

Explorando cuerpos geométricos, áreas y volúmenes en educación secundaria: un viaje matemático

Explorar Corpos geométricos, áreas e volumes no ensino secundário: uma viagem matemática

Estefanía Martín-Camacho, Silvia-Natividad Moral-Sánchez

Fecha de recepción: 02-08-2024
Fecha de aceptación: 11-05-2025

Resumen	En este trabajo se muestra una situación de aprendizaje llevada a cabo en educación secundaria con alumnado de 13 a 14 años sobre figuras tridimensionales y medidas de áreas y volúmenes. Dicha propuesta trata de incentivar el sentido espacial en el alumnado con la utilización de materiales manipulativos y TIC realizando un proyecto sobre monumentos. Se analizan las evidencias de los estudiantes respecto a los errores y dificultades cometidos. Los resultados indican que una reflexión sobre dichos errores lleva a un aprendizaje significativo y que este tipo de propuestas promueven la motivación y el aprendizaje de los conceptos geométricos tratados. Palabras clave: cuerpos geométricos, áreas y volúmenes, didáctica de la geometría, medida, motivación.
Abstract	This work shows a learning situation carried out in secondary education with students aged 13-14 years old about three-dimensional figures and measurements of areas and volumes. This proposal tries to encourage the students' spatial sense with the use of manipulative materials and ICT by carrying out a project on monuments. The students' evidences regarding the errors and difficulties committed are analyzed. The results indicate that a reflection on these errors leads to significant learning and that this type of proposal promotes motivation and learning of the geometric concepts dealt with. Keywords: geometric bodies, areas and volumes, geometry didactics, measurement, motivation.
Resumo	Este trabalho mostra uma situação de aprendizagem realizada no ensino secundário com alunos de 13-14 anos de idade sobre figuras tridimensionais e medidas de áreas e volumes. Esta proposta pretende estimular o sentido espacial dos alunos com recurso a materiais manipulativos e às TIC, através da realização de um projeto sobre monumentos. São analisadas as evidências de erros e dificuldades dos alunos. Os resultados indicam que a reflexão sobre esses erros conduz a uma aprendizagem significativa e que este tipo de proposta promove a motivação e a aprendizagem dos conceitos geométricos abordados.

Palavras-chave: corpos geométricos, áreas e volumes, didática da geometria, medição, motivação.
--

1. Introducción

En este trabajo, enmarcado dentro de una perspectiva teórica geométrica, se expone el diseño de una situación de aprendizaje donde se pone de manifiesto habilidades sobre cuerpos geométricos y medidas de área y volumen, implementada en el segundo curso de educación secundaria obligatoria con alumnado de 13 a 14 años en un centro de la provincia de Málaga (España). Dicha situación de aprendizaje se desarrolla durante el segundo ciclo de una metodología de investigación-acción (Kemmis y McTaggart, 1988), en donde se trata de analizar las evidencias de los estudiantes respecto a los errores y dificultades encontradas en dicha propuesta (Moral-Sánchez et al., 2021). De Freitas y Sinclair (2012), ya llamaban la atención sobre uno de los principales obstáculos, que aún hoy se mantienen en el aula, y que se encuentra el alumnado para representar las ideas geométricas, al existir un vocabulario visual muy complejo, con muchas convenciones y símbolos que se deben comprender, si se espera que el alumnado le dé sentido. Así, Calderón Atariguana y Castro Salazar (2021) señalan la importancia de que el conocimiento posea relación con situaciones de la vida real y con el manejo de material manipulativo, de manera que con el análisis de este tipo de tareas se pueda mejorar y lograr a que el aprendizaje del alumnado sea significativo.

A continuación, se presentará el marco teórico tras el cual se expondrá el contexto, los aspectos metodológicos utilizados y el diseño de la situación de aprendizaje de geometría creada. Se analizarán y discutirán algunas de las evidencias de aprendizaje del alumnado derivadas de la intervención en el aula como parte de la metodología de investigación-acción propuesta, finalizando con las conclusiones del mismo.

2. Fundamentación teórica

Es necesario establecer en primer lugar un marco contextualizador de la profesión docente en matemáticas ya que esta investigación-acción se llevó a cabo en el contexto de prácticas del Master de Profesorado de Educación Secundaria en la especialidad de matemáticas de la Universidad de Málaga. A continuación, se hace una exposición más detallada sobre el marco geométrico en el que se desarrolla la propuesta y el tipo de metodología didáctica utilizada.

La educación matemática es el conjunto de procesos y habilidades de aprendizaje que desarrolla cada individuo y que puede poner en práctica mediante modelizaciones en el mundo real (Font y Rodríguez-Nieto, 2024). Godino et al. (2004) afirman que las Matemáticas son fundamentales para desenvolverse en la vida diaria ya que los ciudadanos necesitan desarrollar habilidades numéricas, geométricas y de medición para ir afrontando desafíos. En esta línea, Rodríguez Muñiz (2023) comenta que el aprendizaje de las Matemáticas proporciona herramientas que contribuyen al avance de otras disciplinas, donde se fomenta la creatividad y el desarrollo de un pensamiento que pueda hacer posible abordar desafíos inéditos buscando resolver problemas.

Además, los cambios que se han producido en la sociedad actual obligan a que se deba presentar de un nuevo modo la transmisión de los saberes básicos,

siendo la aplicación de metodologías activas la metodología didáctica indicada para motivar al alumnado (Moral-Sánchez et al., 2022). En esta línea Fortea Bagán (2019) añade que no hay una metodología perfecta aplicable a cualquier contexto educativo y expresa que quizás una combinación de diversas metodologías didácticas es la opción más adecuada. Cuando únicamente se sigue la metodología tradicional, se produce en el alumnado una pérdida de reflexión sobre lo que se intenta resolver, lo cual genera desmotivación y desinterés (Tapia Reyes y Murillo Antón, 2020). Además, Revelo Manosalvas y Yáñez Ronquillo (2023) aluden que cuando se demuestra la relevancia práctica de las Matemáticas en la vida cotidiana integrada en el aspecto didáctico metodológico, se promueve un aprendizaje significativo al quedar asociado a una utilidad concreta, contribuyendo a la motivación del alumnado.

Así, Shiguay Guizado et al. (2024) comentan que hay que preparar al estudiantado para aplicar el conocimiento y las habilidades matemáticas en situaciones prácticas y contextualizadas, ya que el currículo educativo internacional resalta el empleo de las Matemáticas en el mundo real. Por tanto, los educadores deben contar con los conocimientos y habilidades necesarias para diseñar estrategias y propuestas eficaces que promuevan el razonamiento matemático y la argumentación de la resolución de problemas partiendo del análisis de los errores y dificultades de la propia práctica (Camargo et al., 2023). De este modo, cuando el alumnado se enfrenta a situaciones reales, se consolida un conocimiento significativo, contextualizado, transferible y funcional, al tiempo que se fomenta su habilidad para aplicar lo aprendido (Romero Ariza, 2010).

Poniendo el foco en la geometría, se puede decir que con ella el ser humano ha ido percibiendo las formas que se encuentran en el espacio que lo rodea a través de los sentidos permitiéndole describir la realidad y pudiendo transmitir su percepción (Elbas y Ramírez-Uclés, 2025). En relación con lo anterior, Gamboa Araya y Ballesteros Alfaro (2010) aluden que, para enseñar geometría, se debe permitir que el estudiante sea el protagonista de su propio aprendizaje, involucrando actividades que lo animen a explorar, descubrir y sacar conclusiones, fomentando así un aprendizaje constructivista.

