ISSN: 1815-0640
Número 62. Agosto 2021
Páginas 1-17

https://union.fespm.es

Propuesta de enseñanza mediada por TIC en la asignatura Álgebra Lineal desde APOE: Tesis de Maestría en carreras de Ingeniería en Informática

Fabiana Montenegro, Lorena Podevils

Fecha de recepción: 31/05/2020
Fecha de aceptación: 15/02/2021

Resumen

El presente trabajo reporta resultados de una investigación cuyo objetivo es la implementación de una propuesta de enseñanza que conjuga los aportes de APOE y TIC en el aprendizaje de transformaciones lineales en carreras de ingeniería de Santa Fe, Argentina. La propuesta partió de representaciones dinámicas empleando GeoGebra. Del estudio se deriva la validación de que, para el caso de R^2 y R^3, el tratamiento gráfico de las condiciones de linealidad refuerza el Esquema de las operaciones binarias presentes en el concepto. Se presentan los instrumentos de investigación y los resultados obtenidos en el primero de ellos.
Palabras clave: TIC, APOE, Álgebra Lineal

Abstract

The present work reports results of an investigation whose objective is the implementation of a teaching proposal that combines the contributions of APOE and ICT in the learning of linear transformations in engineering careers in Santa Fe, Argentina. The proposal started from dynamic representations using GeoGebra. The study derives the validation that, for the case of R^2 and R^3, the graphic treatment of the linearity conditions reinforces the Scheme of the binary operations present in the concept. The research instruments and the results obtained in the first one are presented.
Keywords: ICT, APOS, linear algebra

Resumo

O presente trabalho relata os resultados de uma investigação cujo objetivo é a implementação de uma proposta de ensino que combina as contribuições da APOE e das TIC na aprendizagem das transformações lineares nas carreiras de engenharia em Santa Fé, Argentina. A proposta partiu de representações dinâmicas utilizando o GeoGebra. O estudo deriva a validação de que, para o caso de R^2 e R^3, o tratamento gráfico das condições de linearidade reforça o Esquema das operações binárias presentes no conceito. São apresentados os instrumentos de pesquisa e os resultados obtidos na primeira.
Palavras-chave: TIC, APOE, Algebra Linear

1. Introducción

El presente artículo exhibe algunos resultados de una investigación desarrollada con alumnos de 18-19 años, en el programa de la Maestría en Didácticas Específicas de la Facultad de Humanidades y Ciencias de la Universidad Nacional del Litoral, en la ciudad de Santa Fe, Argentina. Las autoras del presente escrito, maestranda y directora de tesis respectivamente, somos docentes de la cátedra Algebra Lineal de la Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas (en adelante, FICH) de la Universidad antes mencionada

En el ciclo inicial de todas las carreras de grado de nuestra Facultad -Ingeniería en Informática, en Agrimensura, en Ambiental y en Recursos Hídricos- se encuentra la asignatura Álgebra Lineal, integrando el área de Ciencias Básicas en el segundo cuatrimestre del primer año con una carga horaria de cinco horas semanales. El programa analítico de la misma comprende los tópicos: espacios vectoriales, espacios con producto interno, transformaciones lineales, valores y vectores propios y diagonalización de matrices. Para cursar la asignatura, el régimen de correlatividades exige al alumno haber alcanzado la condición de alumno regular en la asignatura del primer cuatrimestre denominada Matemática Básica.

En los últimos veinte años, distintos grupos de investigadores en educación matemática se han abocado a la didáctica del álgebra lineal: un grupo francés integrado, entre otros, por Dorier, Aline Robert, Artigue y Alves Días; uno canadiense liderado por Sierpinska; un grupo estadounidense conformado por Harel, Dubinsky y un grupo mexicano liderado por Oktaç, Trigueros y colaboradores.

Durante los últimos años diversas investigaciones se han enmarcado en la Teoría APOE como referente teórico y metodológico. En este sentido, los trabajos de Roa-Fuentes y Oktac (2010, 2012), Romero Félix y Oktac (2015), Ramírez Sandoval y Oktaç (2012), Trigueros Gaisman, Maturana Peña, Parraguez González y Rodríguez Jara (2015), Romero Félix (2016) y Oktac (2019) tuvieron como objeto la construcción de conceptos vinculados con las transformaciones lineales desde la teoría APOE.

Interesadas en la didáctica del álgebra, nos propusimos esbozar e implementar una propuesta de enseñanza que reúna los aportes que ha desarrollado la Teoría APOE y las posibilidades actuales de las Tecnologías de la Comunicación e Información (TIC), a fin de enriquecer el aprendizaje de las transformaciones lineales (en adelante TL).

En la sección 2) se presenta el problema que originó la presente investigación; en la 3) el marco teórico y metodológico sobre el que se basó la misma; en la 4) se muestran algunas decisiones referidas a la primera componente del ciclo de investigación de la Teoría APOE; en la 5) se describe el diseño y aplicación de los instrumentos de investigación; en la 6) se presentan datos obtenidos de la implementación de la primera actividad de la propuesta y, finalmente, en la 7) se exponen reflexiones parciales sobre el presente estudio.

