UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
firma invitada
Abril de 2024, Número 70
ISSN: 1815-0640

Viviana Angélica Costa

Es nacida en la ciudad de La Plata, Provincia de Buenos Aires, Argentina. Estudió la carrera de Licenciatura en Matemática obteniendo en el año 1989 el título de Licenciada en Matemática por la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional de La Plata. Luego, cursó estudios de posgrado en la Universidad de Buenos Aires obteniendo el título de Magister en Simulación Numérica y Control en el año 2002. Posteriormente en el año 2013 obtiene el título de Doctora en Enseñanza de las Ciencias, Mención Matemática, por la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (UNCPBA). Actualmente se desempeña en el cargo de Profesor Titular, con dedicación exclusiva, a cargo de la cátedra de Matemática B, en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de La Plata. Desde el año 2009 es Coordinadora de la Unidad de Investigación, Desarrollo, Transferencia y Extensión denominada "Investigación en Metodologías Alternativas para la Enseñanza de las Ciencias (IMApEC) en el departamento de Ciencias Básicas de la Facultad de Ingenieria de la Universidad Nacional de La Plata. Es colaboradora del Núcleo De Investigación En Educación En Ciencia Y Tecnología (NIECyT), dependiente de la Facultad de Ciencias Exactas de la UNCPBA que realiza investigación básica y aplicada en Educación en Ciencias y Tecnología, desde una perspectiva cognitiva, didáctica y epistemológica, enfatizando la pluralidad de marcos teóricos y abordajes metodológicos. http://niecyt.exa.unicen.edu.ar/es/index.html Además, forma parte del equipo docente de la carrera de posgrado Maestría y Especialización en Docencia Universitaria de la Universidad Tecnológica Nacional, Regional La Plata. Es investigadora categorizada y directora del proyecto de investigación científica: "Articulación en la enseñanza en Ciencias Básicas en las carreras de Ingeniería" acreditado por la Secretaría de Ciencia y Técnica de la UNLP. Dirige becarios y tesistas de grado y posgrado. Ha sido directora y editora de la Revista UNIÓN en el período de 2021 a 2023. Es miembro del Instituto GeoGebra de La Plata, desde su creación en el año 2015.

E-mail: vacosta@ing.unlp.edu.ar

Perfil de Google Académico:
https://scholar.google.com.ar/citations?user=Dmpz91wAAAAJ&hl=es

ISSN: 1815-0640
Número 70. Abril 2024
Páginas 1-28

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
firma invitada

Enseñanza del Cálculo Vectorial en carreras de Ingeniería

Teaching Vector Calculus in Engineering courses

Viviana Angélica Costa

Resumen

Este artículo destaca la importancia del Cálculo Vectorial, en especial los conceptos de campo vectorial, rotor, divergencia, flujo y circulación, como una herramienta matemática fundamental con amplias aplicaciones en diversas disciplinas de ingeniería y física. Se enfatiza el papel crucial de una comprensión profunda para abordar fenómenos físicos complejos y modelar sistemas multidimensionales. El estudio evalúa la efectividad de una estrategia didáctica que vincula conceptos matemáticos con escenarios de ingeniería del mundo real para mejorar el aprendizaje y la comprensión de los estudiantes. Además, se destaca cómo la estrategia fomenta la motivación, la participación activa y la conexión significativa de los conocimientos adquiridos, preparando así a futuros ingenieros para enfrentar desafíos profesionales futuros.
Palabras clave: Cálculo Vectorial, enseñanza y aprendizaje en carreras de ingeniería, campo vectorial, estrategia didáctica, aprendizaje significativo, motivación.

Abstract

This article highlights the importance of Vector Calculus, especially the concepts of vector field, rotor, divergence, flow and circulation, as a fundamental mathematical tool with wide applications in various disciplines of engineering and physics. The crucial role of deep understanding in addressing complex physical phenomena and modeling multidimensional systems is emphasized. The study evaluates the effectiveness of a teaching strategy that links mathematical concepts with real-world engineering scenarios to improve student learning and understanding. In addition, it highlights how the strategy encourages motivation, active participation and the meaningful connection of acquired knowledge, thus preparing future engineers to face future professional challenges.
Keywords: Vector Calculus, teaching and learning in engineering careers, vector field, teaching strategy, meaningful learning, motivation.

Resumo

Este artigo destaca a importância do Cálculo Vetorial, especialmente os conceitos de campo vetorial, rotor, divergência, fluxo e circulação, como ferramenta matemática fundamental com amplas aplicações em diversas disciplinas da engenharia e da física. O papel crucial da compreensão profunda na abordagem de fenômenos físicos complexos e na modelagem de sistemas multidimensionais é enfatizado. O estudo avalia a eficácia de

uma estratégia de ensino que liga conceitos matemáticos a cenários de engenharia do mundo real para melhorar a aprendizagem e a compreensão dos alunos. Além disso, destaca como a estratégia incentiva a motivação, a participação ativa e a conexão significativa dos conhecimentos adquiridos, preparando assim os futuros engenheiros para enfrentar futuros desafios profissionais..
Palavras-chave: Cálculo Vetorial, ensino e aprendizagem em carreiras de engenharia, campo vetorial, estratégia de ensino, aprendizagem significativa, motivação..

1. Introducción

1. 1. El Cálculo Vectorial

El *Cálculo Vectorial* es una rama de las matemáticas que se ocupa de los vectores y las operaciones matemáticas que se realizan con ellos, como la diferenciación e integración de funciones vectoriales (Marsden, J. E., Tromba, A. J., & Mateos, M. L., 1991).

El concepto central en esta área es el de *campo vectorial*. Se refiere a las funciones que asignan un vector a cada punto en un espacio, es decir, un campo que tiene un vector asociado en cada punto.

También, en el Cálculo Vectorial, el *rotor* y la *divergencia* son dos operadores centrales que se aplican a *campos vectoriales,* que involucran en su descripción las derivadas parciales de las componentes del campo. El rotor (también conocido como *rot* o *curl*) de un campo vectorial, es una magnitud vectorial que permite describir cómo el campo "gira o circula alrededor de un punto en el espacio", pudiéndose interpretar además su magnitud como la "tasa de giro o rotación local del campo vectorial en un punto específico". Por otro lado, la *divergencia* (magnitud escalar) de un campo vectorial describe cómo el campo "se dispersa" o "se expande" desde un punto en el espacio.

Además, se encuentran los concetos de *circulación* y *flujo*, que resultan del cálculo de integrales de funciones vectoriales. La importancia de la circulación y flujo, así como de las integrales de funciones vectoriales, en ingeniería es significativa, especialmente en la ingeniería mecánica, fluidodinámica, ingeniería eléctrica y muchas otras disciplinas. Por ejemplo:

- Dinámica de fluidos: en ingeniería mecánica y aeroespacial, el estudio de la circulación y el flujo es esencial para comprender el comportamiento de los fluidos alrededor de objetos, como aviones, automóviles y estructuras. Las integrales de funciones vectoriales se utilizan para calcular propiedades como la circulación y el flujo de un campo vectorial que representa la velocidad de un fluido en un determinado punto.

- Diseño de sistemas de tuberías: en la ingeniería civil y mecánica, el diseño eficiente de sistemas de tuberías y conductos implica comprender el flujo de fluidos a través de ellos. Las integrales de funciones vectoriales permiten calcular la cantidad de fluido que pasa a través de una superficie dada y son útiles para optimizar el diseño de sistemas de tuberías (*caudal*).

- Electromagnetismo: en ingeniería eléctrica y electrónica, las integrales de funciones vectoriales se aplican en el contexto de campos electromagnéticos. La circulación de un campo magnético alrededor de una trayectoria cerrada y el flujo de un campo eléctrico a través de una superficie son conceptos importantes que se estudian mediante integrales de funciones vectoriales.

- Análisis de estructuras y tensiones: en ingeniería estructural, el estudio de las fuerzas y tensiones en materiales y estructuras implica considerar el flujo de fuerzas a través de superficies. Las integrales de funciones vectoriales son herramientas clave para analizar la distribución de fuerzas y momentos en estructuras complejas.

Esta área de estudio es fundamental en campos como la física, la ingeniería y la informática, ya que además permite modelar y comprender fenómenos y sistemas multidimensionales. Estas herramientas matemáticas son esenciales para entender y resolver una amplia gama de problemas en diversas disciplinas de la ingeniería. Se destacan algunas de las razones más importantes de su relevancia:

- *Descripción de fenómenos físicos*: el Cálculo Vectorial permite describir y analizar fenómenos físicos que involucran magnitudes vectoriales, como fuerzas, campos eléctricos y magnéticos, velocidades y aceleraciones. El rotor y la divergencia son operadores que ayudan a entender la variación espacial de campos vectoriales, proporcionando información valiosa sobre cómo fluyen o se dispersan las cantidades físicas en un sistema.

- *Modelado de sistemas dinámicos*: en ingeniería, muchos sistemas son dinámicos y cambian con el tiempo. El Cálculo Vectorial es esencial para modelar y analizar estos sistemas, como el movimiento de partículas, la transferencia de calor, y la propagación de ondas. La aplicación de la divergencia y el rotor es crucial para describir cómo ciertos fenómenos se distribuyen en el espacio y cómo interactúan entre sí.

- *Ecuaciones diferenciales parciales*: varias ecuaciones diferenciales parciales (EDP) que modelan fenómenos físicos en ingeniería involucran derivadas parciales y campos vectoriales. El Cálculo Vectorial es la base matemática para abordar y resolver estas EDP, que son comunes en problemas de transporte de calor, flujo de fluidos, y electromagnetismo. El rotor y la divergencia son operadores importantes en la formulación de EDP, ayudando a expresar las leyes fundamentales de conservación y a entender la dinámica de los sistemas.

- *Ingeniería eléctrica y electromagnetismo*: en disciplinas como la ingeniería eléctrica, el Cálculo Vectorial es esencial para comprender y analizar campos eléctricos y magnéticos. La divergencia y el rotor son herramientas clave para describir la distribución de carga eléctrica y el flujo de corriente en circuitos. Estos conceptos son fundamentales para el diseño y análisis de dispositivos electromagnéticos, antenas, y sistemas de comunicación.

- *Aplicaciones en mecánica de fluidos*: el Cálculo Vectorial es fundamental en la mecánica de fluidos para describir el movimiento de fluidos en sistemas complejos, como tuberías, canales y dispositivos de flujo. La divergencia y el rotor son cruciales para entender la conservación de la masa y la cantidad de movimiento en un fluido, así como para modelar la rotación y la expansión de los flujos.

1.2. Su enseñanza y aprendizaje

La *enseñanza del Cálculo Vectorial*, en el nivel universitario, suele comenzar con la introducción de conceptos básicos, que incluyen: vectores en el plano y en el espacio, su definición, operaciones, representaciones vectoriales en el plano y en el espacio. Luego se continua, con las funciones a valores vectoriales, definición, gráficas, derivadas de las funciones vectoriales e integrales de funciones vectoriales. Se avanza con la definición del concepto de campo vectorial, y los operadores divergencia y rotacional de un campo vectorial. Integrales que involucran campos vectoriales: circulación y flujo. También se pueden estudiar líneas de campo, superficies equipotenciales para finalmente enunciar los teoremas de Green, Gauss y Stokes. Estos son algunos de los temas fundamentales en Cálculo Vectorial que, dependiendo del curso y la institución educativa, puede tener variaciones en la profundidad y enfoque con que se enseñe.

En las carreras de ingeniería, estos conceptos se estudian en general en el ciclo básico, y es común a todas las especialidades. Una adecuada conceptualización de sus nociones centrales es esencial para alumnos de esas carreras, ya que les proporciona a los estudiantes herramientas básicas e indispensables para modelar matemáticamente diversos fenómenos físicos a partir de una representación vectorial. Tal como se mencionó, las herramientas matemáticas que proporciona el Cálculo Vectorial a un ingeniero, serán esenciales para comprender y modelar diversos fenómenos físicos, por ejemplo, en electromagnetismo y en mecánica de los fluidos.

