

Enseñanza por investigación en la universidad: modelización matemática entorno a una pregunta relacionada con la economía
Ensino por pesquisa na universidade: modelização matemática em torno de uma pergunta relacionada à economia

Diana Patricia Salgado

Fecha de recepción: 22-06-2024

Fecha de aceptación: 30-07-2024

Resumen	<p>Este trabajo tiene como objetivo describir los procesos de modelización llevados a cabo durante el desarrollo de un Recorrido de Estudio e Investigación (REI) de manera on-line con estudiantes de posgrado. El REI se genera a partir de una pregunta ligada a la economía. El análisis de los procesos se realiza a partir de la noción de modelización de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD). Los resultados muestran los diversos modelos que surgen del recorte del sistema a modelar y el análisis económico y matemático realizado por el grupo de estudio, lo que da cuenta de la potencialidad de la pregunta generatriz del REI.</p> <p>Palabras clave: Teoría Antropológica de lo Didáctico, Recorrido de Estudio e Investigación, modelización, matemática</p>
Abstract	<p>This work aims to describe the modelling processes carried out during the development of an online Research and Study Path (RSP) with graduate students. The RSP is generated from a question linked to the economy. The analysis of processes is based on the notion of modelling of the Anthropological Theory of the Didactic (ATD). The results show the different models that arise from the cutting of the system to model and the economic and mathematical analysis carried out by the study group, which accounts for the potential of the generative question of the RSP.</p> <p>Keywords: Anthropological Theory of the Didactic, Research and Study Path, modelling, mathematics</p>

Resumo	<p>Este trabalho tem como objetivo descrever os processos de modelização realizados durante o desenvolvimento de um Percurso de Estudo e Investigação (PEI) de maneira on-line com estudantes de pós-graduação. O PEI é gerado a partir de uma pergunta ligada à economia. A análise dos processos realiza-se a partir da noção de modelização da Teoria Antropológica do Didático (TAD). Os resultados mostram os diversos modelos que surgem do recorte do sistema a modelar e a análise econômica e matemática realizada pelo grupo de estudo, o que dá conta da potencialidade da pergunta geratriz do REI.</p> <p>Palavras-chave: Teoria Antropológica do Didático, Percurso de Estudo e Investigação, modelização, matemática</p>
---------------	--

1. Introducción

Este artículo presenta resultados parciales de una experimentación realizada en la modalidad on-line con estudiantes de un curso de posgrado de la carrera Doctorado en Enseñanza de las Ciencias, mención Matemática, en una universidad pública argentina. La investigación tiene como objetivo describir los procesos de modelización matemática que surgen cuando los estudiantes se enfrentan a una enseñanza basada en el estudio de preguntas.

La experiencia consta de un camino de estudio e investigación que se inicia con una problemática relacionada con la matemática y la economía: ¿cómo calcular los costos en un microemprendimiento?, siendo ésta la tercera implementación realizada (Salgado, 2019) pero, en esta oportunidad, de manera on-line y con estudiantes de posgrado. A partir de la pregunta generatriz es posible obtener múltiples cuestionamientos relacionados con la matemática y con la economía. Un estudio de los posibles recorridos que se pueden obtener en la búsqueda de respuestas al problema económico formulado se describe en el Modelo Praxeológico de Referencia detallado en Salgado y otros (2019), junto con las preguntas y los modelos formulados por los estudiantes en dos implementaciones. Con el objeto de responder la pregunta generatriz y sus derivadas sería posible ingresar al estudio de saberes propios del Cálculo Diferencial por un lado y del cálculo de costos, por el otro. Así, se cubriría parte del programa de estudio institucional utilizando una metodología de enseñanza distinta.

La noción de modelización y modelización matemática ha sido objeto de diversas investigaciones y toma diferentes concepciones, algunas de las cuales se detallan en adelante. La actividad de modelización y la manera de entender un proceso de modelado matemático son ajenas a la mayoría de las instituciones escolares, su incorporación resulta un desafío para la enseñanza de la matemática que pretenda romper con el paradigma tradicional de enseñanza en el cual el único trabajo con un modelo se reduce a aplicar uno ya conocido de antemano. En este artículo se toma como referencia la noción de modelización matemática en el ámbito

de la TAD (Chevallard, 1989) para describir los procesos de modelización matemáticos o no matemáticos obtenidos para dar respuesta a la pregunta generatriz y derivadas. Entre los resultados se destacan la variedad de modelos construidos, el nivel de análisis demostrado por el grupo de estudio y la potencia y amplitud de la pregunta generatriz.

2. Marco Teórico

En esta investigación se adopta a la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) como referente teórico y, principalmente, se utilizan las nociones de Recorrido de Estudio e Investigación (REI) y de actividad de modelización matemática (Chevallard, 2009; Otero, 2021).

Un REI es un constructo teórico y didáctico propuesto por la TAD que permite desarrollar un proceso de estudio e investigación a partir de preguntas. En el transcurso de ese proceso se llega al saber con el único fin de responder esas preguntas, así es posible recuperar el sentido y funcionalidad a los saberes estudiados. Por otra parte, se reemplaza la pedagogía actual del estudio de respuestas hechas con una nueva consistente en el estudio de preguntas, denominada Pedagogía de la Investigación y del Cuestionamiento del Mundo (PICM) (Chevallard, 2013).

El funcionamiento general de un REI se podría explicar a través del esquema herbartiano (Chevallard, 2009, 2013), el cual consta de un sistema S formado por un grupo de personas X (estudiantes) que estudian una pregunta Q con la supervisión de una persona Y (profesor/a), sistema que genera un proceso de estudio siguiendo una metodología específica. Este esquema se sintetiza: $[S(X; Y; Q)M] R^{\square}$.

S fabrica y organiza el medio didáctico M en el cual se elaborará una respuesta R^{\square} . El medio está compuesto por todos los recursos útiles para la construcción de una respuesta válida. La construcción de M es tanto una responsabilidad del estudiante, como del profesor, este último es considerado como un sistema de información más en la clase (*media*) y en ningún caso, un *media* puede ser creído bajo palabra. El camino recorrido hasta la obtención de R^{\square} permite cubrir una variedad de, lo que Chevallard denomina, organizaciones matemáticas o praxeologías de un determinado programa de estudios.

3. Modelización y modelización matemática

La noción de modelización ha sido objeto de numerosas investigaciones tanto en el ámbito de las ciencias formales como de las fácticas o empíricas. El término modelo ha dado lugar a diferentes concepciones aludiendo a modelos generales como así también a algunos más específicos de una disciplina dada (Suppes, 1960; Klimovsky, 1990; Falgueras, 1994; Cassini, 2011; Barquero, 2009; Ruiz Munzón, 2010; Barquero, Bosch y Gascón, 2011; Ruiz Munzón, Bosch y Gascón, 2015; Otero, 2021). Más allá de la definición, las investigaciones acerca del papel que juega la modelización en la enseñanza de las ciencias, específicamente de la modelización

matemática, han ido en aumento. Muy recientemente, Di Blasi Regner, Fasce y Santos (2024) reflexionan sobre la tarea de docentes y estudiantes en el aula de matemática y comparten ideas, sugerencias y propuestas para la enseñanza de la modelización matemática considerada como un proceso.

Con el fin de pensar en un mismo esquema que involucre tanto a lo tradicionalmente matemático y lo que representa una aplicación de la matemática, Chevallard (1989) introduce una idea generalizada de modelización. Esta supone dos componentes importantes: un sistema, matemático o no matemático, y un modelo (matemático) de ese sistema. El proceso de modelización consta de tres etapas:

1. Definir el sistema a estudiar considerando sus características más relevantes, identificando las variables que entran en juego y recortando la realidad en la cual se sitúa el fenómeno a investigar.