Según Guillén (2010) el profesorado que comprenda la geometría correctamente puede destacar en sus clases un aspecto creativo en los diseños, ya que la considera como una introducción a la práctica de las Matemáticas. Asimismo, enfocará la enseñanza en el razonamiento lógico necesario para descubrir y clasificar conceptos espaciales, y presentará esta rama como una herramienta útil para modelar la realidad, usando ejemplos de aplicación práctica (Sua et al., 2021).

Por otro lado, desde el punto de vista didáctico, el principio heurístico es útil para adquirir nuevos saberes básicos y conocimientos geométricos (Medina Pérez y Pérez Azahuanche, 2021). El uso, además, de recursos manipulativos facilita la creación de conexiones matemáticas, ayudando al alumnado a alcanzar la abstracción (Romero-García et al., 2023). En relación con esto, Bravo Guerrero (2019) expresa que, aunque se estudien figuras geométricas, para comprenderlas hay que hacer representaciones, para lograr que el estudiantado comprenda las formas y sus relaciones. Por otro lado, Mirta Giarrizzo (2021) señala que los materiales usados para facilitar la enseñanza matemática deben adaptarse no solo a los objetivos específicos establecidos, sino también a los conocimientos de los que parte el alumnado.

De acuerdo con Gutiérrez (2006) y Sua et al. (2021), la visualización espacial se puede concebir como el conjunto de tipos de imágenes, procesos y habilidades que le permiten a los estudiantes generar, analizar, modificar y transmitir información visual relacionada con objetos reales, modelos y conceptos. Además, la geometría puede ser vista como el punto de partida de la visualización en el contexto matemático y es un campo ideal para fortalecer tanto los saberes básicos como las habilidades espaciales (Ramírez-Uclés et al., 2013, Moral-Sánchez et al., 2023). En este aspecto al usar metodologías activas al proponer diseños de aprendizaje que englobaban la visualización geométrica se fomenta el razonamiento y la justificación matemática (Gamboa Araya y Ballesteros Alfaro, 2010; Bravo Guerrero et al., 2017).

Por otro lado, las metodologías activas, incluyendo los procesos de gamificación, se basan en la teoría constructivista del aprendizaje, centrándose en la motivación y en el proceso de aprendizaje del alumnado (Gil Quintana y Prieto Jurado, 2019). De hecho, el juego puede entenderse como una actividad lúdica organizada con el propósito de alcanzar fines específicos, cuya meta es facilitar un aprendizaje efectivo mediante la diversión (Escarbajal Frutos y Martínez Galera, 2023). Esta autora afirma, además, que se puede usar en cualquier etapa educativa, pero no es muy utilizado en secundaria porque los docentes desconocen sus ventajas. Cuando una persona juega, se involucra completamente en la acción, utilizando al máximo sus capacidades intelectuales, lo que le permite aprender de forma más rápida y efectiva (Higueras-Rodríguez y Molina Ruiz, 2020). De igual manera, Zabala Vargas et al. (2020) comentan que el aprendizaje basado en juegos (ABJ) motiva al estudiantado mientras aprende, facilitándole la adquisición de saberes básicos y habilidades en matemáticas a través de desafíos y problemas, de esta forma, el alumnado no teme cometer errores. Por otro lado, León Loaiza y Sánchez (2023) aluden que el aprendizaje colaborativo, mejora la comprensión matemática y fomenta un aprendizaje entre iguales, promoviendo la escucha activa en el estudiantado. En este sentido, Vergara Ramírez y Zabalza (2021) expresan que sin aprender no se puede actuar, y que cuando se actúa, se aprende. Por su parte, Castro-Valle (2022) comenta que con el aprendizaje basado en proyectos (ABP) se fomenta la investigación, el análisis, la selección, la construcción, el debate y la rectificación. Con este aprendizaje, el alumnado asume un papel activo creando proyectos que pueden contextualizarse, promoviendo además una dinámica participativa en la que los estudiantes deben tomar decisiones (Rodríguez Sandoval et al., 2010). En esta línea, Trujillo (2015) afirma que con el ABP se cambia la mentalidad de “aprender es memorizar” a “aprender es hacer”, y nos alejamos de un aprendizaje repetitivo y sin análisis crítico, avanzando hacia uno más activo y colaborativo que desarrolle una serie de habilidades y competencias.

Por otra parte, el ABP y las TIC son buenas estrategias para aprender y adquirir conceptos matemáticos (Vargas Vargas et al., 2020). Hay estudios que demuestran que el ABP favorece la adquisición de las competencias digitales matemáticas por parte del estudiantado y, además, las calificaciones del alumnado tienden a aumentar (Diego-Mantecón et al., 2021). En las metodologías activas y dentro de la “filosofía Maker” en educación matemática, la modelización y construcción de maquetas facilitan la proyección de ideas a escala, y con ellas se crea un objeto fácil de visualizar y comprender desde la perspectiva del alumnado, por lo que son un recurso didáctico en el proceso de enseñanza-aprendizaje del estudiantado en Matemáticas (Cagua Gómez, 2022).

Por último, Pacheco-Muñoz et al. (2023) indican que el profesorado debe estar también atento a cómo piensan los estudiantes y cómo van construyendo el conocimiento mientras están realizando distintas actividades, anticipándose o aprendiendo de las dificultades o a los errores que puedan surgir en el proceso de aprendizaje.

3. Contexto

La situación de aprendizaje que se detalla a continuación se realizó en un centro educativo de enseñanza secundaria de la provincia de Málaga (España). Tuvo lugar concretamente en un grupo de estudiantes de 13 a 14 años que contaba con 27 alumnas y alumnos. El tema trataba sobre las figuras tridimensionales, así como el cálculo de área y el volumen de éstas. En esta línea, la Orden de 30 de mayo de 2023 y el Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, de la legislación española nos indican los saberes básicos y las competencias que se pueden alcanzar.

El espacio elegido para desarrollar dicha situación de aprendizaje será el aula. Las docentes-investigadoras formaron seis grupos heterogéneos de estudiantes atendiendo a la diversidad, tanto académica como de género. Concretamente eran tres grupos de cuatro personas y otros tres de cinco personas. Estos grupos fueron los mismos a lo largo de todas las sesiones, y cada sesión duró una hora. La intervención didáctica se desarrolló en las diez sesiones que se describen a continuación.

Respecto a la metodología didáctica utilizada se centró en una combinación de metodologías activas, en la que se fue utilizando a lo largo de la intervención, y bajo el paraguas de un ABP, el ABJ y el aprendizaje colaborativo, combinados con el uso de herramientas TIC y recursos manipulativos.

Así siguiendo el enfoque investigativo de la metodología de investigación-acción (Kemmis y McTaggart, 1988), en este documento se expone el segundo de esos ciclos. Respecto a los instrumentos de recogida de evidencias y tal y como nos dicta este tipo de metodología se utilizaron las evidencias del portafolio del alumnado y el diario de campo de las docentes-investigadoras para su posterior análisis.

4. Situación de aprendizaje sobre figuras tridimensionales

En la situación de aprendizaje diseñada, que parte de las premisas didácticas desarrolladas en el marco teórico, se trataron las figuras tridimensionales y la medida de área y volumen. Se vieron, dentro de los cuerpos geométricos, varios poliedros (el prisma y la pirámide) y cuerpos de revolución (la esfera, el cilindro y el cono). Se calculó el área y el volumen de cada una de ellas, donde había que usar algunos conceptos previos como son el Teorema de Pitágoras, las unidades de medida, las figuras planas y el cálculo de perímetros y de áreas de figuras planas, con una base en las experiencias diseñadas por Moral-Sánchez et al. (2022, 2023). Todos estos conceptos y teoremas se encuentran relacionados tal y como se muestra en el mapa conceptual de la figura 1.

