Interpretación de gráficos de barras.</u> Proposiciones y propiedades: <ul style="list-style-type: none"> ✓ <u>Aditiva: Las partes conforman el todo.</u> ✓ <u>Las frecuencias absolutas forman la frecuencia acumulada.</u> Argumentaciones: <u>El gráfico de barras permite visualizar el comportamiento de los datos.</u>
EVIDENCIA		
Justifique la respuesta: 		
Figura8. Evidencia. El grafico A representa la información dada el enunciado de la tarea		

<p>Grupo D (15 profesores)</p>	<p>El gráfico A muestra la frecuencia del consumo mensual gráfico B muestra el porcentaje de cada frecuencia o consumo por mes. Ambos gráficos reflejan el consumo mensual.</p>	<p>Elementos que fueron activadas en la configuración cognitiva que agrupa en el grupo D las interpretaciones realizadas por los profesores</p> <p>1. Lenguaje y conceptos:</p> <ul style="list-style-type: none"> ✓ <u>Lenguaje natural</u> ✓ <u>Gráfico de barras</u> ✓ <u>Gráfico de sectores</u> ✓ <u>Frecuencia absoluta</u> ✓ <u>Frecuencia acumulada</u> ✓ <u>Variable estadística</u> ✓ <u>Porcentajes</u> ✓ <u>Círculo</u> <p>1. Representaciones: Las dadas en la situación (<u>Gráfico de barras</u> y gráfico de sectores)</p> <p>2. Procedimientos y Acciones:</p> <ul style="list-style-type: none"> ✓ <u>Interpretación de gráficos de barras.</u> ✓ <u>Interpretación de gráficos de sectores.</u> ✓ <u>Cálculo de porcentajes</u> <p>3. Proposiciones y propiedades:</p> <ul style="list-style-type: none"> ✓ <u>Aditiva: Las partes conforman el todo.</u> ✓ <u>Las frecuencias absolutas forman la frecuencia acumulada.</u> ✓ <u>A cada sector del gráfico le corresponde un área y la suma de todas las áreas el total del círculo.</u> <p>4. Argumentaciones: El gráfico A muestra los valores en m^3 y el gráfico B muestran los valores en porcentajes</p>
------------------------------------	---	--

EVIDENCIA

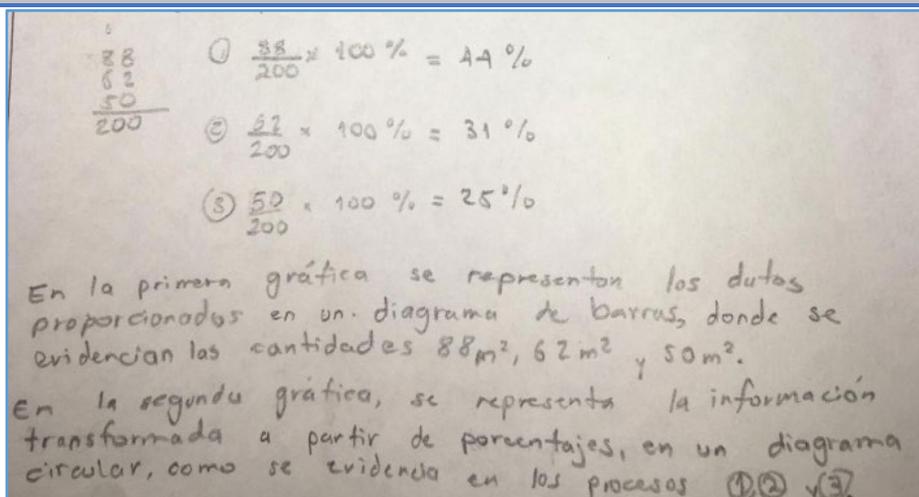


Figura 9. Evidencia. Realiza los cálculos del consumo de la vivienda en cada uno de los meses del último trimestre. El gráfico A y B representa la información misma información.