2. Planteo del problema de la tesis

Como mencionamos, distintos investigadores se abocaron al estudio de las TL por ser un tópico que se vincula con conceptos importantes del Álgebra Lineal tales como: espacio vectorial, combinación lineal, base, valores y vectores propios, etc. Además, las TL desarrollan capacidades para analizar, organizar y modelizar matemáticamente problemas relacionados con situaciones propias de la actividad humana y de otras ciencias (físicas, económicas, sociales, etc.).

Entre las definiciones de TL que pueden emplearse en la enseñanza, es posible establecer una distinción atendiendo a las condiciones que mencionan como requisito para que las funciones entre espacios vectoriales reciban tal denominación. Por un lado, definiciones como las que aparecen en Grossman (2012), Gerber (1992), Gareth (2002), Kozak, Pastorelli y Vardanega (2007) clasifican como lineal a las funciones entre espacios vectoriales que satisfacen dos condiciones, que en adelante identificaremos como condiciones de linealidad, cada una de las cuales está asociada a una de las operaciones binarias involucradas en los espacios vectoriales: suma de vectores y multiplicación por un escalar. Y por otro lado, existen definiciones como en Hoffman & Kunze (1971) que establecen como propiedad definitoria de las TL a una única condición que involucra combinaciones lineales de elementos del espacio dominio de la TL.

> Sean V y W espacios vectoriales reales. Una **transformación lineal** T de V en W es una función que asigna a cada vector $\mathbf{v} \in V$ un vector único $T\mathbf{v} \in W$ y que satisface, para cada $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en V y cada escalar α,
>
> $$T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T\mathbf{u} + T\mathbf{v} \qquad (7.1.1)$$
>
> y
>
> $$T(\alpha\mathbf{v}) = \alpha T\mathbf{v} \qquad (7.1.2)$$

Figura 1. Definición de TL
Fuente: Grossman (2012)

> Sean ***V*** y ***W*** dos espacios vectoriales sobre un campo ***F***. Una transformación lineal de ***V*** en ***W*** es una función ***T*** de ***V*** en ***W***, tal que $T(c\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) = cT(\boldsymbol{\alpha}) + T(\boldsymbol{\beta})$ para todos los vectores $\boldsymbol{\alpha}$ y $\boldsymbol{\beta}$ de ***V*** y todos los escalares c de ***F***.

Figura 2. Definición de TL.
Fuente: Hoffman y Kunze (1971)

En ambos tipos de definiciones, por su carácter general de referirse a dos espacios vectoriales cualesquiera, la/as condición/nes de linealidad están desarrolladas en el marco algebraico. No obstante, para el caso de los espacios vectoriales R^2 y R^3, la interpretación gráfica de dichas condiciones contribuye a reforzar el Esquema de las operaciones binarias presentes en los espacios vectoriales y, al mismo tiempo, aporta a la caracterización de las propiedades gráficas de los objetos involucrados.

La carencia de un procedimiento gráfico de las condiciones de linealidad en dichos espacios vectoriales en la mayoría de los libros de texto, motivó este trabajo de investigación con el objetivo de desarrollar e implementar una propuesta de enseñanza mediada por la implementación de las TIC y que aporte al fortalecimiento del aprendizaje del concepto de TL en los espacios vectoriales R^2 y R^3.

Sin negar la complejidad intrínseca del concepto de TL como un factor en su aprendizaje, guiadas por el marco teórico adoptado y considerando los reportes de otros investigadores (Romero, 2016; Soto, Romero e Ibarra, 2012), nos arraigamos en la presunción de que la ausencia de coordinación entre los procedimientos gráficos y algebraicos influye en los aprendizajes conceptuales y que, de no llevarse a cabo tal coordinación, la comprensión conceptual de este tópico podría converger tarde o temprano en un fracaso.

Se decidió que era conveniente iniciar la construcción del concepto partiendo de Acciones, que utilicen procedimientos gráficos y dinámicos en un ambiente diseñado con GeoGebra. Sin embargo, a lo largo de toda la propuesta de enseñanza, también se pedía a los estudiantes valerse de su representación algebraica para describir y definir las condiciones de las TL o para justificar sus respuestas. Por medio de esta articulación de los procedimientos se buscaba facilitar la coordinación de las construcciones mentales independientes de su representación (gráfica o algebraica) y, finalmente, lograr la construcción del Proceso TL.

La propuesta implementada en la investigación se plantea como innovadora en la enseñanza en la facultad a la que pertenecemos en tanto el concepto de TL y los relacionados con él sólo se abordaban algebraicamente.

En la investigación se consideró como definición de TL a la presentada por Grosssman (2012) por constituir ésta la bibliografía básica de la asignatura y se identificó con 1) a la condición $T(\propto.\vec{u}) = \propto.T(\vec{u})$ y con 2) a la condición $T(\vec{u}+\vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$.