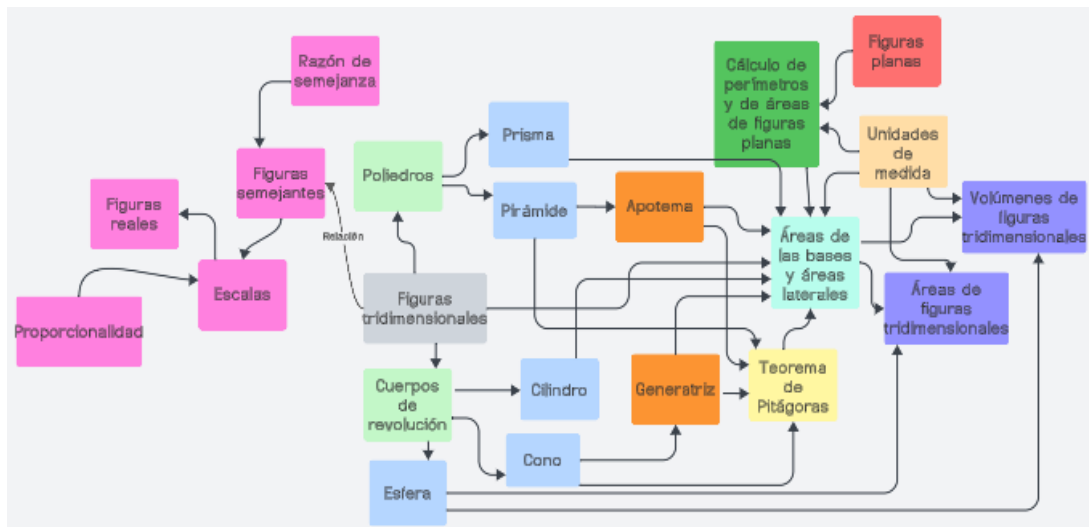


Figura 1. Mapa conceptual. Fuente: elaboración propia basada en la Orden y Real Decreto de la legislación (2024).

A continuación, en la figura 2 se muestra un esquema del diseño de dicha situación de aprendizaje y las 10 sesiones que la forman.

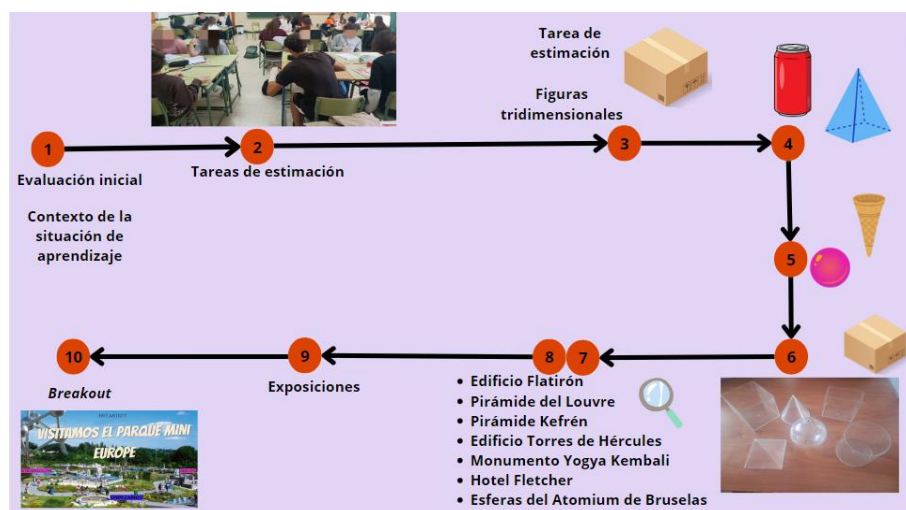


Figura 2. Desarrollo de la situación de aprendizaje. Fuente: elaboración propia (2024).

4.1. Sesión 1

En esta primera sesión se llevó a cabo una evaluación inicial. Según Trelles Zambrano et al. (2017), se debe realizar una evaluación inicial para determinar el nivel académico de los estudiantes. Moral-Sánchez et al. (2021) señalan además que esta evaluación es el punto de partida para iniciar un proceso de aprendizaje activo.

El alumnado debe aprender Matemáticas comprendiéndola, construyendo nuevos saberes básicos a partir de los que ya tiene (Godino et al., 2004), siendo capaz de aplicar posteriormente conceptos, procedimientos y procesos matemáticos. De hecho, Bueno y Forés (2024) aluden que uno de los factores importantes que afecta al aprendizaje es el conocimiento previo del estudiante, por lo que hay que descubrir este conocimiento y enseñar en consecuencia.

Las preguntas de dicha evaluación sobre los contenidos de la situación e aprendizaje se realizaron de forma individual y por escrito para conseguir que todo el alumnado contestase y así detectar errores para poder corregirlos a tiempo. Para ello se emplearon unos 45 minutos. Posteriormente, se explicó el contexto en el que se iba a desarrollar la situación de aprendizaje en el contexto de un ABP con un viaje a Europa en el que conocerían diferentes monumentos y edificios emblemáticos de las ciudades que se iban a visitar.

4.2. Sesión 2

Antes de proceder a estudiar el área es importante manejar la estimación y las aproximaciones para posteriormente saber utilizar las unidades de medida (Rojas y Albarracín, 2024). Para poner al alumnado en contexto con un dato histórico se comentó que, durante la Revolución francesa, había ciertos conflictos debidos a las unidades de medida (Alder, 2003), ya que se medía utilizando diferentes unidades y no se obtenían los mismos resultados. El objetivo de esta sesión era, por tanto, que los estudiantes aprendiesen a estimar utilizando diferentes unidades de medida.

Para alcanzar dicho objetivo se realizaron las siguientes tareas:

- **Tarea 1:** Vamos a usar palmos como unidad de medida para medir las mesas de la clase. Anotad de forma individual el número de palmos que habéis obtenido a la hora de medir la mesa, permitiéndose incluir expresiones adicionales como “casi un palmo”, “medio palmo” o similares.

Después debéis comparar de forma grupal la cantidad de palmos obtenidos por cada miembro del grupo, comentando en el papel el posible motivo de tener distintos números de palmos.

- **Tarea 2:** Usando la regla, medid vuestro propio palmo, y posteriormente, debéis usar los datos obtenidos en la tabla anterior y transformarlos a centímetros.

¿Habéis obtenido las mismas medidas de la mesa? Si no son las mismas, explicad por qué creéis que sucede esto. ¿Os animáis a hacer una aproximación de la superficie de la mesa?

- **Tarea 3:** Debéis medir aproximadamente la clase utilizando pies como unidad de medida. Cada miembro del grupo debe anotar el número de pies obtenido y luego tiene que convertirlo a centímetros.

Entonces, ¿cuánto medirá aproximadamente el suelo de la clase?

- **Tarea 4:** Identificad a ojo un metro cuadrado en la clase y marcadlo con la cinta adhesiva.

A continuación, se muestran imágenes de la sesión 2 en la figura 3.



Figura 3. Alumnado realizando las tareas.

4.3. Sesión 3

Dicha sesión comenzó con la realización de la tarea siguiente:

- **Tarea 5:** Ahora debéis medir aproximadamente la clase utilizando los metros. A la vista de los resultados obtenidos, ¿cuánto mide entonces el suelo de la clase? ¿Os ha dado lo mismo que antes? ¿Por qué?

Después, se comentó que en nuestro viaje íbamos a visitar monumentos que tienen forma de figuras tridimensionales como las que se mostraron y aparecen en la figura 4.



Figura 4. Caja de figuras tridimensionales de madera.

Posteriormente, se procedió a estudiar las características del prisma y su área. Para ello, la docente mostró una caja de cartón en la que se guardan regalos de recuerdo en nuestro viaje y preguntó por monumentos con forma de prisma, ya que en España tenemos por ejemplo las torres Kio de Madrid. Esta pregunta se realizó en las distintas sesiones con las distintas figuras tridimensionales.