Además, puede ser que en los cursos se incluya la utilización de algún software de cálculo simbólico o herramientas de visualización para ayudar en la comprensión de conceptos y en la resolución de problemas más complejos, y la resolución de problemas de práctica que ayuden a los estudiantes a comprender y aplicar los conceptos aprendidos.

En relación a su *aprendizaje*, el estudio del Cálculo Vectorial es complejo en la medida que requiere de disponer de un pensamiento matemático avanzado (Giménez, Machín, 2003). En particular, un estudio reciente, identifica los desafíos que enfrenta un grupo de estudiantes de segundo año de ingeniería para comprender el teorema de Stokes en Cálculo Vectorial y se enfoca en detectar los conceptos erróneos encontrados en los conceptos interconectados que forman su base (Thabiso, Pragashni, y Corrinne, 2024).

En particular, los estudiantes de carreras de ingeniería pueden enfrentar los siguientes desafíos:

- Falta de conexión con la práctica, pudiendo tener dificultades para comprender la relevancia y la aplicación de los conceptos abstractos del cálculo vectorial en su futura carrera, que puede afectar su motivación y compromiso con el aprendizaje.
- Dificultades con la visualización de conceptos tridimensionales, como campos vectoriales en el espacio, rotaciones y divergencias, puede resultar desafiante para algunos estudiantes, especialmente aquellos que no tienen una fuerte habilidad espacial.

- Manipulación matemática compleja que implica cálculos avanzados, como integrales de línea, superficiales y de volumen, así como operadores diferenciales vectoriales como el rotor y la divergencia.
- Falta de conexión o significado de los conceptos teóricos aprendidos en el cálculo vectorial con situaciones reales de la ingeniería.
- Complejidad de la terminología y notación específica del Cálculo Vectorial, así como la notación matemática utilizada, pueden resultar confusas para los estudiantes, lo que dificulta la comprensión de los conceptos.

Estas dificultades, se enmarcan en una problemática más general, como es la enseñanza y aprendizaje de la matemática en las Ciencias Básicas en carreras de ingeniería. Esto, es mencionado por diversos autores/investigadores que coinciden en afirmar que el conocimiento matemático en la ingeniería sufre una desarticulación con las demás disciplinas, que se enseña privilegiando el empleo de fórmulas sobre la naturaleza misma del conocimiento matemático, como su origen, las condiciones para que sea factible su uso y las necesidades humanas a las que responde.

1.3. Antecedentes en el tema

Todas, o en gran parte, de las situaciones ingenieriles requieren de un profundo entendimiento del concepto de campo vectorial y las magnitudes asociadas que permiten describir cualitativamente el comportamiento de un fenómeno físico que es modelado por un campo vectorial: rotor y divergencia. Por ello, la importancia de buscar diversas *estrategias didácticas* para mejorar la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo Vectorial.

Algunas propuestas que podrían ser útiles, se enfocan en la visualización, utilizando herramientas, como gráficos 3D, simulaciones y software interactivo, para ayudar a los estudiantes a comprender conceptos abstractos y visualizar campos vectoriales. Otras, proponen, la contextualización, relacionando los conceptos del Cálculo Vectorial con aplicaciones en ingeniería, física y otras disciplinas, presentando problemas y ejemplos que resalten la importancia de los vectores en situaciones del mundo real. Esto ayudaría a los estudiantes a ver la utilidad y aplicabilidad de lo que están aprendiendo. Por otro lado, podría ser una estrategia que coloque el foco en la comprensión conceptual, en lugar de simplemente memorizar fórmulas y procedimientos. Entre otras, las estrategias podrían incluir: integrar actividades con problemas reales que para su resolución requieran el uso de Cálculo Vectorial, la adopción de tecnología educativa, como software de visualización, simulaciones y plataformas en línea, para mejorar la interactividad y la participación de los estudiantes. Además, podría colaborar en el aprendizaje la incorporación de estrategias que en el proceso de enseñanza fomenten la participación de los estudiantes, la comunicación abierta para abordar preguntas, la evaluación formativa, el desarrollo de proyectos grupales que incentive las preguntas y debates para promover un ambiente de aprendizaje activo.

En relación a ello, por ejemplo, Galindo Rivera, y Falk de Losada (2022), relatan como a través de la resolución de problemas, retadores y no rutinarios, propuestos a los estudiantes de ingenierías de la Universidad Antonio Nariño, surgen modos de pensamiento que ellos caracterizan como Pensamiento Vectorial, asociado con representaciones y operaciones vectoriales de objetos matemáticos de diversa índole.

Algunos investigadores proponen contextualizar la enseñanza del Cálculo vectorial vinculando los conceptos con la ingeniería y la física (Costa, Di Domenicantonio, Prodanoff, Tolosa y Guarepi, 2008; Dunn y Barbanel, 2000; Kümmerer, 2002; Camarera, 2009; Zúñiga, 2007; Willcox y Bounova, 2004).

Por otro lado, Baily, Bollen, Pattie, Van Kampen y De Cock (2015), mencionan que es sabido que los estudiantes universitarios de física tienen dificultades para comprender las herramientas matemáticas y aplicarlas en contextos físicos. En especial, encontraron mediante cuestionarios a estudiantes, la prevalencia de concepciones correctas e incorrectas con respecto a la divergencia y el rotor de campos vectoriales, y que la comprensión mejora posterior a la matriculación en curso de física.

Además, Costa y Arlego (2013) proponen una posible estrategia didáctica para la enseñanza del Cálculo Vectorial en carreras de Ingeniería apoyándose en la importancia del rol de la historia para la enseñanza de las ciencias.

Costa, Arlego y Otero (2014, 2015) presentan una propuesta de enseñanza del Cálculo Vectorial en la universidad, denominada Recorridos de Estudio e Investigación (REI), que parte de la premisa de buscar respuestas a una pregunta generatriz: ¿Cómo construir edificaciones sustentable?, que permita estudiar los contenidos del Cálculo Vectorial, con sentido y funcionalidad, conjuntamente con nociones básicas de Física, de Mecánica de los Fluidos y de Termodinámica. Tal modo de enseñar, se enmarca en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), que plantea una enseñanza bajo el paradigma de la pedagogía de la investigación y del cuestionamiento del mundo. Estas investigaciones derivaron en una tesis doctoral en la que se presenta el REI co-disciplinar y los resultados de su implementación en la universidad en carreras de ingeniería (Costa, 2022).

Sáchica-Castillo (2019), propone un laboratorio de física en un curso de Cálculo Vectorial (Facultad de Ingeniería de la Universidad Santo Tomás, Seccional Tunja, Colombia) como escenario para la construcción de los conceptos divergencia y rotacional, diseñado con el objetivo de lograr un aprendizaje significativo de tales conceptos y basándose en las propuestas de contextualización de la matemática con la física (Gallardo, 2009).

En relación a la visualización de campos vectoriales, del Rio (2020), propone en el proceso de enseñanza y de aprendizaje de campos vectoriales, la utilización de recursos educativos digitales interactivos basados en GeoGebra creados para tal fin. Además, Bayés y Costa (2023), presentan la adaptación de algunos de tales recursos para ser usados en dispositivos móviles, y poder generarle más usabilidad a los mismos.

Lohgheswary, Nopiah, Aziz y Zakaria (2018) proponen usar actividades de laboratorio con estudiantes de ingeniería usando herramientas computacionales para identificar tópicos del Cálculo Vectorial y comprender los cálculos matemáticos abstractos. En la misma línea, Godfred, Bayaga y Bosse (2021) proponen el uso de MATLAB como herramienta de visualización para resolver problemas del Cálculo Vectorial, con fututos profesores de zonas rurales.

En relación a las estrategias que incorporan la creación de una comunidad interactiva de aprendizaje para un curso de Cálculo Vectorial que fomenta las habilidades como la resolución de problemas, el pensamiento crítico, la colaboración y la comunicación, Padayachee (2020) demuestra los beneficios de los foros de discusión mediante un análisis que evalúa la calidad de la participación de los estudiantes en esta comunidad de aprendizaje, importantes para el desarrollo y la experiencia de futuros ingenieros. Venkatarayalu (2018) propone incluir en un curso de Cálculo Vectorial elementos interactivos en el diseño de los contenidos del e-learning, mediante la integración con el sistema de gestión del aprendizaje en línea.

También en el marco de la TAD, Caballero, Palencia, y Redondo (2022), cuestionan la enseñanza de la matemática en carreras de ingeniería. La describen aplicacionista y monumentalista, y a cambio proponen un REI para el aprendizaje significativo de la circulación de campos vectoriales para estudiantes de ingeniería industrial.

Hidalgo, Lezama, y Ríos (2022) acuerdan en que existen claras dificultades cuando se desea coordinar curricularmente la enseñanza del Cálculo y la Física universitaria para las carreras de ciencias e ingeniería. Además, observan que los estudiantes presentan grandes dificultades para lograr una comprensión satisfactoria de los conceptos relacionados con el Cálculo Diferencial e Integral y del Cálculo Vectorial, y por ello proponen una enseñanza centrada en el desarrollo del pensamiento Infinitesimal Leibniziano en el proceso de la matematización del flujo de un campo vectorial.

Padayachee, y Khemane (2023), en coincidencia con la problemática de la enseñanza y aprendizaje del Cálculo Vectorial proponen el uso de actividades en GeoGebra para comprender conceptos claves para de esta disciplina.

2. Estrategia didáctica

En respuesta a la problemática planteada vinculada a la enseñanza y aprendizaje del Cálculo Vectorial, se presenta aquí una *estrategia didáctica,* para ser implementada en un curso de Cálculo Integral y Vectorial con estudiantes de ingeniería aeroespacial y otras ingenierías.

Con estrategia didáctica nos referimos a un conjunto de acciones y técnicas planificadas y estructuradas que un educador utiliza con el objetivo de facilitar el proceso de enseñanza y aprendizaje. Estas estrategias buscan crear un ambiente educativo efectivo, motivador y significativo para los estudiantes. Incluyen métodos, recursos y actividades diseñadas para alcanzar objetivos específicos de aprendizaje, adaptándose a las necesidades y características de los estudiantes (Flores, 2017).

En especial, la estrategia didáctica propuesta se centrará en optimizar el proceso educativo a través de tres aspectos fundamentales:

- *Aprendizaje Significativo*: la metodología se orientará hacia la construcción de conocimientos de manera significativa para los estudiantes. Se buscará que el aprendizaje no sea un mero acto de memorización, sino que esté intrínsecamente vinculado a sus experiencias previas, permitiendo una comprensión profunda y duradera de los conceptos. Para lograr esto, se empleará un enfoque pedagógico que fomente la conexión de nuevos conocimientos con el bagaje cognitivo de los estudiantes (Ausubel, 1983). La teoría de la asimilación de Ausubel, incorpora la noción del conocimiento a priori como fundamento del aprendizaje y propone que el aprendizaje significativo requiere de la activación del conocimiento de estructuras existentes durante o después del estudio. En este sentido, mostrarles a los alumnos en que aplicarán posteriormente los conceptos y herramientas estudiadas del Cálculo Vectorial, promoverá un aprendizaje significativo, y el aprendizaje tendrá sentido, tal como se menciona en Costa (2013).

- *Motivación por Aprender*: la estrategia se fundamentará en la creación de un entorno educativo estimulante y motivador. Se incorporarán elementos que despierten el interés y la curiosidad de los estudiantes, promoviendo un compromiso activo con el proceso de aprendizaje. El uso de recursos multimedia, proyectos prácticos y actividades dinámicas contribuirá a mantener altos niveles de motivación, generando un ambiente propicio para el desarrollo de habilidades y la adquisición de conocimientos. En psicología y filosofía, la motivación es el estímulo que mueve a la persona a realizar determinadas acciones y persistir en ellas para su culminación (Boekaerts, 2002). La estimulación a través de experiencias novedosas enriquece el ambiente de aprendizaje y asociar los conceptos matemáticos abstractos, como es el de campos vectoriales, con situaciones o hechos concretos promovería su estudio. La importancia de la motivación, en el aprendizaje de la matemática es destacada por Pacheco-Carrascal (2016).