2. Construir el modelo estableciendo relaciones entre las variables. El modelo de sistema a estudiar es este conjunto de relaciones.

3. Trabajar el modelo obtenido a fin de producir conocimiento relativo al sistema estudiado, identificando nuevas relaciones entre las variables. Esta tercera etapa requiere trabajar sobre el modelo diseñado y representa un paso propiamente matemático.

Por su parte, Ruiz Munzón (2010) formula una concepción de la modelización diferente que surge como necesidad de introducir nuevas técnicas en una actividad matemática plenamente algebraizada. Específicamente, describe la modelización algebraico-funcional como un desarrollo del instrumento algebraico, en la cual las variables algebraicas miden magnitudes continuas. Esta se presenta articulada en tres niveles de modelización algebraico-funcional de una organización matemática (OM):

Primer nivel: Este primer nivel de un sistema lo constituye el que se refiere a modelos que se expresan mediante funciones de una única variable y sus correspondientes ecuaciones e inecuaciones asociadas.

Segundo nivel: Se materializa en modelos que se expresan mediante familias de funciones de una variable y sus ecuaciones e inecuaciones paramétricas asociadas. En este nivel se distingue entre parámetros y variables, considerados como intercambiables. Se estudian funciones de una variable, pero no de varias variables.

Tercer nivel: Se constituye a partir de modelos que se expresan mediante familias de funciones de dos o más variables y sus fórmulas asociadas. En este nivel el papel de los parámetros y de las variables es intercambiable. Se estudia cómo la variación conjunta de dos o más variables afecta a la variación de una función.

Mientras que en una modelización algebraica los datos son relaciones analíticas entre variables y la incógnita es una relación analítica, en una modelización funcional se incluye el estudio de la variación continua de una variable respecto de otra u otras, lo que hace imprescindible el uso de técnicas funcionales que proporciona el cálculo diferencial.

Cabe considerar, además, la caracterización y descripción de la actividad de modelización matemática en el ámbito de la TAD realizada por Barquero (2009). La autora postula que esta actividad consta de cuatro fases:

Fase 1: refiere a la delimitación del sistema en el que se ubica una situación problemática. En esta etapa se identifican ciertos aspectos del sistema, los cuales se representan mediante variables.

Fase 2: Se describen ciertas relaciones matemáticas entre las variables. El conjunto de estas relaciones es lo que se denomina el modelo del sistema.

Fase 3: Incluye el trabajo técnico dentro del modelo y la interpretación de este trabajo. Se decide sobre la utilidad y relevancia del modelo matemático construido.

Fase 4: Se plantean nuevos problemas que dan lugar a nuevos conocimientos sobre el sistema y a la construcción de nuevos modelos matemáticos.

Si bien Barquero se refiere a modelización matemática, las fases caracterizadas se fundamentan en las tres ya definidas por Chevallard y las amplía a cuatro. Además, mientras Ruiz Munzón y Barquero se centran en la noción de modelización en torno a la matemática específicamente, Chevallard da una noción más general.

En el ámbito de la TAD, la modelización forma parte de la actividad matemática (Chevallard, 1989) y los REI son los dispositivos didácticos apropiados para desarrollar un proceso de modelización en un ámbito escolar. Como se mencionó anteriormente, Chevallard (1984, 1989, 1990) propone inicialmente una noción general de modelo matemático que comprende tanto a sistemas intramatemáticos como extramatemáticos. En este artículo describimos y analizamos el proceso llevado a cabo por los estudiantes en el desarrollo de un REI, codisciplinar a la matemática y a la economía, desde la definición y recorte del sistema a modelizar hasta la formulación del modelo. Entre los resultados se destacan la amplitud de la pregunta que genera el recorrido y la diversidad de modelos formulados.

4. Preguntas de la investigación

En el REI desarrollado:

- ¿Qué modelos matemáticos se obtienen?
- ¿Qué praxeologías matemáticas y/o económicas se estudian?
- ¿En qué etapa de modelización matemática se ubica la actividad realizada por los estudiantes?

5. Objetivos

- Identificar las etapas de modelización matemática presentes en el desarrollo del REI.
- Describir, caracterizar y analizar la actividad de modelización matemática realizada.
- Identificar los saberes encontrados o reencontrados ya sean matemáticos o no matemáticos.

6. Contexto del REI

El REI desarrollado se ubica en el contexto de un curso de posgrado denominado “Modelos matemáticos en la Economía”, para estudiantes del doctorado en Enseñanza de las Ciencias, mención Matemática, en una universidad pública argentina.

El recorrido se llevó a cabo en las últimas clases del cursado de la materia, motivo por el cual no pudo extenderse más en el tiempo, así, podríamos decir que se trató de un ensayo o inicio de un REI. La duración de la experiencia fue de tres sesiones de 1 hora aproximadamente. El grupo de estudio contó con 7 estudiantes nacionales y regionales, de Argentina y Latinoamérica y la modalidad del dictado fue a través de videoconferencia. Las clases fueron grabadas para tener un registro de ellas, en particular de las discusiones generadas entre los participantes, luego se realizó una transcripción de los audios. Además, los integrantes dejaron constancia de sus producciones por escrito.

7. Metodología de la investigación

La investigación es de tipo descriptiva y se realiza a partir del análisis de los protocolos escritos de los estudiantes y de las grabaciones de clase.

Se identifican a los estudiantes como A_1 , A_2 , A_3 , A_4 , A_5 , A_6 y A_7 , de los cuales cinco integrantes trabajaron individualmente (A_1 , A_2 , A_3 , A_4 y A_5) y dos estudiantes lo hicieron en conjunto (A_6 y A_7), que corresponde a dos profesoras ubicadas en una misma universidad a las que se les permitió trabajar juntas.

El objetivo de este trabajo no es describir el REI desarrollado sino la actividad de modelización e identificar cada uno de los modelos obtenidos, sean matemáticos o no; por ello no detallaremos, por ejemplo, las preguntas generadas a partir de la inicial para cada uno de los participantes y sus correspondientes respuestas, ni cómo fue construido el medio didáctico para generar una respuesta adecuada.

8. Descripción de la actividad de modelización desarrollada

La pregunta generatriz que inició el REI es: Q_0 : *¿cómo calcular los costos en un microemprendimiento?*, la cual dio lugar a indagar sobre qué se entiende por

microemprendimiento y qué tipo de costos posee. A continuación, se enumeran algunas de las cuestiones formuladas por el grupo de estudio:

- ¿qué es un costo?
- ¿qué es un microemprendimiento?
- ¿qué tipo de costos tiene un microemprendimiento?
- ¿se necesita conocer la demanda del producto para determinar los costos?
- ¿se puede analizar qué sucede con el costo a medida que transcurre el tiempo? ¿cómo influye la inflación?
- ¿cómo se relaciona el ingreso por la venta del producto con el costo del mismo?
- ¿en qué consisten los costos fijos? ¿y los variables?
- ¿cómo se calcula el margen de ganancia?
- ¿cómo se determina el precio de venta?
- ¿cómo encontrar un modelo que describa el cálculo de los costos del microemprendimiento?