Tal y como expresa Guillén (2010), en geometría, se pueden usar plantillas de desarrollos planos para la comprensión de ciertas figuras tridimensionales. ¿Pero cómo se diseñaron dichos monumentos y cuánto material hizo falta para construirlos? Para mostrar esto, se cortó una caja de cartón por las aristas y se relacionó lo obtenido con los desarrollos planos de los prismas como se observa en la figura 5. Se preguntó si había alguna similitud entre las caras de la caja y si la base era una cara.



Figura 5. Montaje de distintos prismas.

Se dedujo el área del prisma y se practicó con la siguiente tarea:

- **Tarea 6:** Se plantea el siguiente problema: Lucas va a comprar llaveros y pequeños recuerdos en Ámsterdam para regalárselos a sus amistades. Para que no se le pierda nada, va a meterlos en una caja que llevará encima y que tiene forma de prisma cuadrangular. El lado de la base de dicho prisma mide 9 cm y la altura del prisma mide 8 cm. Si después desea envolver dicha caja con papel de regalo, ¿cuántos m^2 de papel necesitará?

4.4. Sesión 4

En esta cuarta sesión se siguió una dinámica similar a la sesión anterior. La docente se llevó una lata de refresco que tiene forma de cilindro. Se trabajó con el cilindro y con la pirámide. Se repartieron los desarrollos planos y la docente les dijo a los estudiantes que pensaran qué figuras planas constituían las plantillas de los desarrollos planos y si se podía establecer alguna relación entre la fórmula del área del prisma y del cilindro.

Una vez deducidas las fórmulas del área de ambas figuras tridimensionales, se propusieron dos tareas para practicar con el cálculo:

- **Tarea 7:** En Egipto, los turistas suelen pernoctar en tiendas de campaña que tienen forma de pirámide cuadrangular. Si el lado de la base de la pirámide mide 2 m y la altura de cada triángulo que forma la pirámide mide 1.5 m, ¿cuántos m^2 de tela se necesitan para fabricar una tienda de campaña?
- **Tarea 8:** A Julio le gusta mucho la bebida de limón, por lo que probablemente se beberá ese refresco durante el almuerzo de su viaje. Si la lata de refresco tiene un radio de 2.5 cm y la altura es de 11 cm, ¿cuántos cm^2 de aluminio se emplean en la fabricación de una lata?

4.5. Sesión 5

En esta sesión se trabajó con el cono y con la esfera. Para trabajar con el área del cono se modelizó mediante un cucurucho de helado, el cual tiene forma de cono y nos lo podíamos comer durante nuestro viaje.

Se propuso pensar sobre las similitudes y las diferencias de los cilindros y de los conos. Se proporcionaron desarrollos planos del cono para que dedujeran el área de dicha figura, comentando si se podía establecer alguna relación entre el área de la pirámide y la del cono.

Para el área de la esfera, se produjo su deducción usando hilo, tijeras, pegamento y una bola de Tecnopor.

Una vez deducidas dichas áreas, se propusieron los siguientes problemas:

- **Tarea 9:** Uno de los días de nuestro viaje a Indonesia es el cumpleaños de Hugo. Ese día nos pondremos gorritos de cumpleaños que tienen forma cónica. Si el radio del gorrito de Hugo es de 8 cm y la generatriz es de 25 cm, ¿cuánto cartón se ha necesitado para fabricar dicho gorrito?
- **Tarea 10:** Pepe le comprará a su hermano pequeño un balón de fútbol del Málaga como recuerdo del viaje. Si dicho balón posee un diámetro de 69 cm, ¿cuánto cuero se necesita para construirlo?

4.6. Sesión 6

El objetivo de esta sesión era estudiar los volúmenes de las figuras tridimensionales que se habían estudiado en las sesiones anteriores. Para ello, se comenzó preguntando qué era el volumen y una vez aclarado dicho concepto, la docente le realizó cortes a una caja para que el alumnado comenzase a deducir o a recordar el volumen del prisma.

Se les comentó a los estudiantes que la compañía aérea dentro del contexto del viaje propuesto dejaba llevar pequeños recipientes para meter champú,

perfumes y diferentes líquidos para el viaje, pero que había que llevarlos envasados de forma individual para poder pasar el control de la aduana y el envase debía tener unas dimensiones limitadas. Si por ejemplo se quiere llevar aceite corporal, ¿en qué figura tridimensional de las que aparecen en la figura 4 nos cabe más?

Para deducir esto, los estudiantes hicieron uso de los cuerpos rellenables de metacrilato y del aceite corporal como se observa en la figura 6. Además, estos cuerpos poseían la misma altura entre sí, la cual coincidía con el diámetro de la esfera. Por otra parte, la pirámide y el prisma eran cuadrangulares, y el lado de sus bases medía lo mismo que el diámetro de la esfera, del cono y del cilindro.



Figura 6. Deducción del volumen de la esfera.

4.7. Sesiones 7, 8 y 9

En estas sesiones se propuso un trabajo de investigación sobre el proyecto objeto de esta situación de aprendizaje, que consistía en investigar sobre diferentes monumentos y edificios que íbamos a visitar en nuestro viaje.

De este modo, los estudiantes tenían que investigar sobre cuándo se había construido dicho monumento o edificio, aspectos relevantes sobre él y dónde está situado. También tenían que buscar sus medidas, ya que la finalidad del proyecto era la construcción de una maqueta final de esos monumentos o edificios a escala.

Para realizar dicho proyecto se dedicó aproximadamente la mitad de la séptima sesión y la octava sesión. En la novena sesión realizaron una exposición de unos siete minutos cada grupo, en la que comentaron los aspectos investigados, los cálculos realizados para construir la maqueta a escala, así como el área y el volumen de la maqueta y del monumento o edificio en la realidad.

Los monumentos o edificios que se investigaron fueron el Edificio Flatiron, la Pirámide del Louvre, la Pirámide de Kefrén, el Edificio Torres de Hércules, el monumento Yogya Kembali, el Hotel Fletcher y las esferas del Atomium de Bruselas.

4.8. Sesión 10

En esta última sesión de evaluación final y como forma de motivar a los estudiantes, se realizó un *Breakout* educativo original grupal utilizando siete portátiles. Este constaba de nueve preguntas en las que había que resolver ejercicios sobre perímetros y áreas de figuras planas, y sobre áreas y volúmenes de figuras tridimensionales. Estas preguntas estaban divididas en tres destinos del viaje. Además, si los estudiantes contestaban alguna pregunta mal, se les daba la oportunidad de volver a pensarla y contestarla. El enlace a dicho *Breakout* es el siguiente: <https://encr.pw/Ony6g>

Como la situación de aprendizaje era sobre edificios y monumentos de Europa y se iba a realizar un viaje, se aprovechó que uno de los destinos era Bruselas, donde se iba a visitar también las esferas del Atomium, ya que junto a dichas esferas se encuentra el parque Mini Europe, que posee réplicas de 350 monumentos y edificios de toda Europa a escala 1:25, por lo que el *Breakout* estaba ambientado en ese lugar como aparece reflejado en la figura 2. La misión a la que consistió en resolver desafíos matemáticos para poder abrir tres candados que había puesto un grupo de villanos que quería destruir las réplicas del parque. Para conseguir abrir un candado, los estudiantes tendían que responder correctamente tres preguntas y una vez hecho les salía un número. Por tanto, obtenían tres números en total que eran útiles para conseguir superar la prueba.

5. Resultados

A continuación, se muestran y se analizan algunas evidencias de la situación de aprendizaje implementada.

Los resultados de la evaluación inicial responden a los errores y dificultades usuales mostrados en Moral-Sánchez et al. (2021). Respecto a la sesión 2, en la figura 7 se muestran algunas de las soluciones de los estudiantes en cuanto a la estimación realizada.