Tabla 2. Rejilla de configuraciones activadas por el grupo de 20 profesores. Tarea del consumo de agua trimestral.

Los resultados obtenidos permitieron evidenciar que este tipo de tareas, donde los profesores podían realizar una comparación de los porcentajes con los datos dados en el enunciado y establecer relaciones, sin tener que realizar los cálculos de estos de manera explícita, resultan más sencillas que aquella en la que se exigía que calcularan los porcentajes respectivos para establecer la equivalencia entre los gráficos. Así mismo, una gran parte de los profesores logran leer dentro de los datos (Nivel 2, Curcio, 1987) puesto que para hacer una lectura del gráfico B requería que

establecieran la relación con cada uno de los porcentajes o realizaran los cálculos, aspecto que no se encuentra de manera explícita en la situación. Así mismo, los resultados permiten verificar que el cálculo de porcentajes o su interpretación, cuando se requiera un trabajo con números decimales, incide para establecer o no la equivalencia entre lenguaje natural, lenguaje gráfico de sectores y de barras. Esto se puede corroborar precisamente con la modificación que se realizó a la situación, en el cual se trabajó con porcentajes que no exigían realizar los cálculos y tampoco debían realizar ningún tipo de redondeo, modificación que posibilitó que gran parte de los profesores establecieran la equivalencia.

5. Consideraciones finales

El trabajo desarrollado brinda resultados sobre la interpretación de gráficos estadísticos y específicamente sobre la posibilidad de reconocer la equivalencia de estos gráficos entendida como la capacidad de los sujetos para identificar la misma información por medio de diferentes representaciones (contextual). Se corroboran planteamientos de Batanero et al. (2010) según los cuales la construcción e interpretación de gráficos estadísticos es una tarea compleja, por elemental que sea el diagrama, debido a la complejidad en el lenguaje utilizado. En la tarea propuesta, aunque el gráfico de barras es considerado un diagrama elemental en su interpretación requiere que los sujetos comprendan aspectos en su construcción como las variables de los ejes, frecuencia relativa, frecuencia absoluta, escalas, etc. Frente a los resultados obtenidos en la primera tarea gran parte de los profesores se inclinaron por el gráfico A puesto que les permitía establecer una correspondencia entre el tamaño de las barras con la frecuencia relativa que posibilitaba visualizar la variabilidad del consumo e identificar la magnitud metros cúbicos y la frecuencia absoluta (total de consumo).

Aunque los dos gráficos son contextualmente equivalentes, debido a que representan la misma información, su interpretación y construcción requiere que los sujetos pongan en juego otros objetos matemáticos y procedimientos, por ejemplo, en el gráfico de sectores se debe establecer la amplitud del sector proporcional a la frecuencia, calcular e interpretar porcentajes, etc. Al comparar el gráfico de barras con el gráfico de sectores, este último reviste de una mayor complejidad semiótica, por lo cual gran parte de los profesores no admitieron que el gráfico B expresaba el consumo de la vivienda en el último trimestre, puesto que, admitir que el gráfico B representaba la información de consumo, implicaba conocer aspectos de su construcción como: calcular el ángulo de cada uno de los sectores (meses del último trimestre del año) y calcular e interpretar porcentajes para verificar que estos valores correspondían con el consumo de cada mes, es decir una actividad semiótica de mayor complejidad que la anterior.