Las búsquedas en diferentes sistemas de información, tales como Internet, permitieron conocer detalles del sistema a modelar. El grupo de estudio discutió la noción de microemprendimiento y finalmente concluyó que ésta es una actividad económica de poca inversión llevada a cabo por uno o más emprendedores que a su vez son socios, dueños y administradores. En general, los microemprendimientos son pequeños negocios que no cuentan con empleados y el servicio que brindan se basa en los conocimientos u oficios de los miembros. Además, el grupo discutió sobre las características generales del sistema, pero a los efectos de formular un modelo de función de costo, se decidió que cada integrante considere un tipo particular de emprendimiento. Así, los emprendimientos considerados son los que se detallan en la Tabla 1:

Integrante/s	Emprendimiento
A ₁	Venta de amigurumis (muñequitos tejidos al crochet)
A ₂	Producción y venta de dulce de zapallo orgánico sin azúcar agregada
A ₃	Armado y venta de tablas, desayunos y canastas sorpresa
A ₄	No define
A ₅	Microcervecería
A ₆	Ejemplos extraídos de la bibliografía: venta de café (listo para consumir) - producción y venta de galletas
A ₇	Ejemplos extraídos de la bibliografía: venta de café (listo para consumir) - producción y venta de galletas

Tabla 1: Emprendimientos considerados por cada integrante del grupo de estudio

La instancia de discusión de las características importantes del sistema, que se extendió por más de una sesión, refiere a una primera etapa del proceso de modelización en el ámbito de la TAD. Así, se puede afirmar que la actividad realizada por A₁ hasta A₇ recorrió esta etapa inicial. A continuación, se presenta un resumen y se describen brevemente algunas de las producciones del grupo de estudio.

Producción de Integrante A₁:



Pensando en diversas consideraciones acerca de su emprendimiento, A_1 define cuáles serían los costos fijos y formula que

Costos fijos = Publicidad + Community manager + Mantenimiento página web + Herramientas

donde Costos fijos refiere a la suma del dinero invertido en Publicidad (semanal, quincenal o mensual a través de una red social), en Community Manager (en caso que el microemprendimiento crezca y se demande mucho tiempo mantener las redes), en Mantenimiento de la página web (sin costo si el mismo emprendedor la maneja) y en Herramientas o accesorios que se necesitan para trabajar.

Entre algunas de las consideraciones iniciales, se supone que el trabajo del emprendedor se realiza en la casa, no hay lugar físico alquilado, por lo tanto, los servicios de luz e internet no se consideran pues no modificarían el gasto habitual de la persona. Por otra parte, si se habilita la opción de pago por transferencia, se debería contar con una cuenta bancaria, para lo cual se toman en cuenta las entidades virtuales donde la apertura y mantenimiento de una cuenta están totalmente bonificadas.

En cuanto a los costos variables, se enumeran tres: materia prima (hilos), empaquetado y mano de obra.

- a) Teniendo en cuenta la cantidad de productos que se ofrecerán, se estima la cantidad de hilo utilizado de cada color (Tabla 2):

	Color 1	Color 2	Color 3	Color 4	...
Amigurumi 1	50 cm		100 cm	200 cm	...
Amigurumi 2		20 cm	45 cm	150 cm	...
...

Tabla 2: Cantidad de hilos para cada modelo de amigurumi

Además, teniendo en cuenta el precio del ovillo de hilo y la cantidad que trae, es necesario calcular el precio por centímetro (y considerar que, según el color, varía el precio). Si nos centramos en el amigurumi 1 para hacer los cálculos, llamamos C_1, C_2, C_3, \dots a las cantidades de hilo de cada color necesarios para este producto. Estas cantidades son fijas siempre y cuando no se modifique el patrón.

Si p_1, p_2, p_3, \dots son los precios por centímetro de cada color de hilo, el amigurumi 1 tendría un costo de materia prima igual a

$$C_1 \cdot p_1 + C_2 \cdot p_2 + C_3 \cdot p_3 + \dots$$

Pero se ofrece más de un amigurumi, entonces se nota con C_{ij} a la cantidad de hilo del color j requerido para el amigurumi i . Mediante la matriz siguiente se representan todas las cantidades de hilo por color requeridas para cada muñequito:

$$A = (C_{11} \ C_{12} \ \dots \ C_{21} \ C_{22} \ \dots \ \dots \ \dots)$$

Y el vector precio que contiene el precio p_j para cada color j : $P = (p_1 \ p_2 \ \dots)$

Entonces $A \cdot P$ es un vector en el cual cada componente representa el costo de materia prima para cada muñequito.

Si, además, consideramos el vector: $V = (v_1 \ v_2 \ \dots)$

Donde v_i indica la cantidad de amigurumis de tipo i vendidos, entonces $(A \cdot P)^T \cdot V$ representa el costo total de la materia prima MP al vender un total de $v_1 + v_2 + v_3 + \dots$ amigurumis. En resumen, teniendo n tipos de amigurumis y m colores distintos,

$$MP(v_1, v_2, \dots, v_n) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m c_{ij} p_j \right) v_i$$

- b) En cuanto al empaquetado, considerando que todos los amigurumis son de tamaño similar, éstos serán presentados en bolsas de papel madera con sus respectivas etiquetas. Llamando E al costo total del empaquetado, tendremos que:

$$E(v_1, v_2, \dots, v_n) = E \cdot \sum_{i=1}^n v_i$$

El costo del envoltorio o empaquetado así como también el del hilo, se supone varían respecto a la inflación.

- c) El costo de la mano de obra se calcula de acuerdo al valor H de la hora del personal de servicios domésticos o tareas similares determinado por organismos nacionales. Este valor también es variable de acuerdo a disposiciones gubernamentales. Con lo cual, si t_i es el tiempo destinado al tejido del amigurumi i (el cual es fijo), el tiempo total para la mano de obra será $\sum_{i=1}^n t_i \cdot v_i$ y por lo tanto el costo total de mano de obra es:

$$MO(v_1, v_2, \dots, v_n) = H \cdot \sum_{i=1}^n t_i \cdot v_i$$

Entonces, el costo variable del microemprendimiento estaría dado por la expresión:

$$C_V(v_1, v_2, \dots, v_n) = (MP + E + MO)(v_1, v_2, \dots, v_n) \\ = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m c_{ij} p_j \right) v_i + E \cdot \sum_{i=1}^n v_i + H \cdot \sum_{i=1}^n t_i \cdot v_i$$

Finalmente, el costo total es: $C(v_1, v_2, \dots, v_n) = C_F + C_V(v_1, v_2, \dots, v_n)$ donde C_F es el costo fijo, independiente de la cantidad de unidades vendidas, sin embargo, podría serlo sólo a corto plazo, ya que podría sufrir aumentos, por ejemplo, en el valor de los servicios. Por lo tanto, la fórmula presentada sólo podría ser válida para un corto plazo (tal vez uno o dos meses). La variación podría sufrirse, por ejemplo, en el costo de la materia prima, del empaquetado y de la hora de mano de obra.

Hasta aquí la integrante A₁ relaciona las variables involucradas en el sistema, lo que representa una segunda etapa del proceso de modelización. Formula un modelo matemático funcional a partir de algunas operaciones matriciales. Además, es importante destacar que A₁ continúa generando conocimiento a partir del modelo diseñado, lo cual indica un paso hacia una tercera etapa, que continúa como se detalla en lo que sigue.

Analizando un poco más el problema tendríamos que:

$$p_j = p_j(X) \quad C_F = C_F(X) \quad E = E(X) \quad H = H(X)$$

El interrogante que A₁ se plantea es el siguiente: todas estas funciones ¿de qué dependen? ¿dependen de la misma variable? ¿de la inflación? Al no poder contar con datos experimentales para realizar un ajuste mediante, por ejemplo, una curva, A₁ investiga acerca de la inflación y encuentra que el porcentaje de inflación acumulada en un momento B a partir de un momento A se calcula con la siguiente fórmula:

$$\text{Inflación acumulada}[\%] = \frac{IPC_B - IPC_A}{IPC_A} \cdot 100$$

El registro del índice de precios al consumidor (*IPC*) de cada mes se publica en el sitio propio del Instituto Nacional de Estadística y Censos (INDEC) de la República Argentina y a su vez el Banco Central de la República Argentina (BCRA) realiza proyecciones para los meses siguientes en su Relevamiento de Expectativas de Mercado (REM).