Tarea 1:

Vamos a usar palmos como unidad de medida para medir las mesas de la clase. Anotad de forma individual (incluyendo vuestro nombre en la primera columna) el número de palmos que habéis obtenido a la hora de medir la mesa, permitiéndose incluir expresiones adicionales como "casi un palmo", "medio palmo" o similares.

Palmo como unidad de medida	Largo de las mesas	Ancho de las mesas
Estudiante 1: Diana	34	25
Estudiante 2: Diana	35	25
Estudiante 3: Diana	35	25
Estudiante 4: Diana	35	3
Estudiante 5:		

Después de completar la tabla, debéis comparar de forma grupal la cantidad de palmos obtenidos por cada miembro del grupo, comentando en este papel el posible motivo de tener distintos números de palmos.

La diferencia puede ser por el tamaño de nuestras manos.
Cuanto más grande es la mano, menos palmos se necesitan.

Tarea 2:

Usando la regla, medid vuestro propio palmo, y posteriormente, debéis usar los datos obtenidos en la tabla anterior y transformarlos a centímetros.

Nota: si en la tarea previa eras, el estudiante número 1, debes continuar siéndolo en todas las tareas propuestas en esta sesión y en la siguiente.

Centímetros	Largo de las mesas	Ancho de las mesas
Estudiante 1:	63'5	52'5
Estudiante 2:	82'9	58'5
Estudiante 3:	72'2	52'5
Estudiante 4:	73'5	52'5
Estudiante 5:		

¿Habéis obtenido las mismas medidas de la mesa? Si no son las mismas, explicad por qué creéis que sucede esto. ¿Os animáis a hacer una aproximación de la superficie de la mesa?

Como el palmo no es una unidad justa es fácil de equivocarse.
Pues más o menos nos quedamos con esta medida porque es la media de todas las medidas 72'2 y 52'2 cm.
El área sería 3768'84 cm²

Figura 7. Respuestas a las tareas 1 y 2.

Analizando dichas respuestas, en un principio, los estudiantes tomaban las medidas de forma individual, pero cuando debían anotarlas, algunos se dejaban influenciar por las de sus compañeros tal y como se puede observar en la tercera columna de la tabla mostrada en la respuesta a la tarea 2 de la figura 7. Sin embargo, en la tarea 3 se dejó de notar esa influencia, ya que se dieron cuenta que no tenía sentido obtener las mismas medidas de la mesa teniendo distintas longitudes en sus palmos. Además, como se observa en la figura 7 realizaron una estimación cercana del valor real de las mesas en general, las cuales medían 50×70 cm.

Tanto en la tarea 2 como en la tarea 3 como se puede observar en la figura 8 los principales errores vienen derivados de la propia definición del concepto de medida. Relacionado con lo anterior, Gutiérrez y Jaime (2012) ponen énfasis en la realización de ejemplos matemáticos ya que la mayoría de los estudiantes no utiliza la definición de ciertos conceptos a la hora de resolver problemas, pero sí utiliza ciertas propiedades de imágenes conceptuales que tiene interiorizadas, debido principalmente a que no entiende correctamente la definición de los conceptos o la ha olvidado.

Tarea 3:
Debéis medir aproximadamente la clase utilizando pies como unidad de medida. Cada miembro del grupo debe anotar el número de pies obtenido y luego tiene que convertirlo a centímetros.

CLASE	Largo de la clase	Ancho de la clase
Estudiante 1: 	34 pies 816 cm	20 pies 280 cm
Estudiante 2: 	32 pies 845 cm	19 pies 491 cm
Estudiante 3: 	34 pies 816 cm	20 pies 480 cm
Estudiante 4: 	31 pies 899 cm	18 pies 536 cm
Estudiante 5: 	32 pies 864 cm	21 pies 567 cm

Entonces, ¿cuánto medirá aproximadamente el suelo de la clase?

El suelo medirá aproximadamente $845 \text{ cm} \times 491 \text{ cm}$, que es la medida de $1 \text{ m} \times 1 \text{ m}$, ya está entre la mitad de todas las medidas

Tarea 4:
Ahora debéis medir aproximadamente la clase utilizando los metros. A la vista de los resultados obtenidos, ¿cuánto mide entonces el suelo de la clase? ¿Os ha dado lo mismo que antes? ¿Por qué?

Largo: 8'67 m
Ancho: 5'72 m
El suelo mide $44'3904 \text{ m}^2$
Más o menos ha dado lo mismo, pero han sobrado cm^2 , ya que con la aproximación hemos podido poner cm de más

Figura 8. Tareas 3 y 5 de dos grupos de estudiantes.

Además, en la tarea 3, a la hora de realizar las medidas de estimación algunos estudiantes no ponían un pie detrás de otro a la hora de contar el número de pies, sino que dejaban distancia entre ellos o los colocaban en paralelo al dar el paso, por lo que se originaba debate entre ellos en la forma de proceder a la medida, los cuales llegaban finalmente a un consenso con el que consideraban la opción más acertada, aunque no fuese la misma (Rojas y Albarracín, 2024).

Por otro lado, en la tarea 5 como se observa en la figura 8 la mayoría parecen tener clara la conversión de unidades entre centímetros y metros, aunque no especifican los pasos seguidos en dicha conversión.

En las sesiones 3, 4 y 5 se dedujeron las fórmulas del área del prisma, del cilindro, de la pirámide, del cono y de la esfera haciendo uso de los desarrollos planos. Esta forma de aprendizaje con materiales manipulativos les ayudó a la hora de deducir dichas fórmulas, ya que partiendo de los desarrollos planos de las figuras planas que formaban las figuras tridimensionales podían sumar el área de éstas. Este hecho se observa en la evidencia del portafolio de la solución de un grupo de estudiantes mostrada en la figura 9. Sobre esto, Romero-García et al. (2023) afirman que cuando se usan materiales manipulativos integrados con actividades, se les facilita a los estudiantes la comprensión de los algoritmos y de las relaciones matemáticas, haciendo además que se motiven en la realización de la tarea.

Respecto a la sesión 3, el 92% de los estudiantes contestaron correctamente a la pregunta sobre la similitud de las caras de la caja y dedujeron que la base también era una cara. La pregunta relacionada con la similitud del prisma y del cilindro les ayudó para establecer que ambas figuras tenían dos bases. También les ayudó la pregunta relacionada con la similitud del cono y de la pirámide. Sin embargo, hubo dificultades a la hora de deducir el área lateral del cono ya que solo un 30% procedió correctamente a contestarla. En este sentido, Moral-Sánchez et al. (2022) aluden que el profesorado debe explicarle y darle pequeñas pistas al estudiantado cuando lo necesite, para así prevenir la formación de actitudes y creencias negativas hacia las Matemáticas solventando las dificultades derivadas. Como se mostró anteriormente, para practicar con dichas fórmulas, se propusieron las tareas de ejercicios 6, 7, 8, 9 y 10.

La tarea 6, cuyo ejemplo de solución se muestra en la figura 9, evidencia que no se indican siempre las unidades de medida utilizadas, lo cual se repitió en el 74% de soluciones similares. Por tanto, se debe trabajar y recordar que todas las medidas deben llevar sus unidades, ya que si no se trabaja esto se forman futuros docentes que no indican las unidades de medida en los ejercicios (Durán-García y González-Peralta, 2023).

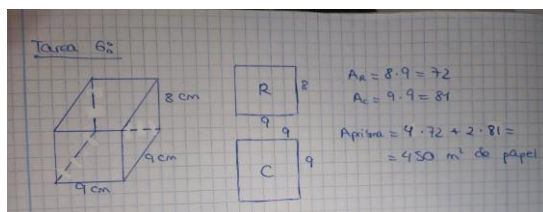


Figura 9. Solución de la tarea 6.