- *Articulación de la matemática con la ingeniería*: la estrategia didáctica se diseñará considerando la aplicación práctica y relevancia directa en el ámbito de la ingeniería. Se buscará establecer conexiones claras entre los conceptos teóricos impartidos y su aplicación en situaciones y problemas reales de ingeniería. La incorporación de casos reales, proyectos específicos y colaboraciones con profesionales del campo permitiría a los estudiantes a reconocer la utilidad práctica de los conocimientos adquiridos, fortaleciendo así su preparación para el ejercicio profesional en el área ingenieril. La articulación vertical, permitirá dar una necesaria continuidad, coherencia, secuenciación y gradualidad que debe existir en el proceso de enseñanza y el de aprendizaje integral, construyendo los puentes necesarios por los que los estudiantes tengan oportunidad de transitar por la carrera universitaria (Wortley, 2012; Gascón, 2009; Moscato, 2006; Páez, 2011).

3. Objetivos

La estrategia didáctica a implementar en un curso de Cálculo Integral y Vectorial tiene los siguientes objetivos:

- Vincular los conceptos del Cálculo Vectorial con situaciones del mundo real en especial de la ingeniería.
- Proporcionar significado físico a los campos vectoriales.
- Proporcionar significado físico al cálculo del flujo, circulación, rotor y divergencia.
- Motivar el aprendizaje de los contenidos a partir de conocer su importancia y utilidad para resolver problemas de la ingeniería.
- Situar conceptos matemáticos en el contexto de la ingeniería aeroespacial.
- Exponer el uso que harán de las herramientas matemáticas en materias avanzadas los estudiantes en carreras de ingeniaría.

En este contexto, se postula la siguiente pregunta de investigación: *¿Cómo impacta en el aprendizaje de los estudiantes la implementación de una estrategia* *didáctica en el proceso de enseñanza que articula los conceptos de campo vectorial, rotor y divergencia, con la ingeniería?*

4. Metodología

4.1. Contexto educativo

Población: La población participante de la estrategia didáctica son los estudiantes inscriptos en un curso (aproximadamente 70) de matemática, denominada Matemática B, materia obligatoria para todas las carreras en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de la Plata (FI-UNLP) establecimiento de nivel superior, público, gratuito y estatal, dependiente del Estado Argentino. Las carreras que se dictan son: aeroespacial, agrimensura, civil, computación, electromecánica, electrónica, energía eléctrica, hidráulica, industrial, materiales, mecánica, telecomunicaciones y química.

Matemática B: Es una materia que se ubica en el segundo semestre del primer año, luego de Matemática A, y en el mismo semestre que Física I (Tabla 1) para todas las carreras en FI-UNLP, con una carga horaria semanal de 12 horas.

Contenidos: El eje conceptual y la secuenciación de los contenidos, es el proceso de integración, en una y varias variables, series numéricas, continuando con ecuaciones diferenciales de primer orden y el Cálculo Vectorial. En particular, del Cálculo Vectorial, se estudia: representación vectorial paramétrica de curvas y superficies, campos vectoriales, cálculo y aplicaciones de integrales de línea y de superficie de campos escalares y vectoriales, rotor y divergencia de un campo vectorial, propiedades, campo gradiente, integral de línea de una función escalar, teorema de Green, independencia del camino en integrales de línea, representación vectorial de superficies, dirección normal y superficies orientables, área de una superficie, integral de una función escalar sobre una superficie, integral de flujo, teorema de Stokes y teorema de Gauss.

Organización curricular: La organización curricular en el plan de estudios del Ciclo Básico de todas las carreras en FI-UNLP establece una secuencia lógica y progresiva en la adquisición de conocimientos matemáticos y físicos. En primer lugar, se inicia con Matemática A, donde se abordan los fundamentos del cálculo diferencial en una y varias variables, sentando las bases para comprender magnitudes escalares y vectoriales. Luego, en el segundo semestre, se avanza a Matemática B, donde se profundiza en el cálculo integral, series numéricas, ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden y cálculo vectorial. Paralelamente, se cursa Física I, centrada en mecánica, donde se aplican estos conceptos matemáticos en el estudio de fenómenos físicos. En el semestre siguiente en Física II, que abarca electricidad, magnetismo y electromagnetismo, se continúa utilizando y aplicando los conceptos matemáticos previamente adquiridos.

La materia Matemática B, en particular, juega un papel crucial al proporcionar las bases matemáticas necesarias para comprender los fenómenos físicos abordados en Física I y Física II. Los conceptos de magnitudes escalares y vectoriales, así como el estudio de campos vectoriales, son fundamentales para entender temas como termodinámica, electricidad, magnetismo y electromagnetismo. Estos conocimientos no solo son relevantes en el Ciclo Básico, sino que también sientan las bases para materias avanzadas en áreas tecnológicas y tecnológicas aplicadas.

Ciclo Básico – Materias comunes a todas las carreras		Semestre
Área Matemática	Área Física	
Matemática A: Cálculo Diferencial en una y varias variables	---------------------	1º
Matemática B: Cálculo Integral en una y varias variables, Series Numéricas, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de primer orden y Cálculo Vectorial.	**Física I**: Mecánica.	2º
Matemática C: Series de Potencias, Algebra Lineal, Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales ordinarias.	**Física II**: Electricidad, Magnetismo y Electromagnetismo.	3º
Probabilidades y Estadística		4º

Tabla 1. Plan de estudios y semestre de las materias del Ciclo Básico comunes a todas las carreras en FI-UNLP.

Objetivos de Matemática B: Se espera que en esta materia los estudiantes se familiaricen con los conceptos y métodos más importantes del cálculo integral para funciones a valores reales (en una y varias variables) y para campos vectoriales (en R^2 y en R^3) y que sea capaz de aplicarlos en la resolución de problemas de índole geométrica, física, etc. Es también propósito de la materia que el alumno adquiera los conocimientos iniciales referidos a las ecuaciones diferenciales y a series numéricas, temas cuyo estudio continuará en los siguientes cursos de Matemática.

Competencias: Matemática B comienza a preparar a los estudiantes en la adquisición de habilidades que se vinculan con: identificar, formular y resolver problemas de ingeniería; utilizar de manera efectiva las técnicas y herramientas de cálculo; desempeñarse de manera efectiva en equipos de trabajo; comunicarse con efectividad; actuar con ética, responsabilidad profesional y compromiso social, considerando el impacto económico, social y ambiental de su actividad en el contexto local y global; aprender en forma continua y autónoma y actuar con espíritu emprendedor.

Material educativo: Los estudiantes, para el estudio de los contenidos curriculares, disponen de un Libro de Cátedra (Costa, 2024) elaborado por profesores de la misma. El Libro es descargable en formato digital del sitio web de la materia e impreso en papel por el Centro de Estudiantes de Ingeniería. El Libro constituye el material educativo central del trabajo en el aula. Incluye, aspectos teóricos, prácticos, ejemplos de cálculo, variedades de ejercicios y aplicaciones a la física y a la ingeniería que conectan con saberes de otras disciplinas. Además, incluye enlaces a aplicaciones elaboradas por docentes de la materia, al software de geometría dinámica GeoGebra de libre acceso (del Rio, 2016a, 2016b) y de uso tanto en computadoras como en dispositivos móviles. Estas aplicaciones, presentan simulaciones, cálculos, representaciones gráficas en dos y tres dimensiones, y actividades de autoevaluación.

4.2. Descripción de la estrategia didáctica

La *estrategia didáctica,* que tiene por objetivos los presentados anteriormente, consiste en una charla educativa destinada a los estudiantes de un curso de

Matemática B. En la charla se presentan los temas utilizando un PowerPoint como herramienta visual y es desarrollada por un profesor de asignaturas avanzadas de la carrera de Ingeniería Aeroespacial y de dos colaboradores (ingenieros recientemente graduados en la misma carrera).

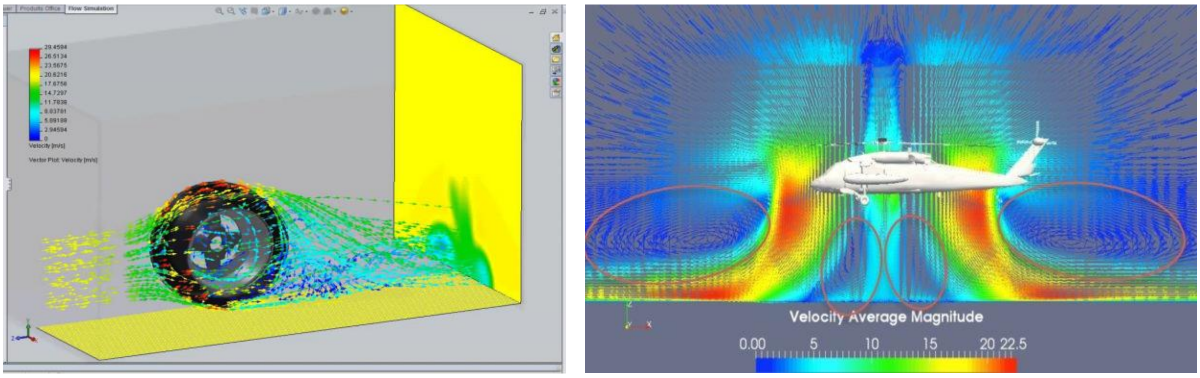
La participación de un profesor especializado en ingeniería aeroespacial tiene por objetivo enriquecer la comprensión de los estudiantes del curso, específicamente en los conceptos de flujo, circulación, rotor y divergencia. La experiencia y conocimientos del profesor en ingeniería permitiría una explicación más clara y aplicada, con ejemplos concretos y relevantes para los estudiantes. Esto complementaría la enseñanza que imparte el profesor del curso, que se enfoca en las propiedades, definiciones, teoremas y cálculos matemáticos. ¿Por qué un ingeniero aeroespacial para invitar? Un ingeniero aeroespacial posee experiencia y conocimientos especializados en el diseño, desarrollo y operación de vehículos y sistemas aeroespaciales. Esto incluye aviones, helicópteros, vehículos espaciales, satélites, misiles y sistemas de propulsión. Algunas de las áreas de especialización dentro de la ingeniería aeroespacial incluyen: aerodinámica, propulsión, estructuras y materiales, control y navegación, ingeniería espacial. En estas áreas de conocimiento, el buen uso y entendimiento del Cálculo Vectorial es fundamental para la resolución de una amplia variedad de problemas en física y en aplicaciones prácticas del mundo real.

Previo a la implementación de la estrategia se organizan encuentros entre el profesor del curso (el investigador de este trabajo) y el profesor invitado, en los que se dialoga y acuerda acerca de los objetivos que se pretenden lograr, el material educativo que se llevará al curso, la duración de la presentación y los cuestionarios previos y posterior a realizar a los estudiantes.

Se acuerda que la charla tenga una duración máxima de dos horas y que se realice posterior al dictado de los temas de campo vectorial, integrales de funciones vectoriales, rotor y divergencia. La charla también tiene como objetivo complementar lo estudiado en el curso, proporcionando una perspectiva práctica y aplicada a los conceptos teóricos enseñados hasta el momento. La experiencia del profesor invitado en ingeniería aeroespacial permitiría a los estudiantes conectar los conceptos abstractos del Cálculo Vectorial con situaciones reales y aplicaciones concretas en el campo de la ingeniería y de cómo estos conceptos se utilizan en la práctica profesional.

La charla se inicia con la presentación de la profesora invitada, Dra. Ana Scarabino de la cátedra de Mecánica de Fluidos del Departamento de Ingeniería Aeroespacial y directora del Grupo de Fluidodinámica Computacional (GFC) de la FI-UNLP del Centro Tecnológico Aeroespacial de dicha Universidad https://gfc.ing.unlp.edu.ar/. La acompañan dos colaboradores: la Ing. Frida Alfaro Rodriguez, integrante del Centro Tecnológico Aeroespacial CTA y el becario Matías Herrera, integrante del grupo GFC, ambos docentes de la cátedra en la que Ana es profesora.