Con esta información disponible, A₁ afirma que es posible hallar un valor aproximado del precio de los hilos atendiendo a este índice, que dependerá del valor del *IPC* estimado para el mes en el cual se quiere proyectar el costo. Es decir, se puede definir la función:

$$\text{precio}(IPC_m) = p_j \cdot \frac{IPC_m - IPC_A}{IPC_A}$$

Donde IPC_m es el valor del IPC para el mes m sobre el cual queremos estimar el costo, p_j es el precio del hilo de color j al momento inicial del modelo e IPC_A es el IPC al mes inicial del modelo. Es posible realizar un cálculo análogo para estimar los costos del empaquetado y de los costos fijos. Además, se cumple que existen variaciones en el IPC de acuerdo al tipo de artículo pero, para simplificar el modelo, se considera igual para todos los rubros.

En cuanto al costo de la mano de obra, A_1 establece que no fue posible encontrar un registro histórico del valor por hora del personal de servicios domésticos, con el objeto de hacer alguna aproximación o ajuste mediante una curva. A pesar de ello, en páginas oficiales del gobierno argentino se afirma que el salario se fija una vez por año generalmente, con algunos aumentos mensuales. Con lo cual, podría pensarse que el costo de mano de obra dependerá del mes sobre el cual se quiere proyectar, definiéndolo como $H(m)$. Esta función se definirá a trozos, detallando el salario mes a mes, a partir de los porcentajes de aumento determinados por organismos oficiales.

De esta manera, considerando las variaciones anteriores, el siguiente modelo estima el costo total C del microemprendimiento al vender v_1, v_2, \dots, v_n unidades de cada amigurumi, respectivamente, durante el mes m :

$$\begin{aligned} C(v_1, v_2, \dots, v_n, IPC_m, m) &= C_F(IPC_m) + C_V(v_1, v_2, \dots, v_n, IPC_m, m) = \\ &= p_u \cdot \frac{IPC_m - IPC_A}{IPC_A} + h \cdot \frac{IPC_m - IPC_A}{IPC_A} + \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m c_{ij} p_j \cdot \frac{IPC_m - IPC_A}{IPC_A} \right) v_i \\ &\quad + e \cdot \frac{IPC_m - IPC_A}{IPC_A} \cdot \sum_{i=1}^n v_i + H(m) \cdot \sum_{i=1}^n t_i \cdot v_i \end{aligned}$$

con p_u : costo de la publicidad, h : costo de las herramientas, e : costo del empaquetado, todas variables medidas al momento inicial del modelo.

La integrante A_1 , de la cual estamos describiendo el modelo diseñado, continúa intentando mejorar el modelo y concluye que, si se pudiera llevar un registro de los costos mes a mes durante varios meses, se podría elaborar un gráfico para ajustar las curvas de cada uno de los costos y así comparar con el proyectado por el modelo. Así, se podría además estimar el costo total en algún mes requerido y sería posible calcular, por ejemplo, los costos marginales respecto a cada uno de los artículos.

El recorrido de estudio e investigación realizado por A_1 es interesante en el sentido que consideró diferentes organizaciones matemáticas y económicas, relativas a saberes ya presentes en su bagaje praxeológico como profesora de matemática, como ser el álgebra matricial y funciones de una o más variables. Otros saberes, en cambio, fueron alcanzados a partir de las preguntas que se debían responder, tales como las nociones de costo, inflación, índice de precios al consumidor, precios, relevamiento de expectativas de mercado, etc. Si bien el modelo matemático alcanzado se basa en el conocido "costo total igual a costos fijos más costos

variables”, hubo una elaboración y reelaboración hacia un modelo más complejo, cumpliéndose de esta manera con las tres etapas de la actividad de modelización en el marco de la TAD.

Producción de Integrante A₂:

Luego de analizar las características más importantes del microemprendimiento seleccionado (producción y venta de dulce de zapallo orgánico sin azúcar agregada), A₂ establece costos fijos y variables y formula un modelo dado a través de la siguiente expresión: Costo total= Costo Fijo + Costo Variable= $C_F + C_V$

$$C(q) = C_F + a \cdot q$$

En esta función, que establece como lineal, la variable q representa la cantidad de dulce producido (en kilogramos). La primera pregunta que formuló a partir de aquí es ¿por cuánto tiempo se considerará lineal a esta función? Y luego, ¿qué factores intervienen en la determinación de un modelo lineal y de un modelo no lineal para una función de costos? Puesto que los costos pueden ser estudiados a corto y largo plazo, en toda la comunidad de estudio se acordó considerar el corto plazo. Para el emprendimiento en estudio A₂ decidió construir un modelo matemático que permita calcular los costos por mes. Esta decisión se debe a que el mismo deberá ser ajustado de acuerdo a las variaciones del índice de inflación que proporciona el INDEC.

Investigando los precios vigentes al mes de julio de 2023, A₂ construyó tablas con los costos de cada una de las materias primas (zapallo anco, agua, endulzante, naranjas, frascos de vidrio con tapa y etiquetas) y otra planilla para los costos fijos (alquiler, impuestos, mano de obra, gas, electricidad y agua). Con todos estos datos numéricos, calculó el costo variable por frasco, que es la unidad a comercializar, siendo el resultado:

$$\text{Costo variable unitario} = \$371,41.$$

Así, el costo variable será: $C_V = 371,41 \cdot q$, donde q es la cantidad de frascos de dulce de zapallo producidos por mes. Por otra parte, el costo fijo determinado es:

$$\text{Costo Fijo} = C_F = \$155500 + C_I + C_S$$

Con C_I el costo de los impuestos y C_S , de los servicios. Puesto que no se tiene información sobre estos valores, se le asigna un valor genérico a cada uno.

Reescribiendo el modelo, se obtiene:

Costo Total = (costo variable unitario).(cantidad de unidades producidas por mes) + costo fijo

$$C(q) = C_F + C_V$$

$$C(q) = (155500 + C_I + C_S) + 371,41 \cdot q$$

En conclusión, la actividad realizada por A₂ llegó a posicionarse hasta en una segunda etapa del proceso de modelización, quizás por haberse detenido más en profundidad en la primera etapa analizando todas las características económicas del sistema a modelar. Los saberes encontrados o reencontrados al intentar responder la pregunta generatriz y derivada se refirieron a una organización económica referida a costos, costos fijos y variables y estudio de costos y una organización matemática relativa a funciones lineales de una variable con ciertos parámetros.

Producción de Integrante A₃:

Al igual que los demás integrantes, luego de analizar aspectos generales de un microemprendimiento, A₃ planeó un proyecto específico, en su caso, referido a la venta de implementos deportivos a través de redes sociales, usando catálogos digitales. Para ello, los insumos necesarios y suficientes para empezar son, a su criterio: un catálogo digital dinámico, líneas telefónicas disponibles para dar información y gestionar ventas y una aplicación que permita a los compradores pagar en línea.

Con el fin de definir qué tipo de negocio se desea implementar, A₃ considera necesario decidir cómo se venderán los productos, realizar un estudio de mercado para identificar posibles clientes, definir a quién dirigir la publicidad y de qué manera; caracterizar a los clientes (si tienen acceso a telefonía, redes sociales, aplicaciones que les permitan pagar en línea o permitir pago contra entrega). Además, estima empezar con un stock pequeño pero variado, en el proceso de venta identificar cuáles son los productos más demandados y crear ofertas que compensen el valor de todos los productos. Además, estima que el modelo de cola larga parecería pertinente dado que se ofrecerían productos que no tienen mucha demanda, pero que se venden de manera continua, lo cual permite ganancia, no es necesario un almacén físico con muchas existencias para satisfacer la demanda.