Además, el 41% de los estudiantes mostraron dificultades para dibujar el prisma de la tarea 6, ya que se observó que algunos de los prismas dibujados no eran cuadrangulares. En la figura 9 también se observa que este grupo de estudiantes ha descompuesto el prisma en cuatro rectángulos y en dos cuadrados, pero no explicitan el origen de su respuesta. Este hecho de poner simplemente los números, e incluso no poner ni R ni C se reprodujo en el 39% de las soluciones. Sin embargo, el 61% del alumnado sí indicaban cada uno de los pasos que seguían tal y como se muestra a modo de ejemplo en las soluciones de la figura 10. Además, en la tarea 6 se produjo debate entre algunos estudiantes, ya que había alumnos y alumnas que comenzaban diciendo: “para calcular el área del prisma se suma dos veces el área del rectángulo y otras dos veces el área de la base”. Esto podría ser una muestra de dificultades en el manejo de las habilidades visoespaciales según Ramírez-Uclés (2013).

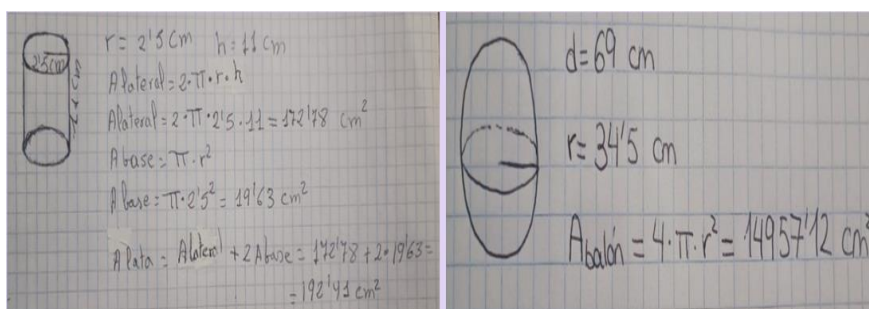


Figura 10. Tareas 8 y 10 de dos grupos de estudiantes.

Tal y como se ha descrito anteriormente, los estudiantes dedujeron los volúmenes de las figuras tridimensionales haciendo uso de los cuerpos rellenables de metacrilato y de aceite corporal. Una vez deducidos estos, los estudiantes midieron con una regla dichos cuerpos rellenables tal y como se muestra en la figura 11 para calcular el volumen real de cada uno de ellos.



Figura 11. Medidas del prisma.

En las sesiones 7,8 y 9 se realizó el trabajo de investigación que acababa con la construcción de una maqueta. De hecho, Alsina et al. (1987) destacan la importancia de desarrollar modelos manipulativos que permitan la visualización de las figuras geométricas, así como la identificación de sus propiedades.

Los estudiantes buscaron la información requerida en internet, donde en la exposición mostraron sus maquetas, explicaron los cálculos realizados para construir la maqueta, el área y el volumen de dichos monumentos y edificios y algunos de los aspectos investigados, como el número de plantas del edificio Flatirón y la terraza con la que cuenta el hotel Fletcher.

Con la construcción de dichas maquetas se pretende paliar los errores en las destrezas de visualización espacial del alumnado (Moral-Sánchez et al., 2023), tales como:

- Carecer de la habilidad para dibujar representaciones espaciales o de la habilidad para manipular de manera física o mental las figuras geométricas.
- Carecer de la capacidad de visualización espacial, ya que algunos estudiantes no son capaces de asociar representaciones planas con figuras tridimensionales.

En la última sesión se realizó el *Breakout*, donde el alumnado se mostró motivado al poder realizarlo de forma digital con los portátiles.

En la figura 12 se muestran las respuestas del primer destino del viaje programado para el *Breakout* de uno de los grupos de estudiantes, en la que se observa un error ya que en la pregunta 2 utilizaron las medidas del diámetro para calcular el área del círculo, hecho que ocurrió también en el 56% de los casos. Además, en general esos mismos estudiantes no escriben las unidades del área de la base y del área lateral en sus respuestas.

$$\begin{aligned} 1) \quad & 25 \cdot 2 + 75 \cdot 2 = 200 \text{ m} \\ 2) \quad & A = 7 \cdot 7 = 49 \text{ m}^2 \quad (\text{crossed out}) \\ & A = \pi \cdot 3.5^2 = 38.48 \text{ m}^2 \\ 3) \quad & A_{\text{base}} = 15 \cdot 15 = 225 \\ & A_{\text{LATERAL}} = 4 \cdot 62 \cdot 15 = 3720 \\ & 225 + 3720 = 3945 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

Figura 12. Primer destino del *Breakout*.

Asimismo, en las soluciones del 84% del alumnado no se explicitaban representaciones de las figuras. En la figura 13 se observa que sí se expresan todas las unidades de medida, pero se detectó un error que fue frecuente en el 78% de las respuestas, y es que, para calcular el volumen del cilindro, usaban medidas expresadas en centímetros y en metros, en vez de pasarlas todas a metros. Sobre esto, Ford y Gilbert (2013) expresan que los estudiantes deben dominar las conversiones de unidades de medida, ya que se enfrentan a problemas de la vida cotidiana donde deben hacer equivalencias métricas. Por otra parte, en la pregunta 4 del *Breakout* también hubo confusiones, ya que se pedía el área de la semiesfera, y el 41% de los estudiantes calculaban la de la esfera.

④ $d = 10 \text{ m}$
 $r = 5 \text{ m}$
 $A_e = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 4 \cdot \pi \cdot 5^2 = 314.16 \text{ m}^2$
 $A_s = \frac{314.16}{2} = 157.08 \text{ m}^2$

⑤ $V = A_{\text{base}} \cdot \text{altura}$
 $V = \pi \cdot 40^2 \cdot 22 = 110584.06 \text{ m}^3$
 $d = 80 \text{ cm} = 0.8 \text{ m}$
 $r = 0.4 \text{ m}$
 $V = \pi \cdot 0.4^2 \cdot 22 = 11.06 \text{ m}^3$

⑥ $d = 1.2 \text{ m}$
 $r = 0.6 \text{ m}$
 $A_c = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \text{altura} = 2 \cdot \pi \cdot 0.6^2 + 2 \cdot \pi \cdot 0.6 \cdot 6.2 = 236 \text{ m}^2$

Figura 13. Segundo destino del *Breakout*.

Por otro lado, las dos últimas preguntas del *Breakout* son las que presentaron más dificultad, ya que en ella se pedía el volumen de un prisma a escala 1:25, y el 84% de los estudiantes calculaban el volumen del prisma y luego lo dividían por 25, en vez de dividir por 25^3 . Esto se observa en la primera solución que se muestra en la figura 14. En esa misma figura se observa la solución de la última pregunta, en la que había que usar el Teorema de Pitágoras para calcular la apotema. Sin embargo, estos estudiantes tendían a calcular directamente el área lateral de la pirámide usando la altura del prisma, por lo que no obtenían el resultado correcto. En dicha solución se muestra incluso el triángulo rectángulo al que se le aplica el teorema, aunque esto no se reflejó en todas las soluciones.

① $V = \frac{1}{3} A_{\text{base}} \cdot \text{altura} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 2^2 \cdot 4 = 26.18 \text{ m}^3$

② $\text{altura} = \frac{26}{25} \text{ m}$
 $\text{anchura} = \frac{18}{25} \text{ m}$
 $V = A_{\text{base}} \cdot \text{altura}$
 $V = 18^2 \cdot 26 = 8424 \text{ m}^3$
 $V = \frac{8424}{25} = 336.96 \text{ m}^3$
 $V = \frac{18 \cdot 18 \cdot 26}{25} = 0.54 \text{ m}^3$

③ $\text{Teorema de Pitágoras}$
 $3^2 + 4^2 = a^2$
 $a^2 = 25$
 $a = 5.41 \text{ m}$
 $A_{\text{lateral}} = 4 A_{\text{triángulo}} = 4 \cdot \frac{3 \cdot 4 \cdot 5.41}{2} = 93.35 \text{ m}^2$

Figura 14. Tercer destino del Breakout.