3. Marco teórico y metodológico

3.1. Conceptos básicos

La propuesta de Piaget sobre el proceso de abstracción reflexiva como el constructo clave, para la construcción de los conceptos lógicos-matemáticos; influyó a Dubinsky en 1991 para el desarrollo de la teoría APOE. Ésta es una teoría constructivista y cognitiva que se centra en la manera en que los estudiantes construyen los conceptos a partir de sus estructuras matemáticas previas, las cuales evolucionan conformando otros saberes. De esta manera, APOE se propone manifestar las construcciones mentales necesarias para que dicha evolución se produzca. El término *concepción* es utilizado dentro de esta corriente de la didáctica de la matemática “para referirse a la comprensión o idea que un individuo puede tener sobre algún concepto” (Campos, 2017, p. 40).

Según la Teoría APOE, la construcción del conocimiento matemático pasa por tres etapas básicas: Acciones, Procesos y Objetos. Un estudiante está en una concepción Acción de un determinado concepto matemático si no es capaz de realizar las transformaciones sobre el concepto por sí solo, sino que necesita estímulos o instrucciones externas que le indiquen paso a paso como llevarlas a cabo. De algún modo, el objeto matemático es percibido por el individuo como algo externo. Una Acción es por naturaleza, algorítmica. Por ejemplo, en Roa Fuentes y Oktac (2012) se menciona que un estudiante está a nivel Acción de TL si determina la imagen de vectores particulares dada la función y, con ello, considera que las operaciones suma vectorial y producto por un escalar se preservan para todos los vectores del espacio dominio. En Roa-Fuentes y Oktac (2010) se indica que un alumno que está en esta etapa necesita de una expresión algebraica explícita de la función acompañada de la pregunta prototipo que cuestione si dicha transformación es lineal o no, provocando así la repetición de un algoritmo y la notación de los objetos, sin la consciencia de la naturaleza de los mismos.

> Aunque la concepción de acción es muy limitada, las acciones marcan el principio crucial del entendimiento de un concepto. Por lo tanto, el acercamiento pedagógico de la teoría APOE basada en una teoría de aprendizaje comienza con actividades diseñadas para ayudar a los estudiantes a construir acciones (Dubinsky, 1996, p. 34).

Por otra parte, se dice que un estudiante está en una concepción Proceso de un concepto matemático cuando es capaz de reflexionar sobre el mismo y realiza transformaciones sobre él pero sin la necesidad de que se le indiquen acciones específicas, esto es, realiza una construcción interna para ejecutar la misma Acción, pero ahora no necesariamente dirigida por un estímulo externo. A diferencia de una Acción, el individuo percibe el Proceso como algo interno, y bajo su control. En el caso de TL, una evidencia de que el estudiante tiene una concepción Proceso es que pueda verificar las condiciones de linealidad para elementos genéricos del espacio vectorial dominio o que puede reconocer si es o no una TL al verificar mentalmente tales condiciones.

Como mencionan Asiala, Brown, Devries, Dubinsky, Mathews y Thomas (1996) cuando un individuo reflexiona sobre las operaciones aplicadas a un Proceso, toma conciencia del Proceso como un todo, realiza aquellas transformaciones (ya sean Acciones o Procesos) que pueden actuar sobre él y puede construir de hecho esas transformaciones, entonces está pensando en este Proceso como un Objeto. Manifestaciones de la concepción Objeto del concepto de TL se encuentran en Roa-Fuentes y Oktac (2010).

> En el caso del concepto transformación lineal, al realizar preguntas específicas sobre esta función, como si T es una transformación lineal, ¿es siempre T^{-1} una transformación lineal?, o al considerar L(U,V) como el conjunto de transformaciones lineales definidas entre los espacios vectoriales U y V, donde cada función g definida entre los espacios vectoriales es una transformación lineal y conforma un vector del espacio vectorial L(U,V), las transformaciones lineales son consideradas como Objetos (Roa-Fuentes y Oktac, 2010, p. 95)

El paso por las etapas de Acciones, Procesos y Objetos no es necesariamente lineal, y la concepción de un estudiante puede estar en una etapa en ciertos aspectos de un determinado concepto y en otra en otros aspectos.

En la teoría APOE, un Esquema se define como la colección de Acciones, Procesos, Objetos y otros Esquemas que están vinculados de manera consciente o no en la mente de un individuo en una estructura coherente y que están disponibles para la resolución de una situación problemática.