Matemáticamente, A₃ especifica que, en un comienzo (a corto plazo), el modelo de costo parecería tener un comportamiento lineal (aunque no aclara cuántas variables) de acuerdo a ciertos costos fijos y costos variables (transporte de los productos, impuestos, gastos de representación, valor de un lugar de almacenamiento, posibilidades de comprar o rentar). Además, aclara que después de un tiempo la dinámica del microemprendimiento irá indicando variaciones y seguramente aparecerán datos tabulares que permitan introducir análisis de gráficos, a partir de ajustes polinomiales que informen sobre el comportamiento del sistema.

Dado que esta idea inicial proyectada por A₃ demandaba un capital mayor al presupuestado, planteó una segunda opción de microemprendimiento: armado y venta de tablas, desayunos y canastas sorpresa para eventos. Luego de formular diversas preguntas a partir de la generatriz, realizó una tabla (ver Tabla 3) con los principales insumos para llevar a cabo este segundo proyecto:

MICROEMPRESARIADO: TABLAS, DESAYUNOS Y CANASTAS SORPRESA			
Materiales no perecederos	Materiales perecederos	Precios	Transporte
Tablas	Quesos, jamones	Por libras	Reclamar en tienda
Vinos, gaseosas, cervezas	Embutidos, salsas	Por número de ingredientes	Domicilio: sin recargo después de cierto monto
Cintas, frascos, accesorios	Mermeladas, frutas, panes, galletas	Según tamaño de tabla	Canales de venta WhatsApp, Facebook, Instagram, TikTok
Palillos, servilletas, bolsas, etiquetas	Chocolates, frutos secos, flores	Según material de tabla	
	Aceitunas, enlatados, huevos, especias	Según marca de productos	
Formas de pago	Transferencias, aplicación, PSE TC, efectivo, contra entrega		

Tabla 3: Insumos del microempresariado

La integrante A₃ formula una función de costo de producción en la cual se relacionan n_i factores productivos: n_1 : mano de obra, n_2 : maquinaria (utensilios), n_3 : materia prima, n_i : otros suministros. De acuerdo a las variables consideradas, realizó un estudio de manera más gráfica que analítica o numérica, no especifica un modelo algebraico-funcional en términos de las variables mencionadas. Además, determinó que la producción tiene un comportamiento creciente. Según estimaciones referidas a su entorno geográfico, en el quinto mes y teniendo en cuenta que es un mes especial, puede alcanzarse un máximo relativo, así como también en el noveno y décimo segundo mes (Gráfico 1).

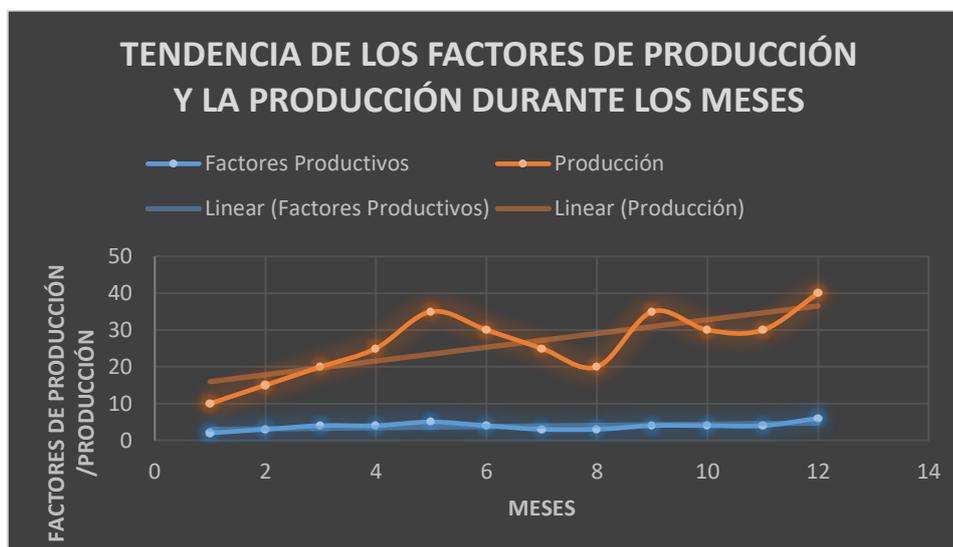


Gráfico 1: Tendencia de los factores productivos y la producción

Fuente: elaboración propia de A₃

Ante el análisis anterior, el promedio de factores de producción sería de 3,83, y la producción promedio de 26,25 tablas de desayuno mensuales. De esta manera los costos deben promediarse para mantenerlos aproximadamente constantes durante

los 12 meses. Según se aprecia en el Gráfico 1, A_3 considera una aproximación lineal para los factores productivos y otra para la producción, o sea, cantidad de unidades (tablas de desayuno) mensuales.

Retomando la función de costos, la curva de costo total CT representa los costos en los que se incurre en términos del nivel de actividad. En el Gráfico 2, elaborado a partir de la tabla contigua, se representan las curvas de costo total (en color naranja), la de costos fijos y la de costos variables.

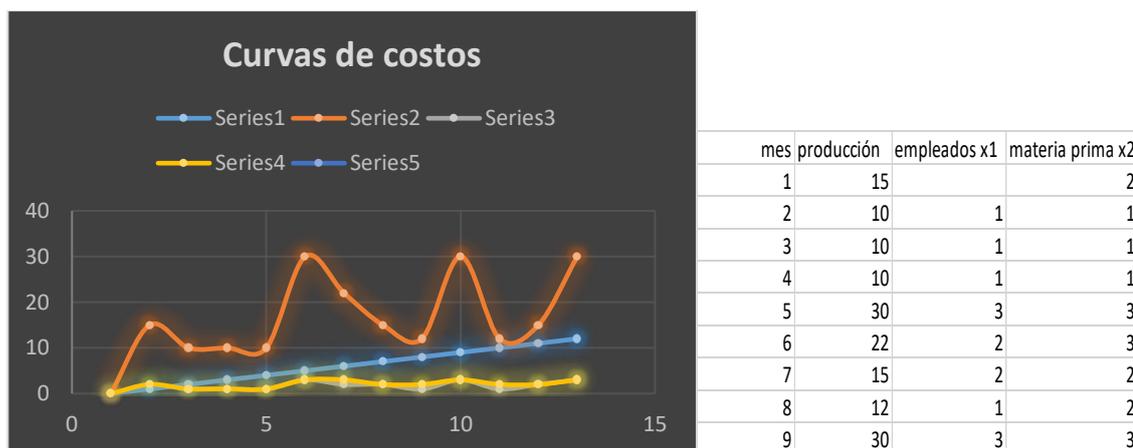


Gráfico 2: Curvas de costos

Fuente: elaboración propia de A_3

Definiendo los costos totales como la suma de los costos fijos (CF) y variables (CV), es: $CT = CV + CF$, teniendo en cuenta que CV depende de más de una variable, como, por ejemplo, los precios de la materia prima, la cantidad de materia prima, la mano de obra, y estos a su vez dependen de la demanda que, según las proyecciones, varía de acuerdo al mes del año. Así, A_3 da a entender que implícitamente la función de costo es una composición de funciones, sus variables a su vez dependen de otras.

Considerando una función de costos a corto plazo, la ecuación del costo total medio se obtiene dividiendo el costo total CT por las unidades producidas Q , así $CTP = \frac{CT}{Q}$. Es decir, el costo total medio es la suma del costo fijo medio y del costo variable medio: $CTP = \frac{CV}{Q} + \frac{CF}{Q}$

El costo fijo medio es decreciente para ciertos niveles de actividad. Al ser un costo fijo, a medida que aumenta la producción el costo a imputar a cada unidad es cada vez menor. El costo variable medio (costo variable por unidad) puede ser decreciente en una fase inicial al coincidir con los volúmenes de actividad en los que la función de producción tiene pendiente creciente, pero a medida que comienza a cumplirse la ley de la productividad marginal decreciente el costo variable medio

comienza a ascender. La pendiente aumenta a medida que la pendiente de la función de producción se va haciendo más plana.