La exposición continua con la proyección de diapositivas que muestra imágenes para visualizar *campos vectoriales* de velocidades de fluidos que modelizan ciertos fenómenos. Por ejemplo, en las Figura 1 y Figura 2, se observan ejemplos de resultados de Fluidodinámica Computacional, siendo esto de interés para los estudiantes participantes, en especial para los de ingeniería aeroespacial.



(a) (b)

Figura 1: (a) Ejemplo de un campo de velocidad del aire alrededor de una rueda. (b) Ejemplo: campo de velocidad del aire inducido por un helicóptero.

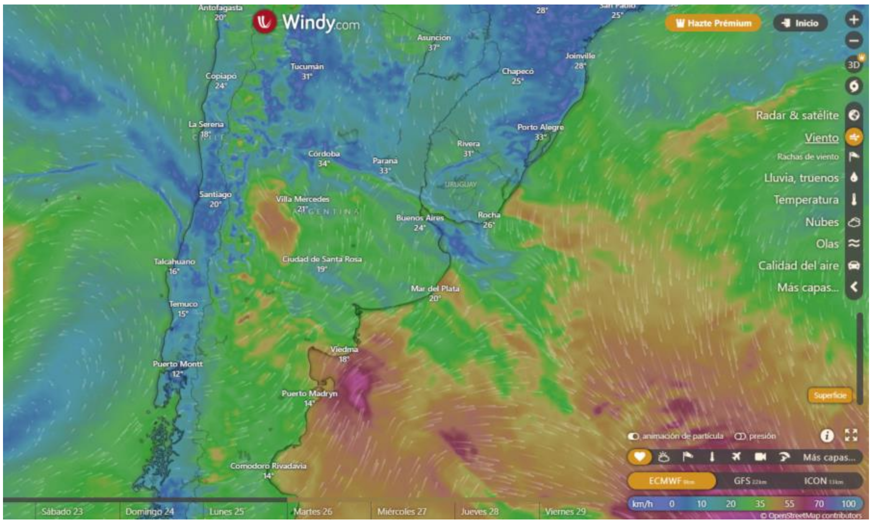
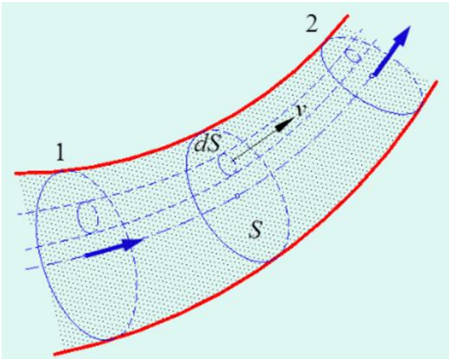


Figura 2: campo de vientos sobre la superficie. Fuente: https://www.windy.com

La profesora invitada, comenta, además, que un campo vectorial es una función que asocia un vector a cada punto de su dominio mientras que un campo escalar asocia un escalar a cada punto de su dominio. Por ejemplo "...*para analizar las características de vuelo de un avión, se realizan pruebas en el túnel de viento, las cuales proporcionan información vital acerca del flujo de aire sobre las alas y alrededor del fuselaje de la nave; para modelar tal situación es necesario describir la velocidad del aire en varios puntos del túnel, utilizando para esto una función que es un campo vectorial*".

Luego, se avanza con recordar el cálculo de la integral de flujo de un campo vectorial a través de una superficie, con el objetivo de darle un significado físico, en este caso, el de caudal. Define, *caudal volumétrico,* como el volumen de fluido que circula por unidad de tiempo a través de una superficie, por ejemplo, una sección del ducto (tubería, cañería, oleoducto, río, canal, entre otros) (Figura 3). También define el *caudal másico,* como la cantidad de masa de fluido que circula por unidad de tiempo a través de una superficie. La densidad ρ es la masa por unidad de volumen, entonces, el caudal másico se simboliza y se calcula de la siguiente manera:

$$\dot{m} = \iint_S \rho \vec{V} \bullet d\vec{S}$$



Q: caudal volumétrico

V: velocidad

S: Superficie

$$Q = \iint_S \vec{V} \bullet d\vec{S}$$

Figura 3: Caudal volumétrico.

Luego se menciona que, para un campo eléctrico, la integral de flujo a través de una superficie, describe la intensidad del *campo eléctrico* a cualquier distancia de la carga que causa el campo.

Se avanza con darle un significado a la integral de flujo a través de una superficie cerrada, a partir de dar un ejemplo para un campo de velocidades de un fluido (Figura 4).

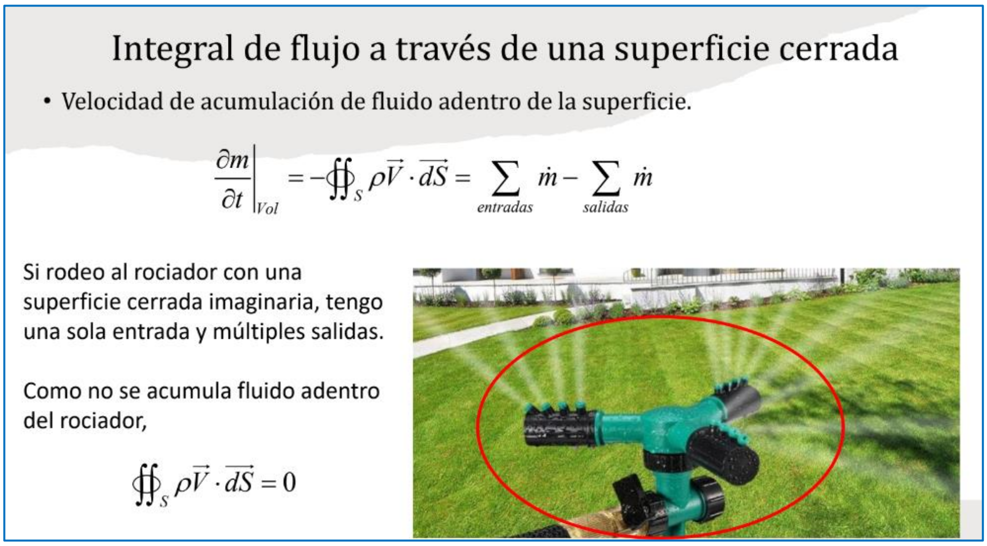


Figura 4: Integral de flujo a través de una superficie cerrada.

Luego se continua con el significado de la divergencia del campo de velocidad de un fluido y la compresibilidad del mismo. Para el caso en que no se acumula masa adentro de una superficie cerrada, se cumple que:

$$\oint\!\!\oint_S \rho\vec{V}.d\vec{S} = \rho\oint\!\!\oint_S \vec{V}.d\vec{S} = 0$$

y por el teorema de Gauss

$$\oint\!\!\oint_S \vec{V}.d\vec{S} = \iiint_V (\vec{\nabla}\bullet\vec{V})dVol = 0$$

Entonces

$$\vec{\nabla}\bullet\vec{V} = 0\,.$$

Lo anterior significa que cuando la densidad de un fluido es constante, la divergencia del campo de velocidades es nula (y viceversa). El flujo es incompresible. Y para el caso en que la divergencia de la velocidad es positiva, la densidad disminuye, y viceversa (Figura 5). Del mismo modo se da el significado de la integral de flujo a través de una superficie cerrada para un campo eléctrico, que se vincula con la carga encerrada (Figura 6).

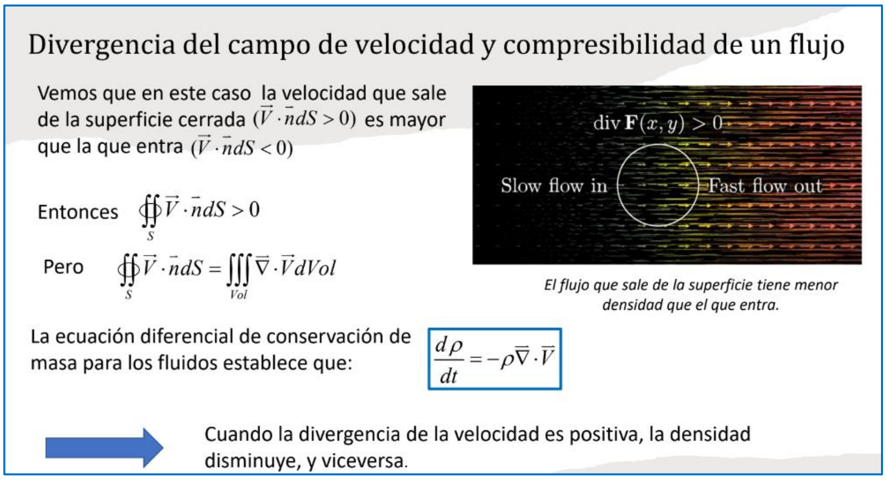


Figura 5: Divergencia de un campo de velocidades y compresibilidad de un fluido.

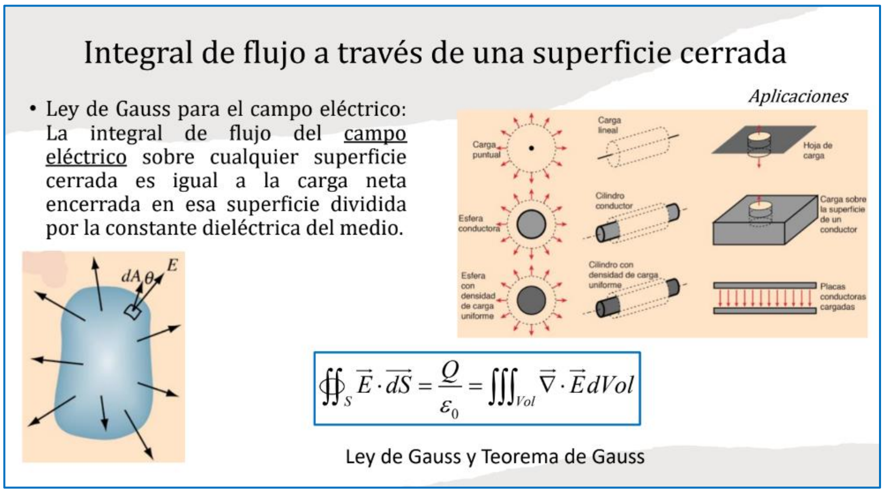


Figura 6: Integral de flujo a través de una superficie cerrada para un campo eléctrico.

Se continua con el concepto de *rotor del campo de velocidad (vorticidad)* y rotación de una partícula de fluido. Se demuestra que una partícula de fluido rota con una velocidad angular proporcional a la magnitud del rotor de V, y con el eje alineado con la dirección del mismo. Si el rotor de la velocidad es el vector nulo, el flujo es irrotacional. Para ellos se visualizan algunas imágenes del video https://www.youtube.com/watch?v=kfwNpKvKqR4 (Particle Image Velocimetry (PIV) Measurements on a Cycloidal Rotor -- Moble BenedictAvanza) con el concepto de la circulación del flujo (integral sobre curva cerrada) y le da un significado para la sustentación de un perfil alar (Figura 7).

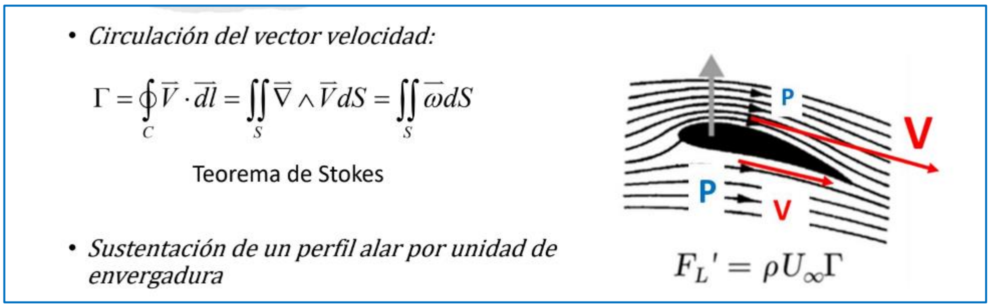


Figura 7: Sustentación de un perfil alar por unidad de envergadura.