La teoría APOE da cuenta de los siguientes mecanismos mediante los cuales se logran las construcciones mentales de Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas:

- Interiorización: construcción mental de un Proceso relativa a una serie de Acciones sobre objetos cognitivos.
- Coordinación: a partir de dos o más Procesos se construye un nuevo Proceso.
- Inversión: deshacer un Proceso para construir uno nuevo inverso del primero.
- Encapsulación: transformación de un Proceso en un Objeto
- Generalización: se refiere al uso de un determinado Esquema en una situación distinta a las inicialmente consideradas.
- Tematización: reflexión de un Esquema considerado como un todo y siendo capaz de realizar Acciones sobre dicho Esquema (González Astudillo y Bermudez, 2010, p. 5)

3.2. Ciclo de investigación

La teoría que enmarca el presente trabajo, posee un ciclo metodológico de investigación propio compuesto por tres componentes que se repiten cíclicamente: 1) análisis teórico caracterizado por la adopción de la descomposición genética hipotética o preliminar (en adelante DGp), 2) diseño y aplicación de instrumentos y 3) recolección y análisis de datos.

A partir de la aplicación de dicho ciclo es posible obtener una descripción detallada de las acciones que se realizan sobre los objetos, al tiempo que se observa cómo se construyen nuevas construcciones mentales, mediante su repetición. En consecuencia, el análisis teórico y los instrumentos se refinan y mejoran a partir del análisis de los datos empíricos obtenidos en el desarrollo de la tercera componente.

El objetivo de la primera componente del ciclo de investigación estriba en partir del análisis teórico sobre el concepto matemático considerando los libros de texto y la experiencia de los investigadores a fin de determinar un camino viable para la construcción de tal concepto, llamada descomposición genética. Este análisis permite la descripción de las construcciones mentales por las cuales se puede acceder a la construcción adecuada de un concepto. Una descomposición genética es “un modelo hipotético que describe las estructuras mentales y los mecanismos que un estudiante podría necesitar construir para aprender un concepto matemático específico” (Arnon, 2014, p. 27). Para realizar una DGp deben establecerse, en primera instancia, las supuestas construcciones previas necesarias para alcanzar la concepción deseada. La descomposición genética de un concepto no es única, ya que depende de los caminos de construcción del concepto según lo interprete el investigador.

Una vez determinada la DGp, APOE propone diseñar y aplicar instrumentos que permitan identificar las construcciones mencionadas en tal descomposición.

Finalmente, el análisis y verificación de datos es una fase muy importante para este marco teórico pues permite comprobar o refutar empíricamente la descomposición genética adoptada. Se ha de responder aquí a cuestiones del tipo: ¿Los estudiantes realizan las construcciones mentales descritas por la descomposición genética? ¿Los estudiantes pudieron comprender el concepto de

TL?

Como fue mencionado, los resultados de un ciclo de investigación ofrecen la posibilidad de ser refinados mediante una nueva aplicación de dicho ciclo.

En las secciones siguientes se detallan las decisiones asumidas en esta investigación en cada componente del clico de investigación de APOE.

4. Análisis Teórico: Descomposición Genética

4.1. Construcciones previas

Antes de exponer la DGp adoptada para la construcción del concepto bajo estudio, se describen las construcciones mentales previas: función y espacio vectorial.

Función: De manera análoga a lo expuesto en Roa-Fuentes y Oktaç (2010, 2012) las TL se visualizan como un caso particular de la noción de función. Por lo tanto, se necesita a la función como un Objeto, permitiendo ser desencapsulado en un Proceso que genere un Objeto de salida a partir de un Objeto de entrada. (Romero, 2016). Al respecto de las construcciones mentales asociadas al concepto de función, este estudio no profundiza en ellas ya que los estudiantes que participaron de la propuesta de enseñanza, ya habían cursado Matemática Básica y se encontraban cursando en simultáneo Cálculo I y, en ambas asignaturas, se trabaja con este concepto.

Espacio Vectorial: Se requiere que el Esquema de función asimile el Esquema espacio vectorial de modo que pueda verificar el cumplimiento de las condiciones de linealidad como el resultado de transformar los elementos de un espacio vectorial en otro. A su vez, el Esquema de espacio vectorial demanda una concepción Objeto de vector y una concepción Proceso de las operaciones involucradas en los espacios vectoriales: suma de vectores y multiplicación de un vector por un escalar.

4.2. Descomposición Genética preliminar

En la DGp propuesta se planeó iniciar la construcción del concepto TL con el establecimiento de funciones entre espacios vectoriales. El Esquema de espacio vectorial R^2 y de R^3 es asimilado por el Esquema de función para verificar el cumplimiento de las condiciones de linealidad: a los vectores se les pueden aplicar Acciones o Procesos de función. Se producen, aquí, las primeras dos bifurcaciones en la descomposición genética preliminar (Figura 3). Las Acciones del Esquema de función incluyen Acciones de ambos tipos: gráficas y algebraicas. Por lo tanto, para el análisis de la imagen de cada operación con vectores se tiene un par de caminos según la representación utilizada.

Se pretende desarrollar paralelamente concepciones Acción y Proceso de ambas condiciones de linealidad para los procedimientos gráficos y algebraicos. Posteriormente, obtenidos los cuatro Procesos, éstos se coordinan en pares para obtener las concepciones Proceso de cada condición.