Hay que señalar que didácticamente el uso de un recurso digital como es el *Breakout* fue útil, ya que los estudiantes practicaron con los cálculos de las fórmulas deducidas a lo largo de dicha situación de aprendizaje y, además, podían volver a contestar las preguntas erróneas, lo cual les permitía volver a leer los enunciados y resolver las cuestiones planteadas de acuerdo con los mostrado por Moral-Sánchez et al. (2022).

6. Conclusión

Con esta propuesta didáctica se cumple la adquisición de los saberes básicos sobre la capacidad de reconocer diversos cuerpos geométricos en el entorno real y sus propiedades, además de aprender a calcular su área y su volumen. Sin embargo, a lo largo de dicha situación y como objetivo de investigación de este documento se han observado una serie de dificultades y errores que deben ser tenidos en cuenta a la hora de su implementación en el aula.

Una vez mostradas y analizadas las evidencias de los estudiantes se deduce cómo son necesarias realizar estimaciones para luego hacer mediciones de forma más correcta y entender la forma de llevarlas a cabo como apuntaban Rojas y Albarracín (2024). Además, el uso de materiales manipulativos como pueden ser la construcción de desarrollos planos y el uso de los cuerpos rellenables de metacrilato hacen que los estudiantes deduzcan las fórmulas del área y del volumen de las figuras tridimensionales y que no tengan que memorizar ningún tipo de fórmula, lo que refuerza el aprendizaje heurístico (Medina Pérez y Pérez Azahuanche, 2021). Coincidiendo también con las conclusiones de Bravo Guerrero (2019) el cual expresa que con los materiales didácticos manipulativos el alumnado llega a razonar de manera abstracta, desarrollando así el pensamiento lógico, deductivo y ordenado.

Resaltar también la importancia del uso de las TIC en el aula, ya que estas motivan al estudiantado, lo que a su vez promueve su aprendizaje (Amores-Valencia y De Casas-Moreno, 2019). De hecho, Moral-Sánchez et al. (2022) comentan que las TIC proporcionan nuevas oportunidades y herramientas educativas que permiten generar un conocimiento activo, participativo y constructivo en educación matemática.

Esta situación de aprendizaje puede ser replicable a cualquier grupo clase, ya que en ella se implementan estrategias pedagógicas en geometría y aumentando la motivación y la colaboración del alumnado en el proceso.

7. Referencias bibliográficas

- Alder, K. (2003). *La medida de todas las cosas. La odisea de siete años y el error oculto que transformaron el mundo*. Taurus.
- Alsina, C., Burgués, C., y Fortuny, J. M. (1987). *Invitación a la didáctica de la geometría*. Síntesis.
- Amores-Valencia, A. J., y De Casas-Moreno-P. (2019). El uso de las TIC como herramienta de motivación para alumnos de enseñanza secundaria obligatoria. Estudio de caso español. *Hamutay*, 6(3), 37-49. <http://dx.doi.org/10.21503/hamu.v6i3.1845>

- Bravo Guerrero, F. (2019). Las nuevas clases de geometría. *RECUS. Revista Electrónica Cooperación Universidad Sociedad*, 4(3), 14-21. <https://doi.org/10.33936/recus.v4i3.1504>
- Bravo Guerrero, F. E., Trelles Zambrano, C. A., y Barraqueta Samaniego, J. F. (2017). Reflexiones sobre la evolución de la clase de matemáticas en el bachillerato ecuatoriano. *INNOVA Research Journal*, 2(7), 1-12. <https://doi.org/10.33890/innova.v2.n7.2017.218>
- Bueno, D., y Forés, A. (2024). *La docencia universitaria en clave neuroeducativa: viejos problemas, nuevos retos: oportunidades para el cambio*. IDP/ICE y Ediciones Octaedro.
- Cagua Gómez, B. (2022). La Maqueta como Recurso Didáctico para la Enseñanza de Matemática en Arquitectura. *INGENIO*, 5(2), 24-30. <https://doi.org/10.29166/ingenio.v5i2.4083>
- Calderón Atariguana, R. F., y Castro Salazar, A. Z. (2021). Maquetación como recurso didáctico para la enseñanza-aprendizaje de la Geometría. *Revista Interdisciplinaria de Humanidades, Educación y Tecnología*, 7(3), 273-293.
- Camargo, L. Molina, O., Perry, P., y Samper, C. (2023). Ruta para identificar, reconstruir y tipificar argumentos matemáticos que surgen en clase de geometría. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo, E. y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 179-186). SEIEM.
- Castro-Valle, L. A. (2022). Aprendizaje basado en proyectos para fortalecer el proceso de enseñanza aprendizaje. *Polo del Conocimiento*, 7(6), 2294-2309.
- De Freitas, E., y Sinclair, N. (2012). Diagram, gesture, agency: Theorizing embodiment in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 80, 133-152.
- Diego-Mantecón, J. M., Fernández Blanco, M. T., Ortiz-Laso, Z., y Lavicza, Z. (2021). Proyectos STEAM con formato KIKS para el desarrollo de competencias clave. *Comunicar, Revista Científica de Comunicación y Educación*, 29(66), 33-43.
- Durán-García, E. y González-Peralta, A. G. (2023). Conocimiento matemático de profesores de primaria en México: una revisión de literatura. *Revista Eduscientia. Divulgación De La Ciencia Educativa*, 6(11), 138-159.
- Elvas Fernández, M. I., y Ramírez Uclés, R. (2025). Análisis del sentido espacial en estudiantes de secundaria en actividades PISA. *AIEM - Avances de investigación en educación matemática*, 27, 203-221.
- Escarbajal Frutos, A., y Martínez Galera, G. (2023). Uso de las metodologías activas en los centros educativos de educación infantil, primaria y secundaria. *International Journal of New Education*, 11, 5-25. <https://doi.org/10.24310/IJNE.11.2023.16452>
- Font, V., y Rodríguez-Nieto, C. A. (2024). Naturaleza y papel de las conexiones en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. *AIEM - Avances de investigación en educación matemática*, 25, 1-7. <https://doi.org/10.35763/aiem25.6777>
- Ford, E., y Gilbert, Y. V. (2013). Displacement between Orders of Magnitude Method for SI Unit Conversion. *Journal of Chemical Education*, 90, 134-136.
- Forteza Bagán, M. Á. (2019). *Metodologías didácticas para la enseñanza/aprendizaje de competencias*. Unitat de Suport Educatiu de la Universitat Jaume I.
- Gamboa Araya, R., y Ballesterio Alfaro, E. (2010). La enseñanza y aprendizaje de la geometría en secundaria, la perspectiva de los estudiantes. *Revista Electrónica Educare*, 14(2), 125-142. <https://doi.org/10.15359/ree.14-2.9>