Este trabajo parte del supuesto que los elementos sintácticos y semánticos son parte constitutiva de la equivalencia y se requiere la articulación entre dichos elementos (tarea compleja para interpretar algunos gráficos estadísticos). La conexión de lo semántico y lo sintáctico, en la que nos hemos centrado en el presente artículo, es analizada por medio de una tarea que requiere, por una parte, la

interpretación de una situación (en lenguaje natural) para transformarla al lenguaje gráfico de barras y, por otra, del lenguaje gráfico de barras al lenguaje gráfico de sectores o del lenguaje natural al gráfico de sectores (conversión). Con respecto a las posibilidades planteadas por Chalé-Can et al. (2017), relacionadas con estos dos tipos de equivalencias y su posible articulación, se encontró: 1) solo reconocen la equivalencia semántica: una gran parte de los profesores articulan el gráfico de barras con el enunciado dado en la situación y establecen la correspondencia o coincidencia entre los dos lenguajes, 2) solo reconocen la equivalencia sintáctica: el cálculo e interpretación de porcentajes o el desconocimiento de la manera de calcular porcentajes impide que los profesores establezcan la equivalencia entre el gráfico de sectores y el enunciado natural, y 3) son capaces de articular los dos tipos de equivalencia: un número reducido de profesores establecen dicha equivalencia articulando los aspectos semánticos y sintácticos; trabajar uno de los dos aspectos (semántico-sintáctico) hace que no se admita la equivalencia entre gráficos estadísticos. Los resultados de este trabajo, en el contexto de gráficos estadísticos, coinciden con los obtenidos por Chalé-Can et al. (2017) en el contexto de expresiones algebraicas, quienes reportan que para admitir la equivalencia de expresiones se requiere de la articulación de los aspectos sintáctico y semántico; en particular, en el caso de la tarea abordada en este estudio, para admitir la equivalencia contextual entre las tres representaciones, desde lo sintáctico, se requiere que los profesores realicen el cálculo de porcentajes, conozcan elementos en la construcción de los dos gráficos, por ejemplo, el establecimiento de la amplitud del sector proporcional a la frecuencia relativa en el caso del diagrama de sectores y, desde lo semántico, requiere que interpreten porcentajes, frecuencia relativa, frecuencia absoluta, etc., aspectos necesarios para reconocer la equivalencia de gráficos estadísticos. En tal sentido, en los contextos analizados, la articulación de aspectos sintácticos y semánticos resulta fundamental para reconocer la equivalencia de expresiones; pues en los casos en que ésta no se logró, se constituyó en la principal causa de dificultad para aceptar la equivalencia; algunos profesores que no establecieron la equivalencia desconocían cómo calcular los porcentajes o realizaron de manera incorrecta los cálculos requeridos, lo que les impidió establecer la correspondencia entre los gráficos y el enunciado. El diseño de la tarea solo permitió indagar respecto a la equivalencia de gráficos en la interpretación en los niveles iniciales, y queda para próximos estudios abarcar niveles superiores en cuanto a la interpretación de gráficos estadísticos y a la equivalencia entre representaciones que hacen uso de gráficos diferentes a los abordados en este estudio.

Bibliografía

- Arteaga, P., Batanero, C. J. y Contreras, J. M. (2011). Sentido numérico y gráficos estadísticos en la formación de profesores. *Publicaciones*, 41, 33-49.
- Batanero, C., Arteaga, P. y Ruiz, B. (2010). Análisis de la complejidad semiótica de los gráficos producidos por futuros profesores de educación primaria en una