A su vez, la coordinación de las concepciones Proceso permite la abstracción de las condiciones de las transformaciones. En otras palabras, las concepciones Proceso de cada condición de linealidad, serán coordinadas para obtener la concepción Proceso de TL.

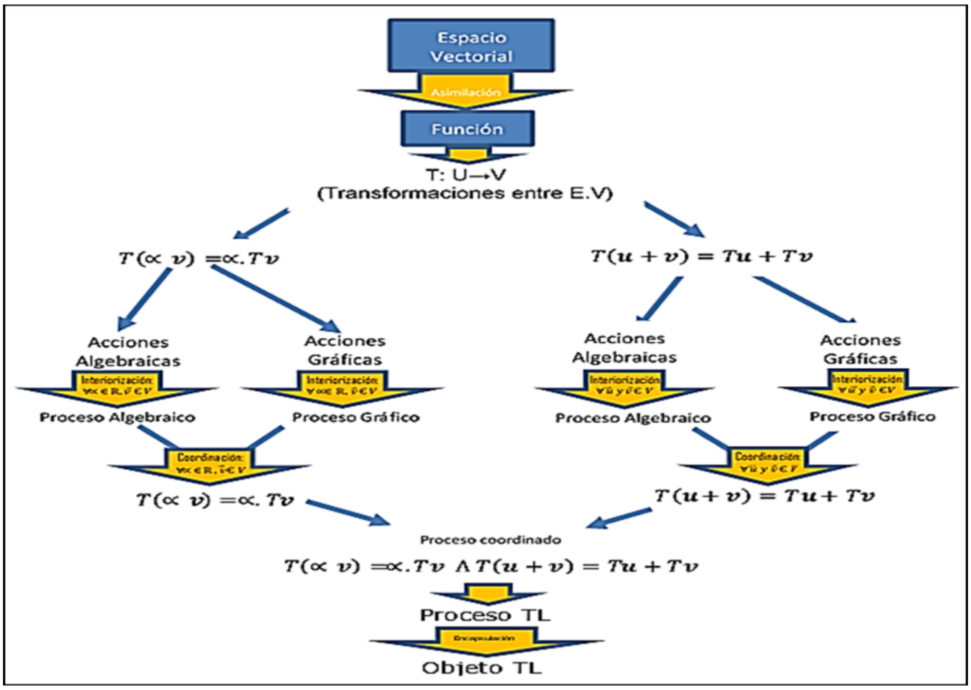

Figura 3. Descomposición Genética Preliminar. Fuente: Elaboración propia (2018)

Cabe destacar que, aunque la Teoría APOE considera tres etapas básicas en la construcción de un concepto matemático, por limitaciones provenientes del currículo de la asignatura en donde se desarrolla esta investigación - carga horaria, ser una asignatura cuatrimestral, contenidos que comprende y que excluye- somos conscientes que la implementación de la propuesta de enseñanza que se propuso posibilitó que los alumnos alcancen una concepción Proceso de TL a través de la coordinación de los Procesos algebraicos y gráficos de las dos condiciones de linealidad.

5. Diseño y aplicación de instrumentos

La propuesta de enseñanza fue aplicada a 20 estudiantes de la carrera Ingeniería en Informática que integraban la comisión de práctica de la tesista durante el 2018.

La propuesta de enseñanza planificada se desarrolló a través de tres actividades: una actividad de familiarización, la actividad principal y un cuestionario post instrucción.

5.1. Actividad de familiarización

Esta primera actividad de la propuesta estuvo ligada a applets disponibles en el siguiente sitio de la web. https://tinyurl.com/yabnkeku

La elección la herramienta Google Sites se apoyó en diversas razones: permite a los alumnos realizar las actividades en un entorno familiar similar a la Wikipedia, con libertad de horarios fuera de la clase, con la posibilidad de acceder a diferentes tipos de materiales audiovisuales además del texto escrito y al docente le ofrece la opción de marcar tareas para su realización de manera individual o grupal, puede evaluar de igual manera e incluso recibir un informe de los resultados, lo que le garantiza mantener un seguimiento del desarrollo de la asignatura y de la realización de las actividades por alumno.

A través de los ejercicios propuestos, esta actividad buscaba familiarizar a los alumnos con las representaciones y tratamientos del ambiente dinámico de GeoGebra y contribuir a consolidar las construcciones previas a las de la descomposición genética preliminar mencionadas en 4.1. Cada ejercicio se acompañó de un cuestionario; para atender algunas cuestiones sin restricción de tiempo.

5.2. Actividad Principal

Esta instancia de la propuesta se desarrolló en el laboratorio de informática de la facultad y se destinaron tres horas para su desarrollo. Cada estudiante tenía disponible una computadora y se permitía el trabajo en parejas. En esta oportunidad se presentó una hoja de trabajo impresa a cada alumno a fin de que consignara en ella las respuestas a las cuestiones planteadas. Cada actividad se encontraba ligada a un applet disponible en https://tinyurl.com/yabnkeku

Los applets de Geogebra fueron diseñados a partir de la DGp y utilizados en exploración libre para observar, mediante su manipulación, las manifestaciones de las condiciones de linealidad en el registro gráfico, para definir a las condiciones de linealidad por separado y para clasificar las transformaciones presentadas.