Finalmente se proyectan algunos videos para visualizar los conceptos. Uno es del flujo de aire que genera una aeronave en vuelo https://www.youtube.com/watch?v=BaRb46vv_bQ (SPECTACULAR! Airbus A380 Condensation and Vortices on Landing at Zurich Kloten Airport) (Figura 8 (a)). Esto se explica por el cálculo de la circulación y del Teorema de Stokes (Figura 8 (b)).

Figura 8: (a) Vórtices que genera un Airbus A380. (b) Cálculo de la circulación sobre un ala de avión.

Luego, se proyecta el video https://www.youtube.com/watch?v=rB83DpBJQsE (Divergencia y rotor: el lenguaje de las ecuaciones de Maxwell, flujo de fluidos y más) con imágenes que ejemplifican el concepto del campo rotor para un campo de velocidades de un fluido, rotacional e irrotacional.

Finalmente se muestran prototipos, de un ala de avión y de un vehículo del tipo "combi", que tienen en su superficie pegados una hijos que se utilizan para simular el comportamiento en superficie del flujo de aire (Figura 9). Con la ayuda de un generador de aire se observa el movimiento y dirección de los hilos. Los alumnos también manipulan estos objetos que son utilizados y fabricados por el grupo de investigación que integran los ingenieros visitantes.

A continuación, y a modo de cierre se da un espacio de preguntas y de interacción entre los estudiantes y los ingenieros, para luego realizar el cuestionario posterior.

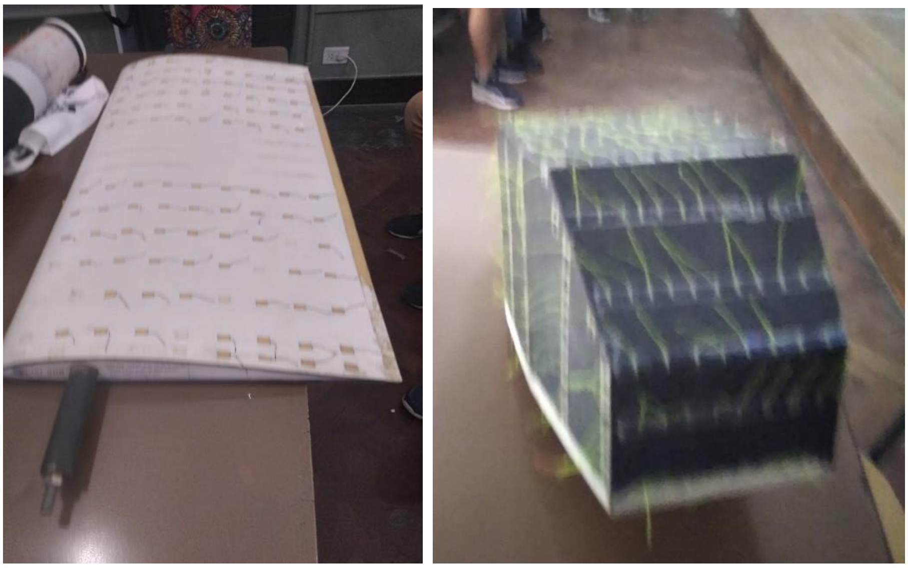


Figura 9: Prototipos de ala de avión y de combi.

4.3. Evaluación de la estrategia: cuestionario previo y posterior

A fin de evaluar el impacto de la estrategia didáctica, en los conocimientos, motivación, conceptos y significados que les otorgan los estudiantes a los temas abordados en la charla, se aplican a los estudiantes participantes, dos cuestionarios, uno previo y otro posterior.

El cuestionario previo se aplica mediante un formulario de Google Forms que incluye las preguntas que se muestran en la Tabla 2. Básicamente con el cuestionario se pretende indagar sobre conocimientos básicos necesarios para poder comprender conceptos del cálculo vectorial, estos conceptos básicos son los de magnitud escalar, magnitud vectorial y en el contexto de la física y de la ingeniería, que fenómenos permiten modelar tales magnitudes.

Cabe mencionar que estos temas los comienzan a trabajar los estudiantes en la escuela secundaria y luego en FI-UNLP en la materia Matemática A, cuando estudian vectores, funciones escalares, y algunas nociones básicas de funciones a valores vectoriales.

Preguntas
1. ¿Qué entiende por magnitud escalar?
2. ¿Qué entiende por magnitud vectorial?
3. Detalla todas las nociones que conozcas que puedan ser modeladas mediante una magnitud escalar.
4. Detalla todas las nociones que conozcas que puedan ser modeladas mediante una magnitud vectorial.

Tabla 2: Cuestionario previo a la estrategia.

Cabe mencionar que una *magnitud escalar* es aquella que queda completamente determinada con un número y sus correspondiente unidad, y una *magnitud vectorial* es aquella que se puede representar por un segmento orientado en el que además hay que establecer un valor numérico y sus unidades (módulo) se debe especificar una dirección y sentido.

Las respuestas posibles se clasifican para su posterior análisis, de la siguiente manera:

- Las respuestas de las preguntas 1 y 2, se categorizan en tres niveles: “Correcto”, “Incompleto”, “No responde”.
  - Correcto: responde con sus palabras de forma completa y con el lenguaje adecuado a la consigna.
  - Incompleto: responde con sus palabras de forma imprecisa, con algún concepto sin desarrollar
  - No responde: no se reconocieron como capaces de atender a la consigna
- Las respuestas de las preguntas 3 y 4, se categorizan en 4 niveles: “no sabe”, “contesta mal”, “contesta bien”, “conocimiento profundo”. Estas categorizaciones se realizaron de este modo en función de observar las respuestas obtenidas, valorizando la expresividad y cantidad de ejemplos expuestos.

La siguiente tabla muestra algunos de los resultados esperados a las preguntas 3 y 4, considerando los contenidos desarrollados en las materias correlativas al curso.

Magnitudes escalares y fenómenos modelados por una magnitud escalar	Magnitudes vectoriales y fenómenos modelados por una magnitud vectorial
Energía - Masa - Volumen - Área Presión - Longitud - Temperatura Rapidez - Trabajo - Tiempo - Ángulo	Fuerza/Peso - Velocidad Momento (Producto Vectorial De Dos Fuerzas) Gradiente - Aceleración

Tabla 3. Resultados esperados.

Posterior a la estrategia se aplica un cuestionario que tiene por objetivo indagar sobre los siguientes aspectos:

- Identificación de campos vectoriales en el mundo físico: se busca conocer si el participante puede mencionar algunos ejemplos de campos vectoriales presentes en el entorno físico, lo que muestra su comprensión básica de este concepto.
- Aplicación de conceptos sobre caudal de aire: se plantea una situación específica para evaluar si el participante puede aplicar el conocimiento sobre campos vectoriales para calcular el caudal de aire en una situación concreta, demostrando comprensión y habilidades de resolución de problemas.
- Comprensión sobre el rotor de un campo de velocidad: se busca determinar si el participante comprende cómo se puede verificar experimentalmente si un campo de velocidad de un fluido tiene un rotor distinto de cero, lo que indica un nivel más profundo de comprensión de los conceptos relacionados con campos vectoriales y fluidos.
- Valoración de la experiencia: se solicita una breve descripción en cinco palabras que refleje la opinión del participante sobre la experiencia, lo que proporciona retroalimentación subjetiva sobre la efectividad y utilidad de la charla educativa.
- Reconocimiento y reinterpretación de conceptos previos: se pide al participante que enumere conceptos o ideas que ya conocía antes de la charla y que hayan adquirido un nuevo significado o comprensión luego de

presenciarla, lo que revela el impacto de la charla en la reinterpretación de conocimientos previos.

- Identificación de nuevos conceptos o ideas: se solicita al participante que enumere conceptos o ideas que hayan sido nuevos para ellos como resultado de la charla, lo que indica el alcance de los nuevos conocimientos adquiridos durante la sesión educativa.

Las preguntas se presentan en la tabla 4.

Preguntas del cuestionario posterior
1. Mencione algunos campos vectoriales del mundo físico
2. Si conocemos el campo vectorial de velocidades del aire en una casa con puertas y ventanas abiertas, ¿cómo calculamos el caudal de aire que entra o sale por una ventana?
3. ¿Cómo se puede determinar experimentalmente si el campo de velocidad de un fluido tiene un rotor distinto de cero?
4. Con 5 palabras describe la valoración que le das a esta experiencia.
5. Enumerar conceptos/ideas que conocías y le has dado un significado luego de presenciar la charla.
6. Enumerar conceptos/ideas nuevas a partir de presenciar la charla.

Tabla 4: Preguntas del cuestionario posterior a la estrategia

5. Resultados

La actividad fue realizada, según la descripción previa, en el aula del curso de Matemática B con los profesores invitados, el profesor del curso y los estudiantes (aproximadamente 70). A continuación, se muestran los resultados encontrados.

5.1. Resultados del cuestionario previo

El cuestionario previo fue respondido en forma anónima por 54 estudiantes mediante un Google Forms. Se les solicitó responder con sus palabras, sin buscar la respuesta en internet, sólo con lo que cada uno supiera. Los resultados encontrados son los siguientes.

Pregunta 1: ¿Qué entiende por magnitud escalar? Sobre un total de 54 encuestados, la primera pregunta es respondida en forma “correcta” por el 39%, mientras que 44% responde en forma “incompleta” (presentan algún tipo de dificultad en su respuesta), en tanto que 17% “no sabe”. La asociación de la magnitud escalar con la existencia del módulo de un número (relacionada o no con unidades) es la mayor dificultad detectada en el grupo. Algunas de las respuesta se observan en la Figura 10.

¿Qué entiende por magnitud escalar?

54 respuestas

No se

No recuerdo el tema

Aquella que sólo se expresa por su módulo

un número

Es aquella que queda determinada por un número y su unidad

No recuerdo muy bien la definicion

una magnitud escalar se determina con números y unidades d medida

Aquella que se expresa con únicamente con un módulo y sus respectivas unidades.

El módulo de un número que determina una unidad de medida

Figura 10: Algunas respuestas a la pregunta ¿Qué entiende por magnitud escalar?

Pregunta 2: ¿Qué entiende por magnitud vectorial? Para esta pregunta, el 83% de los estudiantes presenta una noción sobre la magnitud vectorial (31% en forma correcta, y el 52% presenta alguna dificultad formal matemáticamente al definirlo). En este caso, la gran mayoría asocia al vector, los conceptos de sentido y dirección, sin embargo, pocos lo asocian al módulo del mismo. El 17% del total no sabe. En la Figura 11 se observan algunas respuestas.

¿Qué entiende por magnitud vectorial?

54 respuestas

No recuerdo el tema

Aquella que se expresa tanto por su módulo como por un vector y, por tanto, tiene sentido y dirección

una respuesta expresada en vector (sentido, dirección y módulo

Es aquella que queda determinada por un número y su unidad, y además se le agrega dirección y sentido

Magnitud representada de forma vectorial

una magnitud vectorial se determina con números y unidades en forma de módulo, e indica sentido y dirección

Aquella que presenta un módulo, una dirección, un sentido y un punto de aplicación, puede graficarse como un vector en el plano o en el espacio

Algo similar a la magnitud escalar pero que además se puede saber la dirección y sentido de la misma

Figura 11: Algunas respuestas a la pregunta ¿Qué entiende por magnitud vectorial?

Pregunta 3: Detalla todas las nociones que conozcas que puedan ser modeladas mediante una magnitud escalar. Al ser consultados sobre las nociones que puedan ser descritas mediante una magnitud escalar, el 72% logra responder satisfactoriamente la consigna mientras que un 14% lo hace de forma errónea y un 15% decide no responder. Se destaca que 14% del total logra ejemplificar de forma variada su respuesta mostrando un profundo conocimiento del concepto. En relación a los fenómenos o magnitudes que pueden modelarse por un escalar, los resultados se muestran en la Figura 12.