Analizando la interacción entre estos dos tipos de costos, la curva de costo total medio presenta inicialmente una pendiente descendente, es decir que el nivel de actividad con costo fijo medio y costo variable medio son decrecientes, pero a medida que la actividad aumenta y el costo variable medio crece, la curva de costo total medio cambia de pendiente y comienza a ascender. El Gráfico 3 muestra un ejemplo numérico del cálculo de costos, asumiendo que a lo largo de doce meses se produce una cantidad fija de productos, con un costo fijo de 100 dólares mensuales. Mediante esta tabla dinámica, realizada utilizando el software Geogebra®, fue posible calcular el costo variable, el costo total, el costo fijo medio, el costo variable medio y el costo total medio para cada uno de los doce meses.

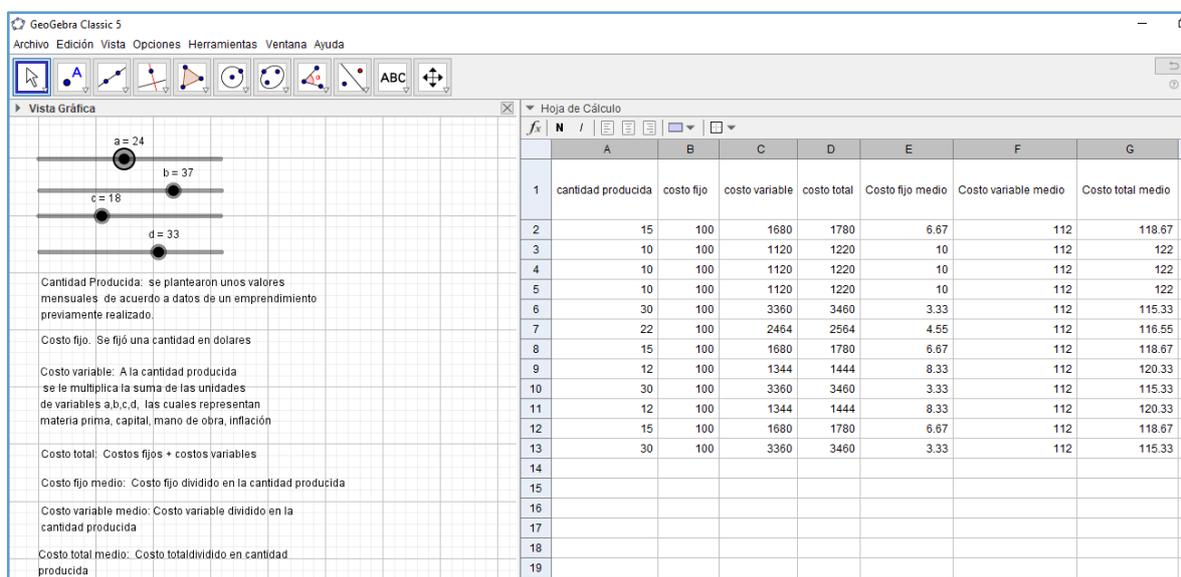


Gráfico 3: Cálculo de costos usando una tabla dinámica

Fuente: elaboración propia de A₃

En general, A₃ asegura que determinar una función de costo no es fácil, sobre todo si es a corto plazo. Los costos variables son inestables debido a que la demanda de un emprendimiento no tiene un comportamiento constante, los insumos perecederos deben proyectarse de acuerdo a la demanda y este costo puede reducirse adquiriendo de la manera menos costosa los insumos no perecederos, pero el retorno a la inversión es a largo plazo.

La interesante actividad de modelización realizada por la integrante A₃ hizo foco principalmente en estudiar y analizar el comportamiento del sistema a modelar, ubicándose así en una segunda etapa del proceso de modelización. El análisis se realizó a partir de gráficos y tablas dinámicas evidenciándose más un minucioso trabajo económico que matemático, o en todo caso, un trabajo numérico. No se explicita un modelo matemático con sus respectivas variables ni se procede a mejorar

ese modelo y generar conocimiento a partir de él. Por otra parte, en la búsqueda de respuestas a la pregunta generatriz se produjo el estudio de saberes referidos a la economía tales como costos, diferentes tipos de costos, gráficos de las funciones de costos, y se produjo el encuentro con saberes relativos a la matemática como ser el estudio del comportamiento de funciones.

Producción de Integrantes A₆ y A₇:

Las estudiantes A₆ y A₇ consultaron las diferentes maneras de medir los costos (Mankiw, 2017), por ejemplo, costos explícitos e implícitos, costos fijos y variables, CTP (costo total promedio), CFP (costo fijo promedio), CVP (costo variable promedio), CM (costo marginal), indagaron sobre las curvas típicas de estas funciones y sobre la relación entre el costo total promedio a corto y largo plazo, en vistas de poder generar un modelo general de costo para el emprendimiento.

Para comprender las decisiones que toman las empresas, A₆ y A₇ consideran importante entender que lo que un emprendedor quiere lograr generalmente es maximizar sus beneficios. Los beneficios de una empresa se calculan restando los costos totales a los ingresos totales. El ingreso total es igual a la cantidad de bienes que la empresa produce multiplicada por el precio al que los vende. Para calcular los costos totales se debe decidir si en ellos se van a considerar los costos implícitos y los costos explícitos. Los costos explícitos son los costos de los insumos que requieren que la empresa desembolse dinero mientras que los costos implícitos son los costos de los insumos que no requieren que la empresa desembolse dinero pero que tienen un valor económico y afectan la rentabilidad de la empresa.

La distinción entre los costos explícitos y los implícitos resalta una diferencia importante entre la manera en que un economista analiza una empresa y la forma en que lo hace un contador. Los economistas se interesan en estudiar cómo las empresas toman sus decisiones de producción y fijación de precio. Los contadores se ocupan de llevar el control de todo el dinero que entra y sale de la empresa por lo que miden los costos explícitos, pero normalmente hacen caso omiso de los implícitos. En este caso, las estudiantes A₆ y A₇ enfocan su trabajo desde el punto de vista del economista.

Con el objetivo de esbozar un modelo que describa el cálculo de costos de un microemprendimiento, es necesario, según afirman A₆ y A₇, considerar que la elección del modelo dependerá de la naturaleza del microemprendimiento, la disponibilidad de datos y la complejidad que se desee abordar en el análisis de costos. Es recomendable contar con conocimientos en matemática o buscar asesoramiento profesional para utilizar modelos matemáticos más avanzados. Además, las estudiantes consideran importante recordar que estos modelos matemáticos son herramientas que ayudan a tomar decisiones, pero los resultados dependen de la precisión y confiabilidad de los datos y de los supuestos utilizados.

Además, A₆ y A₇ consideran que un modelo económico es simplemente un esquema teórico y no existe razón inherente por la que deba ser matemático (Chiang,

2006). Los modelos matemáticos son simplificaciones de la realidad y no tienen en cuenta todas las complejidades y factores externos que pueden influir en los costos de, por ejemplo, un microemprendimiento. Por lo tanto, es recomendable combinar el análisis matemático con el juicio empresarial y la experiencia, para obtener una evaluación completa de los costos.