Los applets fueron construidos con las siguientes características: representan por separado los planos del dominio y contra-dominio (o espacio de llegada) de las transformaciones a manera de dynagraph, se puede manipular un vector del dominio mientras GeoGebra calcula la imagen de tal vector bajo alguna transformación, mostrando la imagen en el contra-dominio y, opcionalmente, mostrando el rastro del vector manipulado así como el de su imagen o la imagen de alguna región del dominio.

Goldenberg, Lewis & O'Keefe (1992, en Romero (2016)) define las representaciones tipo dynagraph como "herramientas de visualización de funciones que tienen como características que 1) la variable del dominio puede ser manipulada dinámicamente […] y 2) la variable del dominio y su imagen son representadas cada una en su propio espacio" (p. 244).

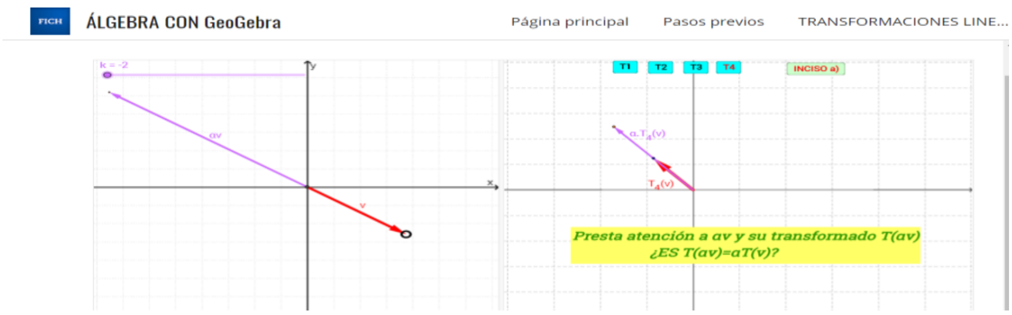

Figura 4. Ejercicio 1 de la Actividad Principal
Fuente: Elaboración propia (2018)

A modo de ejemplo presentamos una imagen de una de las actividades. En ella se presentaban cuatro transformaciones, que aparecen en la imagen como T1; T2; T3 y T4. La definición algebraica de éstas es inaccesible para los alumnos a fin de evitar que trabajen en el registro algebraico para el cumplimiento de las condiciones de linealidad.

El ejercicio está relacionado con la operación producto de un vector del plano R^2 y un escalar real. Se pretendía que los alumnos relacionen las TL con aquellas que cumplen las siguientes dos características gráficas:

- Las imágenes de vectores colineales son también vectores colineales.
- El cociente de las normas de los vectores T($\alpha\vec{v}$) y T($\vec{v}$) es igual al valor absoluto del escalar α.

Si el alumno comprueba la condición para casos concretos; es decir, si sólo considera un vector particular $\vec{v}$ y un real específico α que verifica tal condición, se concluirá que el alumno está en concepción Acción de la condición de linealidad 1), pues sólo considera el cumplimiento de la misma sobre elementos particulares. Cuando pueda pensar en el vector $\vec{v}$ como un representante cualquiera de todos los vectores de R^2 y compare la imagen de $\alpha\vec{v}$ y α por la imagen de $\vec{v}$, estableciendo si se cumplen o no las propiedades de colinealidad y proporcionalidad anteriormente mencionadas, diremos que el alumno está en una concepción Proceso de la condición, que le permite pensar que se comprueba para todo elemento de R^2. Gracias al carácter dinámico de GeoGebra es posible que el alumno manipule un vector como representante de todos los elementos de un espacio vectorial pero, sin embargo, no pueda generalizar el cumplimiento de esta condición para todos los elementos de R^2. Diremos, en este caso, que está transitando entre la concepción Acción y la concepción Proceso de la condición de linealidad pues no puede considerar el cumplimiento de la condición mediante el cuantificador universal.

En cuanto a la interpretación de la condición de linealidad 2) se pretendía que los alumnos relacionen las TL con aquellas que cumplen que la diagonal del paralelogramo cuyos lados son T($\vec{u}$) y T($\vec{v}$) coincide con el vector imagen de $\vec{u}+\vec{v}$ a través de la transformación.

5.3. Cuestionario Post-instrucción

Posterior a la actividad principal de la propuesta se implementó un cuestionario post instrucción, buscando documentar la aparición de las construcciones mentales hipotetizadas en la DGp.