- Gil Quintana, J., y Prieto Jurado, E. (2019). Juego y gamificación: Innovación educativa en una sociedad en continuo cambio. *Revista Ensayos Pedagógicos*, 14(1), 91-121. <https://doi.org/10.15359/rep.14-1.5>
- Godino, J. D., Batanero, C., Font, V., Cid, E., Ruiz, F., y Roa, R. (2004). *Didáctica de las Matemáticas para Maestros. Proyecto Edumat-Maestros*. Universidad de Granada.
- Guillén, G. (2010). ¿Por qué usar los sólidos como contexto en la enseñanza/aprendizaje de la geometría? ¿Y en la investigación?. En M.M. Moreno, A., Estrada, J. Carrillo, y T.A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 21-68). SEIEM.
- Gutiérrez, Á. (2006). La investigación sobre enseñanza y aprendizaje de la geometría. En P. Flores, F. Ruíz, y M. De la Fuente (Eds.), *Geometría para el siglo XXI* (pp. 13-58). SAEM Thales.
- Gutiérrez, Á., y Jaime, A. (2012). Reflexiones sobre la enseñanza de la geometría en primaria y secundaria. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED*, (32), 55-70.
- Higueras-Rodríguez, L., y Molina Ruiz, E. (2020). ¿Qué se entiende por juego didáctico? Aportaciones de maestros y estudiantes en prácticas sobre su concepción como elemento fundamental en el desarrollo del proceso enseñanza-aprendizaje. *Profesorado, Revista de Currículum y Formación del Profesorado*, 24(1), 266-283. <https://doi.org/10.30827/profesorado.v24i1.8677>
- Kemmis, S., y McTaggart, R. (1988). *Cómo planificar la investigación-acción*. Laertes.
- León Loaiza, M. A., y Sánchez, J. E. (2023). Aprendizaje colaborativo en el aula de Matemáticas. *LATAM, Revista Latinoamericana de Ciencias Sociales y Humanidades*, 4(3), 1250-1261.
- Medina Pérez, V. H., y Pérez Azahuanche, M. Á. (2021). Influencia de las estrategias heurísticas en el aprendizaje de la matemática. *Innova Research Journal*, 6(2), 36-61. <https://doi.org/10.33890/innova.v6.n2.2021.1672>
- Mirta Giarrizzo, A. (2021). La enseñanza de la geometría en la escuela secundaria: materiales didácticos para favorecer el estudio de figuras o cuerpos geométricos. *Revista de Educación Matemática*, 36(2), 47-66.
- Moral-Sánchez, S. N., Sánchez-Compañía, M. T., y Romero-Albaladejo, I. M. (2021). Evaluación inicial como catalizador para el diseño de unidades de aprendizaje de Geometría en Educación Secundaria. *Épsilon*, 107, 47-57.
- Moral-Sánchez, S. N., Sánchez-Compañía, M. T., y Romero-Albaladejo, I. M. (2023). Uso de realidad virtual en Geometría para el desarrollo de habilidades espaciales. *Enseñanza de las Ciencias*, 41(1), 125-147. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.5442>
- Moral-Sánchez, S. N., Sánchez-Compañía, M. T., y Romero, I. (2022). Geometry with a STEM and Gamification Approach: A Didactic Experience in Secondary Education. *Mathematics*, 10(18), 3252. <https://doi.org/10.3390/math10183252>
- Orden de 30 de mayo de 2023, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la etapa de Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía, se regulan determinados aspectos de la atención a la diversidad y a las diferencias individuales, se establece la ordenación de la evaluación del proceso de aprendizaje del alumnado y se determina el proceso de tránsito entre las diferentes etapas educativas. *Boletín Oficial de la Junta de Andalucía*, 104, de 2 de junio de 2023, pp. 9727/1-9727/289.
- Pacheco-Muñoz, E., Juárez-Ruiz, E., y Flores-Medrano, E. (2023). Relaciones direccionales intra-dominio del conocimiento especializado del profesor de

- matemáticas sobre localización en el plano. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 24, 57-74. <https://doi.org/10.35763/aiem24.4360>
- Ramírez-Uclés, R., Ramírez-Uclés, I., Flores Martínez, P., y Castro Martínez, E. (2013). Análisis de las capacidades de visualización espacial e intelectual en los alumnos con talento matemático. *Revista Mexicana de Psicología*, 30(1), 24-31.
- Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria. *Boletín Oficial del Estado*, 76, de 30 de marzo de 2022, pp. 41571-41789.
- Revelo Manosalvas, S. L., y Yáñez Ronquillo, N. D. P. (2023). Material concreto y su importancia en el fortalecimiento de la matemática: Una revisión documental. *MENTOR. Revista De investigación Educativa Y Deportiva*, 2(4), 69–87. <https://doi.org/10.56200/mried.v2i4.5304>
- Rojas, F., y Albarracín, L. (2024). Uso de actividades de medidas indirectas en la formación de maestros. *NÚMEROS*, 116.
- Rodríguez Muñiz, L. J. (2023). Educar en matemáticas en la era de los datos. *Encuentros multidisciplinares*, 25(74), 1-9.
- Rodríguez Sandoval, E., Vargas Solano, É. M., Luna Cortés, J. (2010). Evaluación de la estrategia aprendizaje basado en proyectos. *Educación y educadores*, 13(1), 13-25.
- Romero Ariza, M. (2010). El aprendizaje experiencial y las nuevas demandas formativas. *Revista de Antropología Experimental*, 10, 89-102.
- Romero-García, C., Manzanal Martínez, A. I., y Palacios Ortega, A. (2023). Impacto del proceso de formación del maestro en su afectividad hacia las Matemáticas. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 24, 93-110. <https://doi.org/10.35763/aiem24.4418>
- Shiguay Guizado, G. A., De La Cruz Rioja, R., y Huapaya-Capcha, Y.A. (2024). Desarrollo del pensamiento matemático por medio de estrategias hermenéuticas: una revisión sistemática. Horizontes. *Revista de Investigación en Ciencias de la Educación*, 8(35), 2462–2477. <https://doi.org/10.33996/revistahorizontes.v8i35.881>
- Sua, C., Gutiérrez, Á., y Jaime, A. (2021). Análisis de una actividad de visualización en un entorno de geometría dinámica 3D y realidad aumentada. En D. N. Pascual David, D. F. Yáñez Avendaño, M. T. González Astudillo, y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 579-586). SEIEM
- Tapia Reyes, R. A., y Murillo Antón, J. (2020). El método Singapur: sus alcances para el aprendizaje de las matemáticas. *Revista Muro de La Investigación*, 5(2), 13-24. <https://doi.org/10.17162/rmi.v5i2.1322>
- Trelles Zambrano, C. A., Bravo Guerrero, F. E., y Barraqueta Samaniego, J. F. (2017). ¿Cómo evaluar los aprendizajes en matemáticas? *INNOVA Research Journal*, 2(6), 35-51. <https://doi.org/10.33890/innova.v2.n6.2017.183>
- Trujillo, F. (2015). *Aprendizaje basado en proyectos. Infantil, Primaria y Secundaria*. Secretaría General Técnica. Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (INTEF).
- Vargas Vargas, N. A., Niño Vega, J. A., Fernández Morales, F. H. (2020). Aprendizaje basado en proyectos mediados por tic para superar dificultades en el aprendizaje de operaciones matemáticas básicas. *Boletín Redipe*, 9(3), 167-180.
- Vergara Ramírez, J. J., y Zabalza, M. Á. (2021). *Un aula, un proyecto: el ABP y la nueva educación a partir de 2020*. Narcea Ediciones.
- Zabala-Vargas, S. A., Ardila-Segovia, D. A., García-Mora, L. H., y de Benito-Crosetti, B. L. (2020). Aprendizaje basado en juegos (GBL) aplicado a la enseñanza de la

matemática en educación superior. Una revisión sistemática de literatura. *Formación Universitaria*, 13(1), 13-26.

<http://dx.doi.org/10.4067/S0718-50062020000100013>

Martín-Camacho, Estefanía:

ORCID: <https://orcid.org/0009-0003-7151-8165>

Grado en Matemáticas. Máster en Matemáticas. Máster en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas, especialidad Matemáticas. Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Málaga (España).

Moral-Sánchez, Silvia-Natividad:

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0200-3569>

Doctora en Educación Matemática. Máster en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas, especialidad Matemáticas. Profesora de Didáctica de la Matemática en la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Málaga (España).