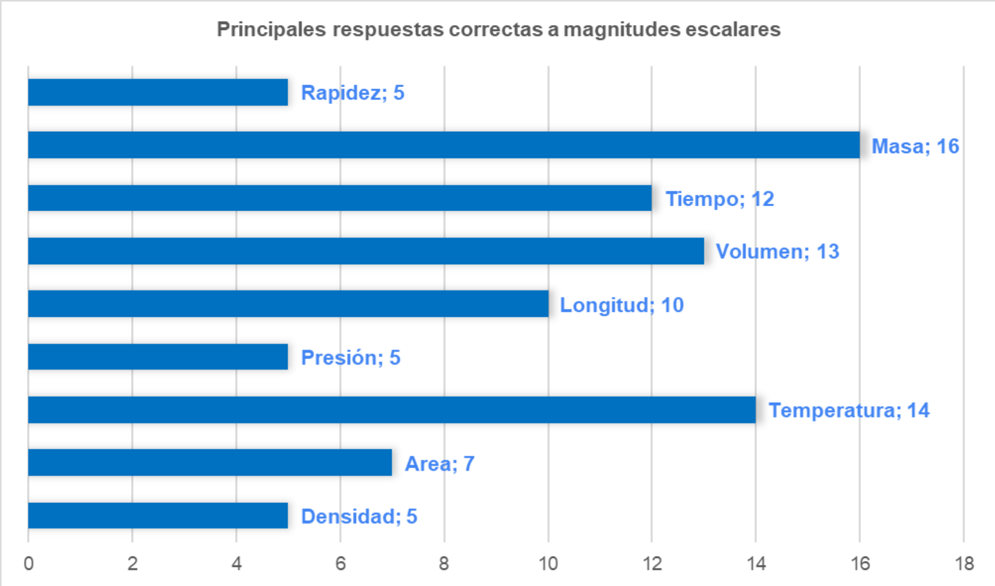


Figura 12: Respuestas a fenómenos que pueden modelarse por una magnitud escalar.

Pregunta 4: Detalla todas las nociones que conozcas que puedan ser modeladas mediante una magnitud vectorial. Cuando fueron solicitados sobre nociones que puedan ser descritas mediante una magnitud vectorial, el 76% logra responder satisfactoriamente la consigna mientras que un 13% lo hace de forma errónea y un 12% decide no responder. Se destaca que 49% del total logra ejemplificar de forma variada sus respuestas mostrando un profundo conocimiento del concepto. La Figura 13, enumera las principales magnitudes descritas en las respuestas.

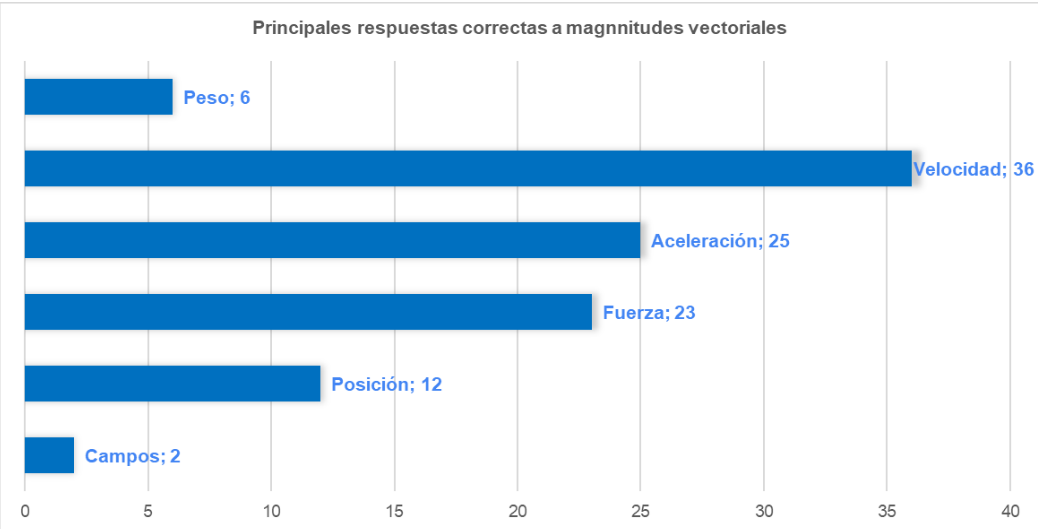
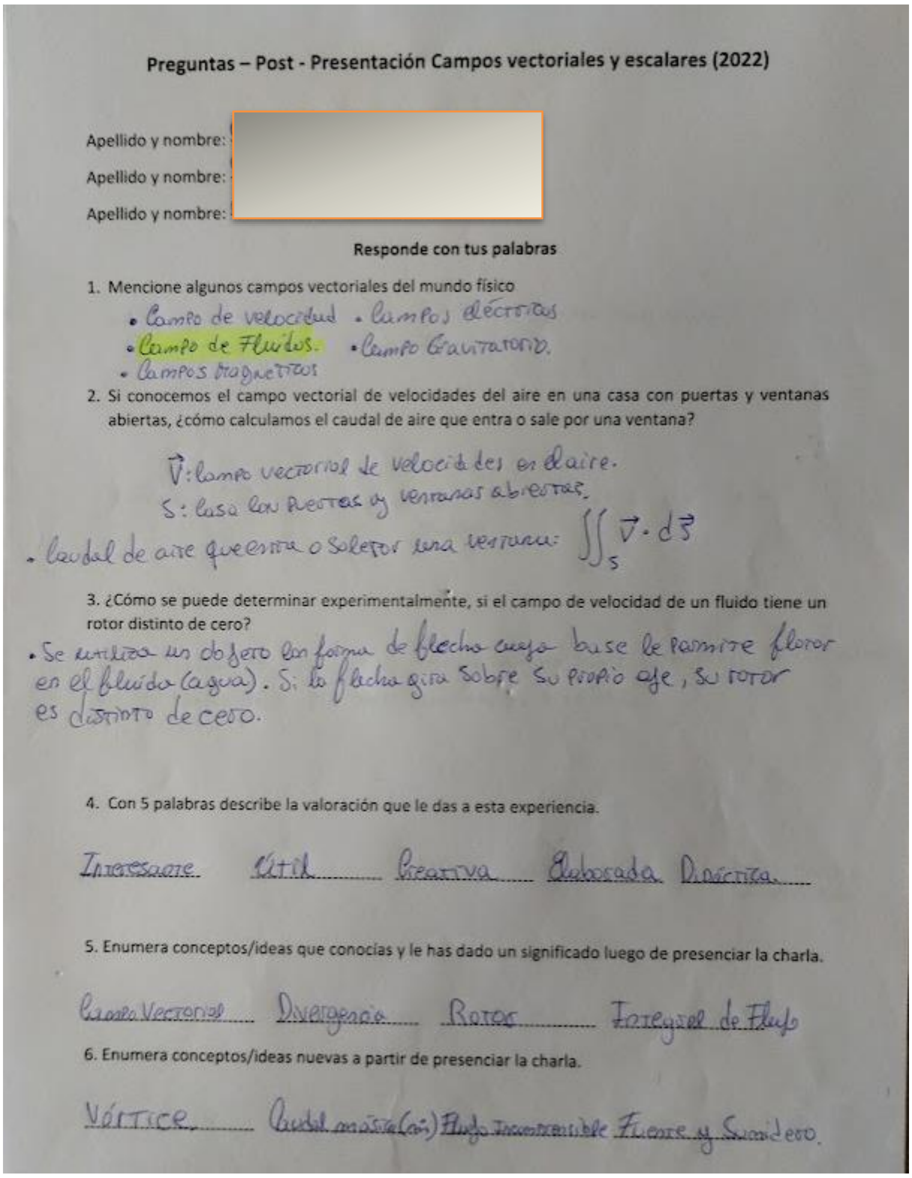


Figura 13: Respuestas a fenómenos que pueden modelarse por una magnitud vectorial.

5.2. Resultados del cuestionario posterior

Luego de realizar la estrategia didáctica, se aplica el cuestionario posterior. A diferencia del cuestionario previo, se permitió a los estudiantes la posibilidad de responderlo en la clase en papel (Figura 14) y en forma grupal (de hasta 3 integrantes), así puedan ellos, discutir, debatir, y explorar, sobre la experiencia vivida. Se obtuvieron un total de 38 respuestas de 70 estudiantes presentes. Los resultados son los siguientes.



Preguntas – Post - Presentación Campos vectoriales y escalares (2022)

Apellido y nombre:

Apellido y nombre:

Apellido y nombre:

Responde con tus palabras

1. Mencione algunos campos vectoriales del mundo físico
   - Campo de velocidad
   - Campos eléctricos
   - Campo de Fluidos.
   - Campo Gravitatorio.
   - Campos magnéticos

2. Si conocemos el campo vectorial de velocidades del aire en una casa con puertas y ventanas abiertas, ¿cómo calculamos el caudal de aire que entra o sale por una ventana?

   $\vec{V}$: campo vectorial de velocidades en el aire.
   S: casa con puertas y ventanas abiertas.
   - Caudal de aire que entra o sale por una ventana: $\iint_S \vec{V} \cdot d\vec{S}$

3. ¿Cómo se puede determinar experimentalmente, si el campo de velocidad de un fluido tiene un rotor distinto de cero?
   - Se utiliza un objeto con forma de flecha cuya base le permite flotar en el fluido (agua). Si la flecha gira sobre su propio eje, su rotor es distinto de cero.

4. Con 5 palabras describe la valoración que le das a esta experiencia.

   Interesante ... Útil ... Creativa ... Elaborada ... Didáctica ...

5. Enumera conceptos/ideas que conocías y le has dado un significado luego de presenciar la charla.

   Campo Vectorial ... Divergencia ... Rotor ... Integral de Flujo

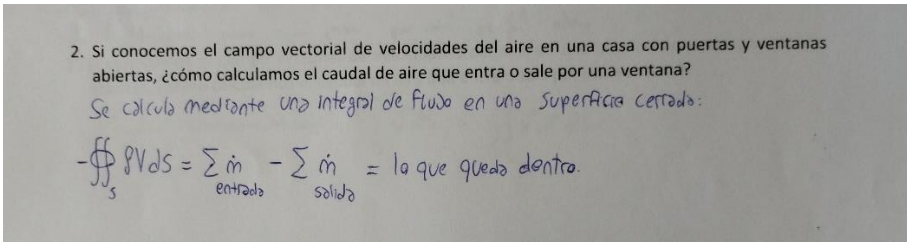
6. Enumera conceptos/ideas nuevas a partir de presenciar la charla.

   Vórtice ... Caudal másico (?) Flujo Incompresible Fuente y Sumidero.

Figura 14: Una de las respuestas al cuestionario posterior.

Pregunta 1: Mencione algunos campos vectoriales del mundo físico. Ante esta pregunta, más del 95% logra responder en forma adecuada ejemplificando de forma diversa. Los campos más mencionados fueron: campo eléctrico, electromagnético, gravitatorio, velocidades de fluido, velocidad del aire, campo magnético.

Pregunta 2. Si conocemos el campo vectorial de velocidades del aire en una casa con puertas y ventanas abiertas, ¿cómo calculamos el caudal de aire que entra o sale por una ventana? Para esta pregunta, más del 95% del curso logra responder de forma satisfactoria la ecuación, aunque la mitad de ellos no desarrolla el significado físico de sus términos. A modo de ejemplo se observa en la Figura 15, la respuesta de un grupo de alumnos que mencionan con sus palabras, que se calcula mediante una integral de flujo.

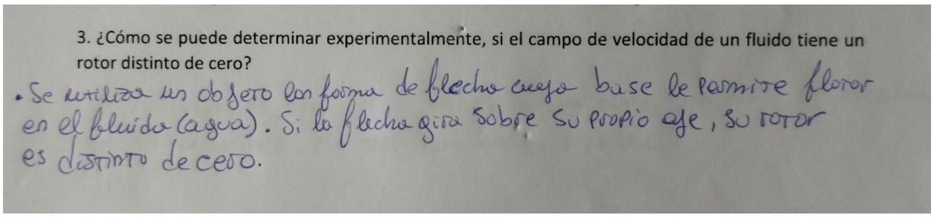

2. Si conocemos el campo vectorial de velocidades del aire en una casa con puertas y ventanas abiertas, ¿cómo calculamos el caudal de aire que entra o sale por una ventana?