A modo de ejemplo, para entender cómo de los datos de costos totales se pueden obtener varias medidas relacionadas con los costos en la fabricación de galletas, A₆ y A₇ consideraron la siguiente tabla (Mankiw, 2017) (ver Tabla 4):

Nº de trabajadores	Producción (cantidad de galletas producida en una hora)	Producto marginal del trabajo	Costo de la fábrica \$	Costo de los trabajadores	Costos totales de los insumos (costo de la fábrica + costo de los trabajadores)	Costo fijo promedio	Costo variable promedio	Costo total promedio	Costo marginal
0	0	---	30	0	30	---	---	---	---
1	50	50	30	10	40	0,60	0,20	0,80	0,20
2	90	40	30	20	50	0,33	0,22	0,56	0,25
3	120	30	30	30	60	0,25	0,25	0,50	0,33
4	140	20	30	40	70	0,21	0,29	0,50	0,50
5	150	10	30	50	80	0,20	0,33	0,53	1,00
6	155	5	30	60	90	0,19	0,39	0,58	2,00

Tabla 4. Ejemplo de costos de un emprendimiento

Fuente: Mankiw, 2017

La función de producción en el Gráfico 4 relaciona el número de trabajadores contratados y la cantidad de producción. En este caso, el eje horizontal representa el número de trabajadores contratados, tomado de la primera columna de la Tabla 4, mientras que el eje vertical representa la cantidad de producción, obtenida de la segunda columna. A medida que aumenta el número de trabajadores, la función de producción se vuelve menos pronunciada, crece con menos rapidez, lo que refleja una disminución en el producto marginal (columna 3 de la Tabla 4), considerado este último como el incremento de la producción que se obtiene de una unidad adicional del insumo, en este caso, agregando un trabajador más.

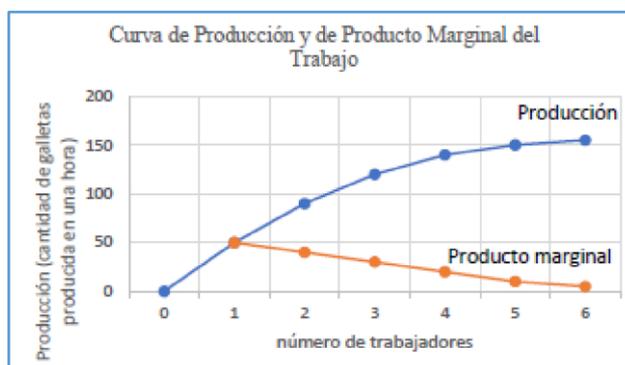


Gráfico 4: Curvas que muestra la relación producción-número de trabajadores

Fuente: elaboración propia de A₆ y A₇

La curva de costos totales en el Gráfico 5 representa la relación entre la cantidad producida y los costos totales de producción. Aquí, el eje horizontal muestra la cantidad de producción, tomada de la segunda columna de la Tabla 4, mientras que el eje vertical muestra los costos totales, extraídos de la sexta columna. A medida que aumenta la cantidad producida, la curva de costos totales se vuelve más empinada debido al producto marginal decreciente. El Gráfico 6 muestra la representación gráfica del costo total promedio (CTP), costo fijo promedio (CFP), costo variable promedio (CVP) y costo marginal (CMg) de una fábrica de galletas. Todas estas curvas se obtuvieron en base a los datos de la Tabla 4.

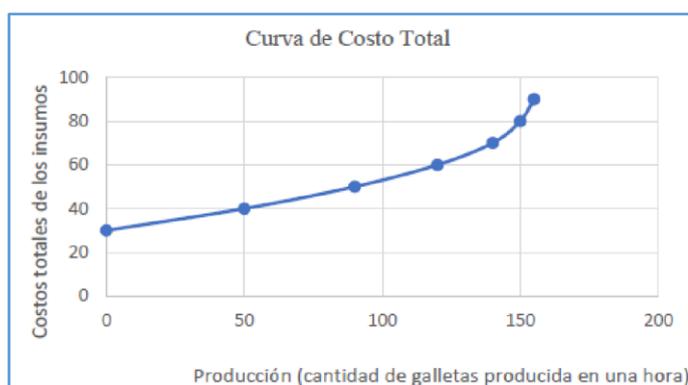


Gráfico 5: Curvas que muestra la relación producción-costos

Fuente: elaboración propia de A₆ y A₇

Estas curvas de costos muestran características típicas de muchas empresas, como las siguientes:

- 1) el costo marginal aumenta con la cantidad de producción;
- 2) la curva de costo total promedio tiene forma de U;
- 3) la curva de costo marginal interseca la curva de costo total promedio en el mínimo de costo total promedio.

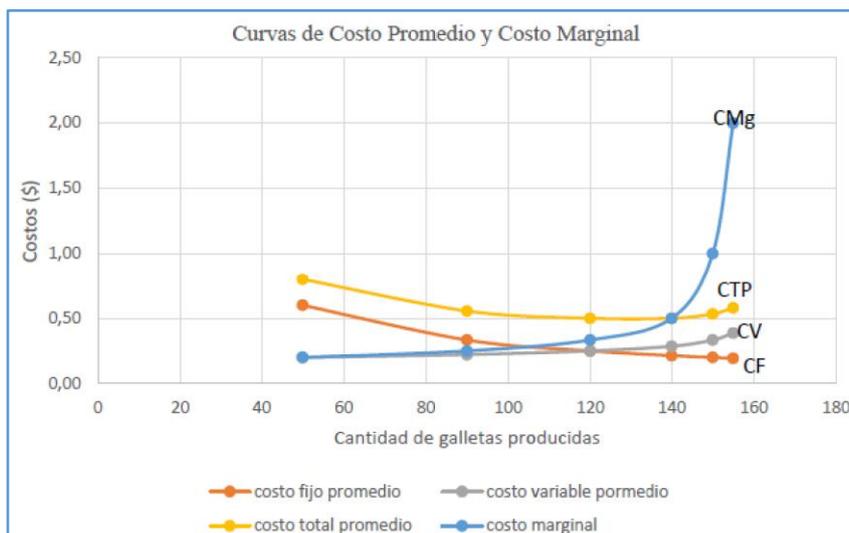


Gráfico 6: Curvas de costo en función de la producción

Fuente: elaboración propia de A₆ y A₇

El trabajo realizado por A₆ y A₇ se ubicó más específicamente en un entorno numérico y gráfico. Realizaron un análisis de las principales características de un microemprendimiento pero no llegaron a formular un modelo matemático y trabajar con él sino que extrajeron conclusiones a partir de un marco numérico y gráfico. La actividad de modelización se centró principalmente en analizar las características generales del sistema, lo que correspondería a la segunda etapa de modelización según la TAD, dejando en claro las dificultades para encontrar un modelo matemático explícito que simule la realidad. Por otra parte, la búsqueda de respuestas a la pregunta generatriz y sus derivadas produjo principalmente el estudio de una organización económica referida a costos, diferentes tipos de costos, gráficos de las funciones de costos y el encuentro con una organización matemática en torno al comportamiento de funciones a partir de sus gráficos.

9. Análisis de los resultados

De las producciones realizadas durante el desarrollo del REI, se detectan diversos modelos, algunos explícitamente matemáticos y otros que se limitan a analizar las variables y las características generales del sistema, ver Tabla 5.

Estudiante(s)	Modelo obtenido
A ₁	$C(v_1, v_2, \dots, v_n, IPC_m, m) = C_F(IPC_m) + C_V(v_1, v_2, \dots, v_n, IPC_m, m) =$ $= p_u \cdot \frac{IPC_m - IPC_A}{IPC_A} + h \cdot \frac{IPC_m - IPC_A}{IPC_A} + \sum_{i=1}^n \left[\left(\sum_{j=1}^m c_{ij} p_j \cdot \frac{IPC_m - IPC_A}{IPC_A} \right) v_i \right]$ $+ e \cdot \frac{IPC_m - IPC_A}{IPC_A} \cdot \sum_{i=1}^n v_i + H(m) \cdot \sum_{i=1}^n t_i \cdot v_i$

	con p_u : costo de la publicidad, h : costo de las herramientas, e : costo del empaquetado. Análisis económico del sistema a modelar.
A ₂	$C(q) = C_F + C_V$, $C(q) = (155500 + C_I + C_S) + 371,41 \cdot q$ Con C_I el costo de los impuestos y C_S , de los servicios. Cálculos numéricos.
A ₄ y A ₅	A ₄ y A ₅ obtuvieron modelos similares al de A ₂ .
A ₃	$CT = CV + CF$ Análisis económico y gráfico. No desarrolla el modelo matemático formulado.
A ₆ y A ₇	Análisis económico y gráfico. No explicitan modelo matemático.