- tarea de comparación de dos variables estadísticas. *Enseñanza de las Ciencias*, 28(1), 141-154.
- Chalé –Can, S (2018). *Aspectos sintácticos y semánticos de la equivalencia de expresiones algebraicas en secuencias visuales* (Tesis doctoral). CINVESTAV-IPN. México.
- Chalé-Can, S. Font, V. y Acuña, C. (2017). La semántica y la sintáctica en la equivalencia de expresiones algebraicas. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Disponible en <http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos/chale-can.pdf>.
- Curcio, F. R. (1987). Comprehension of mathematical relationships expressed in graphs. *Journal for Research in Mathematics Education* 18 (5), 382-393.
- Duval, R. (2002). L'apprentissage de l'algebre et le probleme cognitif de la designation des objets. Drouhard, J. & Maure, M. (Eds.). *Actes des SFIDA 13-16, Vol. XIII* (pp. 67-94). Nice: IREM de Nice.
- Font, V, Godino, J. D. y D'Amore, B. (2007). An ontosemiotic approach to representations in mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, 27 (2), 3-9.
- Gea, M.M., Arteaga, P. y Cañadas, G.R. (2017). Interpretación de gráficos estadísticos por futuros profesores de Educación Secundaria. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 12, 19-37.
- Godino, J. D. (2002). Studying the median: A framework to analyse instructional processes in Statistics Education. In B. Phillips (Ed.), *Proceedings of the ICOTS-6*. CDROM. IASE.
- Godino, J. D., Castro, W., Aké, L. y Wilhelmi, M. D. (2012). Naturaleza del razonamiento algebraico elemental. *Boletim de Educação Matemática – BOLEMA*, 26 (42b), 483-512.
- Goetz, J.P. y Lecompte, M.D. (1988). *Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa*. Madrid: Morata.
- Kieran, C. y Saldanha, L. (2005). Computer algebra systems (CAS) as a tool for coaxing the emergence of reasoning about equivalence of algebraic expressions. En H. L. Chick y J. L. Vincent (Eds.) *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 3* (pp. 193-200). Melbourne: PME.
- Kieran, C., Boileau, A., Tanguay, D. y Drijvers, P. (2013). Desing researches' documentational genesis in a study on equivalence of algebraic expressions. *The International Journal on Mathematics Education*, 45, 1045-1056.
- Mejías, C. (2019). *Evaluación de los conocimientos para la enseñanza del álgebra en profesores en ejercicio de educación primaria* (Tesis doctoral). Universidad de Girona. España.

- Ministerio de Educación Nacional (1998). *Lineamientos curriculares para el área de matemáticas*. Bogotá, Colombia: MEN.
- Radford, L. (2004). Syntax and Meaning. In M. J. Høines and A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28 Conference of the international group for the psychology of mathematics education (PME 28), Vol. 1* (pp. 161-166). Norway: Bergen University College.
- Rodríguez, G. Gil, J. y García, E. (1996). *Métodos de investigación cualitativa*. Málaga: Aljibe.
- Rondero, C. y Font, V. (2015). Articulación de la complejidad matemática de la media aritmética. *Enseñanza de las Ciencias*, 33 (2), 29-49.
- Rojas, P. (2012). *Articulación y cambios de sentido en situaciones de tratamiento de representaciones simbólicas de objetos matemáticos* (Tesis doctoral). Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá. Disponible en: <http://www.dm.unibo.it/rsddm/it/Phd/Rojas%20Garzon/Tesis%20Pedro%20Rojas.pdf>.
- Sanoja, J. E., y Ortiz, J. (2013). El conocimiento didáctico del contenido estadístico del maestro. En: A. Salcedo (Ed.), *Educación Estadística en América Latina: Tendencias y Perspectivas* (pp. 153–166). Caracas: Universidad Central de Venezuela. Disponible en: <http://saber.ucv.ve/jspui/handle/123456789/4666>.
- Solares, A. y Kieran, C. (2013). Articulating syntactic and numeric perspectives on equivalence: the case of rational expressions. *Educational Studies in Mathematics*, 42, 115-148.

Autores:

Mejía Osorio Gladys. Licenciada en E.B.E. Matemáticas (Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia), Magíster en Docencia de las Matemáticas (Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia). Estudiante del Doctorado Interinstitucional en Educación, énfasis Educación Matemática, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá. Residente en Bogotá- Colombia. E-mail: gladys6m@hotmail.com
[0000-0002-5759-5688](tel:0000-0002-5759-5688)

Rojas Garzón Pedro Javier Primer. Licenciado en Matemáticas, Magíster Scientiae-Matemáticas y Doctor en Educación. Profesor titular de la Facultad de Ciencias y Educación de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá-Colombia, correo-e: pjrojasg@udistrital.edu.co
[0000-0002-9694-4609](tel:0000-0002-9694-4609)