En esta oportunidad, los alumnos sólo tuvieron acceso al cuestionario en formato papel y en cada actividad podían visualizar del lado izquierdo los vectores dados y, del lado derecho, las imágenes bajo una transformación. Los estudiantes debían evaluar la linealidad de las transformaciones propuestas considerando la suficiencia o carencia de los datos presentados. La lista de actividades presentada a los estudiantes incluyó preguntas para que los estudiantes analizasen las condiciones de linealidad con procedimientos algebraicos y/o gráficos.

A continuación, presentamos el dispositivo que permite describir la progresión entre las etapas Acción y Proceso y que permitirán clasificar las construcciones de los alumnos en este cuestionario Post-Instrucción.

Teniendo en cuenta la DGp en la progresión hipotética del concepto TL se reconocen las etapas Acción y Proceso, la cual puede ser abreviada como: $\boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{P}$. Pero, además, hay que considerar también las distintas coordinaciones supuestas. Por lo tanto, la progresión completa ideal buscada será abreviada como:

Condición1. $[(Aa1 \rightarrow Pa1) \wedge (Ag1 \rightarrow Pg1)] \rightarrow P1$

Condición2. $[(Aa2 \rightarrow Pa2) \wedge (Ag2 \rightarrow Pg2)] \rightarrow P2$

Coordinación de Procesos: $P1 \ \wedge P2 \rightarrow P$

En lo anterior, Ag1 y Ag2 denotan, correspondientemente, una Acción geométrica asociada a la condición de linealidad 1 y 2. Análogamente, $Aa1$ y $Aa2$ denotan, respectivamente, una Acción algebraica asociada a la condición 1 y 2. Correlativamente, $Pg1$, $Pa1$, $Pg2$, $Pa2$ expresan los Procesos geométricos y algebraicos de las condiciones 1 y 2.

A continuación, se describen los criterios para cada estadio

Criterios para definir la progresión en términos de la DGp		
Progresión		**Criterios**
PROPIEDAD 1		
A1	Aa1	Suponiendo que se cumple la propiedad, considera un vector, un escalar y una transformación, todos fijos, y opera con ellos algebraicamente para generar las respectivas imágenes. Algebraicamente puede evaluar el cumplimiento de la igualdad T(α.v) = α.T(v) en una situación particular; comparar la imagen del múltiplo con el múltiplo de la imagen
	Ag1	Suponiendo que se cumple la propiedad, considera sólo un vector, un escalar y una transformación dada, todos fijos, para generar las respectivas imágenes. Puede evaluar la conservación de colinealidad y proporcionalidad sólo para los vectores que observa (en papel o en la pantalla)
P1	Pa1	Valida el cumplimiento de la propiedad incluyendo en sus expresiones el cuantificador universal α, para declarar explícitamente el cumplimiento de la ecuación para todos los escalares y todos los vectores del espacio vectorial
	Pg1	Averigua el cumplimiento de la propiedad para un vector arbitrario. Muestra que interpreta al vector arbitrario como todos los vectores o representante de todo el dominio. Utiliza la universalidad de la propiedad. Usa, por ejemplo, como parte de sus argumentos que debe ser cumplida por todo el dominio, o utilizando

		explícitamente cuantificadores universales
PROPIEDAD 2		
A2	Aa2	Suponiendo que se cumple la propiedad, considera algebraicamente dos vectores fijos para generar la imagen de su suma como la suma de sus imágenes. Comprueba, algebraicamente, la ecuación T(u+v) = T(u)+T(v) para una T específica y vectores u y v fijos
	Ag2	El estudiante puede evaluar, sólo para un par de vectores del plano o del espacio, que las imágenes de vectores que forman un paralelogramo y su diagonal también forman un paralelogramo con su diagonal. Puede intentar probar la conservación de las propiedades gráficas para algunos vectores fijos, o eventualmente llega a afirmar que existe algún par de vectores para los que no se cumpla la propiedad.
P2	Pa2	Implica el rechazo de datos finitos como criterio suficiente para afirmar que se cumple la propiedad 2. Logra establecer la universalidad de los invariantes. Algebraicamente, verifica la igualdad de la imagen de una suma de dos vectores con la suma de sus imágenes, para cualquier par de vectores del dominio.
	Pg2	Gráficamente, averigua el cumplimiento de la propiedad para un par de vectores arbitrarios, esto significa poder comprobar que la imagen de cualquier par de vectores que forman un paralelogramo y su diagonal, también forman un paralelogramo con su diagonal

Tabla 1. Fuente: Elaboración propia

Una vez construido el Proceso geométrico y el Proceso algebraico de cada condición se espera que los estudiantes coordinen estos Procesos en un par de Procesos que se puedan utilizar en cualquiera de sus representaciones: $P1$ y $P2$. Así, el Proceso de TL comprende la conjunción de las condiciones de linealidad.

6. Recolección y análisis de datos

Se presentan a continuación los resultados de la primera actividad junto a la intencionalidad didáctica de cada ítem.