Se calcula mediante una integral de flujo en una superficie cerrada:

$$-\oint\!\!\oint_S \rho V dS = \sum_{entrada} \dot{m} - \sum_{salida} \dot{m} = \text{lo que queda dentro.}$$

Figura 15: Una de las respuestas al cuestionario posterior.

Pregunta 3. ¿Cómo se puede determinar experimentalmente si el campo de velocidad de un fluido tiene un rotor distinto de cero? Ante la tercera pregunta, el 96% muestra entendimiento sobre la existencia de rotores. Se observa a modo de ejemplo en la Figura 16 la respuesta de un grupo de alumnos.


3. ¿Cómo se puede determinar experimentalmente, si el campo de velocidad de un fluido tiene un rotor distinto de cero?

• Se utiliza un objeto con forma de flecha cuya base le permite flotar en el fluido (agua). Si la flecha gira sobre su propio eje, su rotor es distinto de cero.

Figura 16: Una de las respuestas a la pregunta 3 del cuestionario posterior.

Pregunta 4. Con 5 palabras describe la valoración que le das a esta experiencia. Respecto de la valoración de la experiencia, las palabras y la frecuencia con las que aparecen se muestran en la Figura 17 y 20. De forma general la experiencia demostró ser interesante, informativa, entretenida y útil, respecto al formato convencional de clase.

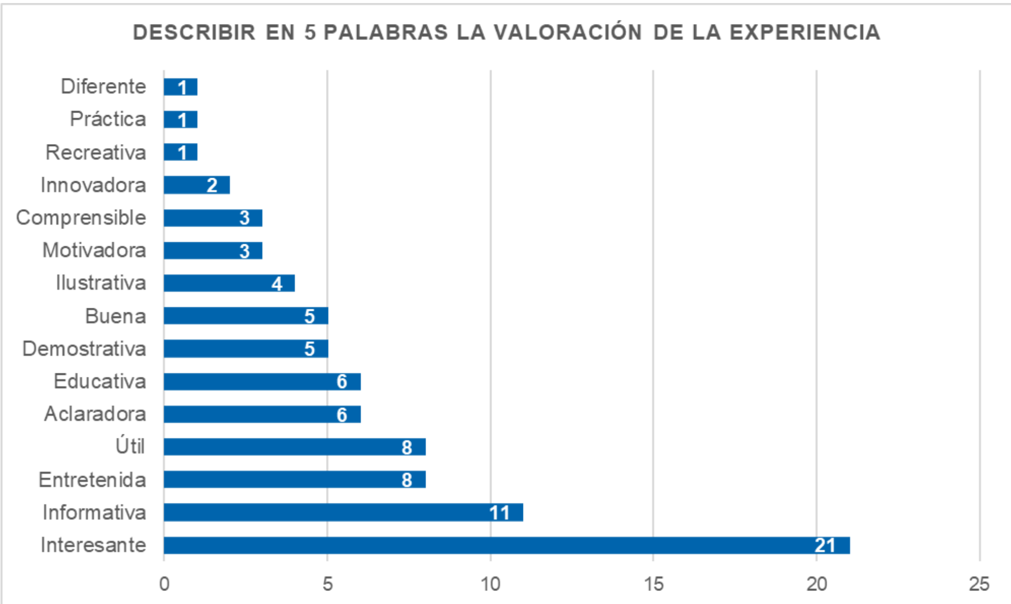


Figura 17: Valoración de la estrategia didáctica.

Preguntas 5 y 6. Enumerar conceptos/ideas que conocías y le has dado un significado luego de presenciar la charla. Enumerar conceptos/ideas nuevas a partir de presenciar la charla. Finalmente, los alumnos muestran un mejor entendimiento desde la mirada física del rotor, la divergencia y otros fenómenos enunciados a partir de la pregunta 5 y 6 (Figura 18, 19 y 20). Además, de mencionar con mayor frecuencia los conceptos nuevos: *caudal, sumideros, flujo (flujo de aire, flujo irrotacional, flujo* *incompresible, flujo eléctrico, flujo ideal) y vórtices*. Además, algunos escribieron los conceptos nuevos de: *funcionamiento de aviones, lifting line, perfil alar, resistencia del aire, túnel de viento, mecánica de fluidos*.

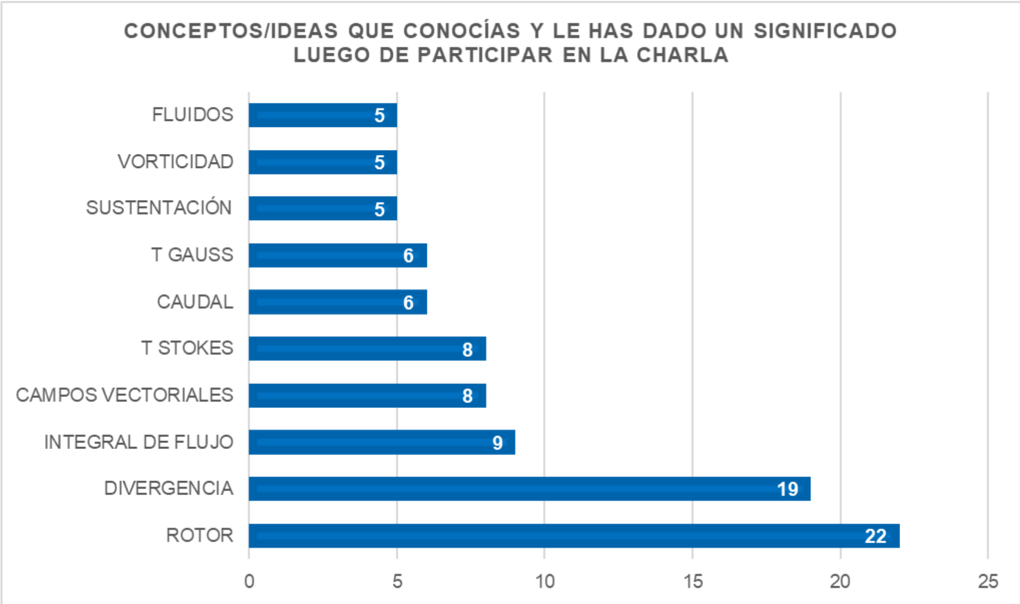


Figura 18: Conceptos/ideas que conocías y le has dado un significado luego de presenciar la charla.

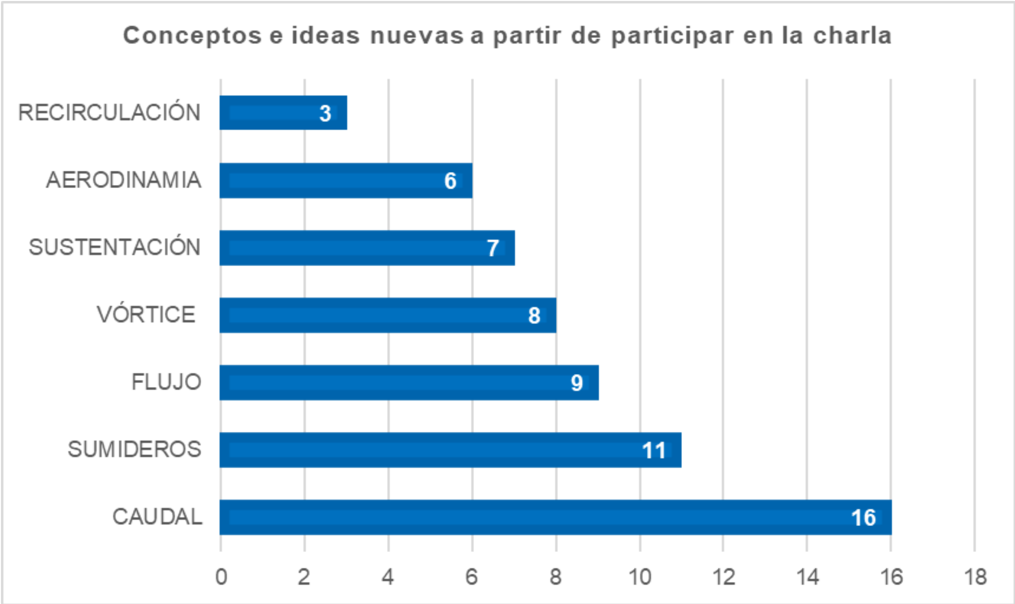
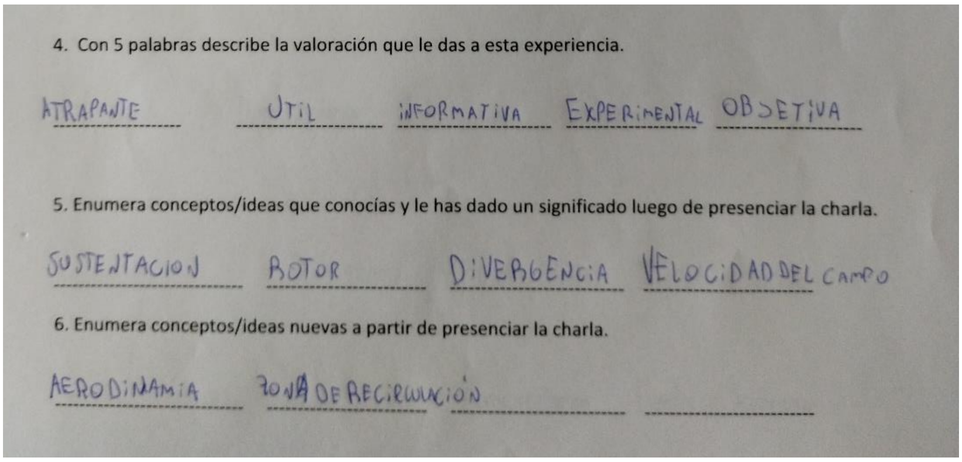


Figura 19: Conceptos/ideas nuevas luego de presenciar la charla.


4. Con 5 palabras describe la valoración que le das a esta experiencia.

ATRAPANTE UTIL INFORMATIVA EXPERIMENTAL OBJETIVA

5. Enumera conceptos/ideas que conocías y le has dado un significado luego de presenciar la charla.

SUSTENTACION ROTOR DIVERGENCIA VELOCIDAD DEL CAMPO

6. Enumera conceptos/ideas nuevas a partir de presenciar la charla.

AERODINAMIA ZONA DE RECIRCULACIÓN

Figura 20: Respuestas a las preguntas 3, 4 y 5 del cuestionario posterior.

6. Análisis

Para dar respuesta a la pregunta *¿Cómo influye en el aprendizaje de los estudiantes cuando se implementa en el proceso de enseñanza una estrategia didáctica que articula los conceptos de campo vectorial, rotor y divergencia, con la ingeniería?*

El análisis general, indica que, los estudiantes previo a la estrategia muestran en gran porcentaje dificultades con los conceptos de magnitud escalar y vectorial, en cuanto a su definición formal, aunque en cambio son capaces en la gran mayoría de mencionar conceptos físicos que son modelados por tales magnitudes, destacándose entre las respuestas, masa y temperatura (escalares), velocidad y aceleración (vectoriales).

Estos resultados se asocian a los conceptos previos que en general poseen los estudiantes al ingresar a la universidad. Los estudiantes de secundaria suelen tener algunas nociones previas sobre magnitudes escalares y vectoriales, aunque pueden variar según su nivel de exposición y comprensión previa. En relación al concepto de magnitud escalar, lo vinculan en general con una cantidad sin dirección ni sentido, y que son simplemente una cantidad numérica, y los ejemplos comunes los suelen asociar con ejemplos de la vida cotidiana, como la temperatura, la masa, la velocidad escalar, la densidad, el tiempo.

En relación a las magnitudes vectoriales, las concepciones previas de los estudiantes tienden a entender que éstas no solo tienen un valor numérico, sino que también incluyen información sobre dirección y sentido en el espacio y además pueden tener cierta familiaridad con la representación gráfica de vectores utilizando flechas para indicar dirección y sentido.