Tabla 5: Modelo obtenido por cada integrante

Las producciones de los integrantes A₁ hasta A₇ permiten identificar que, durante la experiencia, sólo A₁ logró alcanzar la tercera etapa de modelización según la TAD, ya que el desarrollo del modelo matemático y el trabajo matemático sobre él produjo conocimiento que al inicio del REI no estaba disponible. En cuanto a las organizaciones encontradas o reencontradas en la búsqueda de respuesta a la pregunta generatriz y derivadas, se observa principalmente un análisis económico del sistema a modelar y el estudio de saberes relacionados con las características del sistema. Sólo la integrante A₁ realizó un trabajo más matemático además del económico. En resumen, los saberes incorporados al medio didáctico, presentes en el desarrollo del REI, son los que se detallan en la tabla siguiente (Tabla 6):

Organizaciones matemáticas relativas a	Organizaciones económicas relativas a
Álgebra matricial. Funciones reales de varias variables. Funciones lineales de una y más variables. Estudio de curvas. Crecimiento. Decrecimiento.	Costos. Costos fijos. Costos variables. Inflación. Índice de precio al consumidor. Costo promedio. Costo marginal. Costos implícitos y explícitos. Gráfico de la función de costo.

Tabla 6: Saberes estudiados en el REI

Los resultados dan cuenta de la amplitud de la pregunta generatriz, la cual produce el encuentro con diferentes organizaciones matemáticas y económicas lo que confirma el desarrollo de un REI codisciplinar. El estudio podría ampliarse a medida que el recorrido se prolonga en el tiempo por algunas sesiones más.

10. Conclusiones

Este trabajo analiza las producciones realizadas por estudiantes de posgrado durante el desarrollo de un REI codisciplinar, bajo la modalidad on-line. En la descripción se determina que la mayoría de los integrantes, excepto uno que alcanzó la tercera etapa, logra llegar a una segunda etapa de modelización matemática debido posiblemente a que realizaron un profundo análisis de las características del sistema a modelar. Los modelos obtenidos corresponden a dos tipos: uno explícitamente matemático y otro que se limita a analizar las variables y las características generales del sistema como, por ejemplo, el rol de la inflación en los precios. Además, en la

búsqueda de respuestas a la pregunta generatriz y derivadas, se observa principalmente el estudio e investigación de saberes económicos relacionados con las características del sistema, sólo una integrante realizó un trabajo más matemático además del económico. Por otra parte, los resultados confirman la amplitud de la pregunta generatriz, la cual produce el encuentro con diferentes organizaciones matemáticas (relativas a funciones lineales de una o más variables, álgebra matricial, etc.) y organizaciones económicas (referidas al cálculo de costos y diferentes tipos de costos, entre otros) lo que confirma el desarrollo de un REI codisciplinar. De esta manera, este trabajo muestra una actividad de modelización, posible de implementarse en los últimos años de una enseñanza secundaria o en la universidad, ajena a la mayoría de las instituciones escolares que persiguen un paradigma tradicional de enseñanza.

11. Referencias bibliográficas

- Barquero, B. (2009). *Ecología de la Modelización Matemática en la enseñanza universitaria de las Matemáticas*. Tesis doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona.
- Barquero, B., Bosch, M., Gascón, J. (2011). Los recorridos de estudio e investigación y la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las ciencias experimentales, *Enseñanza de las Ciencias*, 29 (3), 339-352.
- Cassini, A. (2011). Teorías y modelos según Klimovsky. *Análisis Filosófico XXXI* N° 1, 69-87.
- Chevallard, Y. (1984). Le passage de l'arithmétique a l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège – Première partie. L'évolution de la transposition didactique, *Petite x*, (5), 51-94
- Chevallard, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège. Deuxième partie: perspectives curriculaires : la notion de modélisation. *Petite x*, 19, 45- 75.
- Chevallard, Y. (1990). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège. Troisième partie : voies d'attaque et problèmes didactiques. *Petite x*, 23. 5-38.
- Chevallard, Y. (2009). *La notion de PER: problèmes et avancées*. IUFM Toulouse, Francia.
- Chevallard, Y. (2013). Enseñar Matemáticas en la Sociedad del Mañana: Alegato a Favor de un contraparadigma Emergente. *Journal of Research in Mathematics Education*, 2(2), 161-182. <https://doi.org/https://doi.org/10.4471/redimat.2013.26>

- Chiang, A.D., Wainwright, K. (2006). *Métodos fundamentales de economía matemática* (4º edición). México: McGraw-Hill.
- Di Blasi Regner, M., Fasce, C., Santos, S. (2024). *Modelización matemática. Propuestas para su enseñanza*. 1a edición. Buenos Aires, Argentina: Editorial Dunken.
- Falgueras, J. (1994). Unidad de noción bajo los usos del término modelo en las ciencias matemáticas y factuales. *Contextos*, XII/23-24, 221-224.
- Klimovsky, G. (1990). Las diversas acepciones de la palabra 'modelo' y el ejemplo del Capítulo VII de La interpretación de los sueños, reimpresso en Klimovsky (2004), Epistemología y psicoanálisis. Volumen II: Análisis del psicoanálisis, Buenos Aires, Ediciones Biebel, 162-179.
- Mankiw, N. G. (2017). *Principios de economía*. Séptima edición. Cengage Learning Editores.
- Otero, M. R. (2021). *La Formación de Profesores. Recursos para la enseñanza por indagación y el cuestionamiento*. 1a edición. Tandil: Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires. Libro digital, PDF. Archivo Digital: descarga y online. ISBN 978-950-658-551-8.
- Ruiz-Munzón, N. (2010). *La introducción del álgebra elemental y su desarrollo hacia la modelización funcional*. Tesis doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona.
- Ruiz Munzón, N., Bosch, M., Gascón, J. (2015). El problema didáctico del álgebra elemental: Un análisis macro-ecológico desde la teoría antropológica de lo didáctico. *REDIMAT*, Vol 4(2), 106-131. doi: 10.17583/redimat.2015.1386
- Salgado (2019). *Diseño, implementación, análisis y evaluación de un Recorrido de Estudio e investigación en el nivel universitario relativo al cálculo en dos variables*. Tesis doctoral. Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires.
- Salgado, D., Otero, M. R., Parra, V. (2019). A praxeological model of reference related to costs calculation: comparison with the ones developed in a research and study path at university level. *Revista UNION*, vol. 15, no. 55, p. 54-70.
- Suppes, P. (1960). A Comparison of the Meaning and Use of Models in Mathematics and Empirical Sciences, *Synthese*, 12, 287-301.

Diana Patricia Salgado. Doctora en Enseñanza de la Ciencias, Mención Matemática, Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (UNCPBA). Magister en Matemática, Profesora en Matemática y Licenciada en Matemática, Universidad Nacional del Sur (UNS). Investigadora del Núcleo de Investigación en Ciencias y Tecnología (NIECyT, UNCPBA). Profesora Adjunta con Dedicación Exclusiva del Departamento de Matemática (UNS), Bahía Blanca, Buenos Aires, Argentina.

Email: dsalgado@uns.edu.ar