Los resultados del cuestionario posterior, indican que más del 95% logró identificar adecuadamente, campos vectoriales del mundo físico. En relación al cálculo del caudal del aire, más del 95% pudo responder satisfactoriamente, aunque la mitad no desarrolló el significado físico de los términos. Además, la experiencia fue generalmente valorada como interesante, informativa, entretenida y útil, en comparación con el formato convencional de clase. En cuanto a los conceptos/ideas asimilados, los estudiantes mostraron un mejor entendimiento de conceptos físicos como el rotor y la divergencia, además de mencionar caudal, vórtice y sumideros, como conceptos nuevos, entre otros.

En general:

- La estrategia didáctica parece haber tenido un impacto positivo en la comprensión de los estudiantes, con un aumento notable en la comprensión de conceptos físicos.
- Hubo una mejora en la comprensión tanto de magnitudes escalares como vectoriales, así como en la aplicación de estos conceptos a campos específicos de la física.
- La participación activa de los estudiantes, la discusión grupal y la reflexión parecen haber contribuido al éxito de la estrategia.
- Se observa una alta tasa de participación y comprensión en el cuestionario posterior, lo que indica un buen nivel de retención de los conceptos presentados durante la actividad.
- Los conceptos presentados durante la charla establecen conexiones con los conocimientos previos, otorgan significado a los nuevos y pueden incluso dar lugar al surgimiento de ideas adicionales, todos ellos relacionados con el Cálculo Vectorial. Estos conceptos no solo serán de utilidad en asignaturas futuras, sino que también encontrarán aplicación en la práctica profesional.
- La estrategia además contribuye en el inicio de la adquisición de competencias requeridas para Matemática B.

7. Conclusiones

En conclusión, el Cálculo Vectorial emerge como una herramienta matemática fundamental con amplias aplicaciones en diversas disciplinas de la ingeniería y la física. Su comprensión profunda es esencial para abordar fenómenos físicos complejos y modelar sistemas multidimensionales. La implementación de estrategias didácticas innovadoras que vinculen los conceptos matemáticos con situaciones reales de ingeniería ha demostrado ser efectiva para mejorar el aprendizaje y la comprensión de los estudiantes. Además, estas estrategias fomentan la motivación, la participación activa y la conexión significativa de los conocimientos adquiridos, preparando así a los futuros ingenieros para enfrentar los desafíos del mundo profesional con solidez y creatividad. El análisis de la evaluación de la estrategia sugiere un impacto positivo en la comprensión de los estudiantes, destacando una mejora significativa en la comprensión de conceptos físicos y una alta retención de los mismos. En resumen, la integración efectiva de los conceptos de campo vectorial, rotor y divergencia con la ingeniería en el proceso de enseñanza promueve un aprendizaje más profundo y significativo.

Agradecimientos

Agradecer la colaboración Dra. Ing. Ana Scarabino, profesora titular, integrante del Grupo de Fluidodinámica Computacional – GFC, en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de La Plata, a los ingenieros aeroespaciales Matias Herrera y Frida Alfaro Rodríguez de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de La Plata, y a la becaria de IMApEC, Marina Gallo, estudiante de la carrera de Ingeniería Civil – UNLP, que colaboró en el procesamiento de los datos obtenidos de los cuestionarios previo y posterior.

Referencias bibliográficas

Ausubel, D. (1983). Teoría del aprendizaje significativo. Fascículos de CEIF, 1(1-10), 1-10.

Baily, C., Bollen, L., Pattie, A., Van Kampen, P., & De Cock, M. (2015). Student thinking about the divergence and curl in mathematics and physics contexts. arXiv preprint arXiv:1507.00849.

Bayés, A., & Costa, V. A. (2023). Recursos educativos en GeoGebra para su uso en dispositivos móviles. UNIÓN-REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 19(68).

Boekaerts, M. (2002). Motivar para aprender. Serie prácticas educativas.

Bollen, L., Van Kampen, P., & De Cock, M. (2015). Students' difficulties with vector calculus in electrodynamics. Physical Review Special Topics-Physics Education Research, 11(2), 020129.

Caballero, P. V., Palencia, J. L. D., & Redondo, A. N. (2022). Propuesta metodológica para el aprendizaje significativo de la circulación de campos vectoriales en ingenieros. In Nuevos enfoques en innovación educativa y transferencia de conocimiento: aplicación en ingenierías y enseñanza STEM (pp. 84-104). Dykinson.

Camarera, G. P. (2009). La matemática en el contexto de las ciencias, Innovación educativa, 9, (48), 15-25. Instituto Politécnico Nacional de México.

Costa, V. (2013). Aspectos destacados de las teorías cognitivas del aprendizaje, como estrategias didácticas para la enseñanza y aprendizaje de conceptos del Cálculo Vectorial. En Flores, Rebeca (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (pp. 513-521). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. http://funes.uniandes.edu.co/4079/

Costa, V. A. (2022). Recorrido de estudio e investigación codisciplinar en la universidad para la enseñanza del cálculo vectorial en carreras de Ingeniería. https://repositoriosdigitales.mincyt.gob.ar/vufind/Record/RIDUNICEN_d697af1c7a70fe52b68899fd7da52992

Costa, V. (2024). Libro de Cátedra- Matemática B. Facultad de Ingeniería de la UNLP. https://www1.ing.unlp.edu.ar/catedras/F0302/descargar.php?secc=0&id=F0302&id_inc=63710

Costa, V. A., & Arlego, M. (2013). El rol de la historia de las ciencias en la enseñanza del Cálculo Vectorial en carreras de Ingeniería. UNIÓN - Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 9(36). Recuperado a partir de http://revistaunion.org/index.php/UNION/article/view/756

Costa, V. A., Arlego, M. J. F., & Otero, R. (2014). Enseñanza del Cálculo Vectorial en la Universidad: propuesta de Recorridos de Estudio e Investigación. Revista de formación e innovación educativa universitaria, 7.

Costa, V. A., Arlego, M. J. F., & Otero, M. R. (2015). Las dialécticas en un Recorrido de Estudio e Investigación para la enseñanza del Cálculo Vectorial en la Universidad.

Costa, V. A., Di Domenicantonio, R. M., Prodanoff, F., Tolosa, E., & Guarepi, V. (2008). Acciones interdisciplinarias entre matemática y física para mejorar la enseñanza y aprendizaje del cálculo vectorial. In Libro digital del VI Congreso Argentino de Enseñanza de la Ingeniería, Formando al Ingeniero del siglo XXI. Facultad de Ingeniería e Informática, de la Universidad Católica de Salta y Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Salta. Editorial de la Universidad Nacional de Salta.

del Río, L. S. (2020). Recursos para la enseñanza del Cálculo basados en GeoGebra. Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo, 9(1), 120-131.
del Rio, L. S. (2016). GeoGebra. Libro GeoGebra. Parte 1. https://www.geogebra.org/m/QfQMfsD3
del Rio, L. S. (2016). GeoGebra. Libro GeoGebra. Parte 2. https://www.geogebra.org/m/BkpUstj9
Dunn, J. W. & Barbanel, J. (2000). One model for an integrated math/physics course focusing on electricity and magnetism and related calculus topics. American Journal of Physics. American Association of Physics Teachers. 68 (8), 749.
Flores, J. F. (2017). Estrategias didácticas para el aprendizaje significativo en contextos universitarios. Universidad de Concepción. Unidad de Investigación y Desarrollo Docente.
Galindo Rivera, O. A. y Falk de Losada, M. (2022). Sobre los modos de pensamiento vectorial vía resolución de problemas. Matemáticas, Educación y Sociedad, 6(1), 1-18.
Gascón, J. (2009). El problema de la Educación Matemática entre la Secundaria y la Universidad. Educação Matemática Pesquisa, 11(2): 273-302.
Giménez, C. A., & Machın, M. C. (2003). Sobre la investigación en didáctica del análisis matemático. Edición Especial: Educación Matemática, 135.
Godfred, A., Bayaga, A., & Bosse, M. J. (2021). Analysis of rural-based pre-service teachers spatial-visualisation skills in problem solving in vector calculus using MATLAB. International Journal of Emerging Technologies in Learning, 16(10), 149-150.
Hidalgo, R. R., Lezama, J., & Rios, R. P. (2022). Desarrollo del pensamiento Infinitesimal Leibniziano en una propuesta didáctica del cálculo para ingeniería. Latin-American Journal of Physics Education, 16(1), 14.
Kümmerer, B. (2002). The teaching and learning of mathematics at university level. An ICMI Study. D. Holton. Kluwer Academic Publishers New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow, 321-334.
Lohgheswary, N., Nopiah, Z. M., Aziz, A. A., & Zakaria, E. (2018). Identifying vector calculus topics for innovative teaching via computational tools. Turkish Online Journal Of Design Art And Communication, 8(9), 1121-1129.
Marsden, J. E., Tromba, A. J., & Mateos, M. L. (1991). Cálculo Vectorial (Vol. 69). México: Addison-Wesley Iberoamericana.
Moscato, R. (2006). La articulación, un problema de la escuela. 1° Jornada de instituciones educativas de prosed. www.uca.edu.ar/esp/sec-fpsicologia/esp/docs-prosed/ijornada/documentos/moscato.pdf
Pacheco-Carrascal, N. (2016). La motivación y las matemáticas. Eco Matemático Journal of Mathematical Sciences, 7(1), 149-158.
Padayachee, P. (2020). Discussion Forums in Vector Calculus: Reflecting on the quality of engineering students' online interactions. In 2020 IFEES World Engineering Education Forum-Global Engineering Deans Council (WEEF-GEDC) (pp. 1-6). IEEE.
Padayachee, P., & khemane, T. (2023). Unlocking Complex Vector Calculus Concepts For Engineering Students Using Geogebra.
Páez, O. (2011). Las competencias para el ingreso y para la permanencia en el primer año de las carreras de ingeniería, una mirada integradora desde una actividad profesional. I Jornada de Enseñanza de la Ingeniería. Facultad Regional Buenos Aires, Sede Campus. Libro de Resúmenes. http://sistemas.unla.edu.ar/sistemas/gisi/papers/JEIN-2011-124.pdf

Sáchica-Castillo, J. (2019). El laboratorio de física como escenario para la construcción de los conceptos divergencia y rotacional. https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/75552
Thabiso, K., Pragashni, P., & Corrinne, S. (2024). Students' Understanding of Stokes' Theorem in Vector Calculus. IEEE Transactions on Education.
Venkatarayalu, N. (2018). Interactive Visualization-Based E-learning Aids for Vector Calculus. In 2018 IEEE International Conference on Teaching, Assessment, and Learning for Engineering (TALE) (pp. 725-729). IEEE.
Willcox, K. & Bounova, G. (2004). Mathematics in Engineering: Identifying, Enhancing and Linking the Implicit Mathematics Curriculum. Proceedings of the 2004 American Society for Engineering Education Annual Conference & Exposition, Copyright 2004. American Society for Engineering Education.
Wortley, C. (2012). La articulación: algunas ideas para reflexionar. Ministerio de Educación, Cultura, Ciencia y Tecnología. Argentina.
Zuñiga, S. L. (2007). El cálculo en carreras de ingeniería: un estudio cognitivo. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa [en línea]. 10, (1), 145-155.

Viviana Angélica Costa: Doctora en Enseñanza de las Ciencias (Mención Matemática), Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, Argentina. Magister en Simulación Numérica y Control, Facultad de Ingeniería, Universidad de Buenos Aires. Licenciada en Matemática, Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Nacional de La Plata. Coordinadora de la UIDET Investigación en Metodologías Alternativas para la Enseñanza de las Ciencias, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de la Plata (IMApEC). Profesora Titular Dedicación Exclusiva, Cátedra de Matemática B del Departamento de Ciencias Básicas, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de la Plata, Argentina. Profesora Adjunta Dedicación Simple, Cátedra de matemática I del Departamento de Turismo, Facultad de Ciencias Económicas, Universidad Nacional de La Plata, Argentina. Integrante del Núcleo De Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología (NIECyT), Universidad Nacional del Centro, Argentina. Editora y Directora de la Revista UNIÓN en el período 2021-2023.

Correo electrónico: vacosta@ing.unlp.edu.ar