6.1. Descripción de la Actividad de Familiarización

En el ítem a) del primer ejercicio se solicitaba a los estudiantes que explicasen cómo se altera un vector al ser multiplicado por un escalar, en términos de módulo, sentido y la dirección. Mientras que el ítem 1b) se les preguntaba cuál el conjunto que forman todos los múltiplos escalares de un vector fijo.

El segundo ejercicio se abocó a la suma de dos vectores del plano. En primer lugar, dados dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de R^2 se pedía a los estudiantes que desplazándolos observaran y determinaran el comportamiento de $\vec{u}+\vec{v}$ considerando el caso de que ambos vectores fueran colineales y del mismo sentido y, en segundo lugar, colineales y de sentidos opuestos. En el último ítem de este ejercicio se pretendía que los estudiantes pudiesen concluir que $\vec{u}-\vec{v}$ se puede resolver gráficamente cómo $\vec{u}+(-1)\vec{v}$, es decir, que interpretaran la resta como una "suma modificada".

El tercer ejercicio refería a vectores del espacio. En el inciso i) se solicitaba a los estudiantes que observen el comportamiento del vector suma $\vec{u}+\vec{v}$ siendo $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores cualesquiera de R^3. Se esperaba que, aunque los vectores a considerar estuviesen en el espacio, los estudiantes pudieran asegurar que, en el plano que ellos determinan, el vector suma coincide con la diagonal del paralelogramo que tiene por lados a $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Esta presunción se fundamentaba en que la Regla del Paralelogramo, tal como se conoce a esta propiedad, es presentada a los alumnos en Matemática Básica. En el inciso ii) se pedía identificar el conjunto gen$\{\vec{u}, \vec{v}\ \ \vec{u}+\vec{v}\}$ considerando el caso en que los vectores fueran colineales y en el caso en que no lo fueran.

Aprovechando el carácter dinámico de GeoGebra, en el último ejercicio de esta actividad, se solicitaba a los alumnos la determinación de los valores de los parámetros α y β en tres combinaciones lineales dadas. En todos los casos, se presentó a los alumnos dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no colineales en R^2 y un vector $\vec{w}_i$ con i=1, 2,3. Como $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son vectores linealmente independientes siempre es posible escribir la combinación lineal $\vec{w}_i = \alpha\,\vec{u} + \beta\,\vec{v}$ encontrando los escalares α y β en forma gráfica.

6.2. Análisis de la Actividad de Familiarización

En el análisis de la actividad de familiarización se encontraron evidencias de alumnos que mostraron poseer las concepciones previas requeridas por la DGp. Para la presentación de los resultados, se adopta por denotar como E1, E2, E3…E20 a los estudiantes bajo estudio.

En la actividad 1, E12 describe claramente las características de $\alpha\vec{u}$ con $\alpha \in R$ y $\vec{u}$ un vector del plano.

Respuesta de un estudiante		
	Modificando el vector $\vec{u}$ y el escalar α ¿cómo se altera $\vec{u}$ al multiplicarlo por α? Explica brevemente (no olvides especificar que sucede con el módulo, el sentido y la dirección del vector $\overrightarrow{\alpha u}$)	**Observa y responde ¿qué conjunto tomen todo los múltiplos escalares de un vector fijo?**
E12	Al multiplicar el vector $\vec{u}$ por el escalar α, el mismo se altera de la siguiente forma: el sentido del vector cambia dependiendo del signo del escalar. La magnitud se modifica (se expande o se contrae) cuando el escalar aumenta o disminuye respectivamente. La dirección no cambia porque el vector modificado sigue estando contenido en la misma recta original	Todos los múltiplos escalares de un vector fijo forman un conjunto Linealmente independiente

Tabla 2. Fuente: Elaboración propia

El mismo alumno, en la actividad 2, respondió correctamente en relación al sentido, módulo y dirección del vector suma y resta de vectores, advirtiendo además que, en caso de ser $\vec{u}$ y $\vec{v}$ colineales, el vector $\vec{u}+\vec{v}$ es también colineal y de módulo igual a la suma de los módulos de $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Asimismo registra que, en caso de estos vectores colineales pero de sentido opuesto, el vector $\vec{u}+\vec{v}$ es también colineal a ellos, de sentido igual al de mayor longitud y de módulo equivalente a la resta de los módulos de $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Finaliza el ejercicio concluyendo que $\vec{u} - \vec{v}$ se comporta como la suma modificada, argumentando que “puede representarse como la suma de dos vectores colineales de sentido opuesto”.

En la actividad 3, hace mención a la colinealidad, a la independencia y dependencia lineal relacionándolos con el espacio generado. Lo anterior da cuenta que E12 ha encapsulado los Procesos de identificación de múltiplos de vectores y sumas de vectores como Objetos. Además, ha construido una concepción Objeto de vector, pues es capaz de trabajar con él como una entidad, puede identificar la necesidad de usar vectores en las aplicaciones y explica con claridad las propiedades de los mismos, por ejemplo, la posibilidad de que generen un subespacio vectorial de R^3.

Posteriormente, en la actividad 4, al igual que otros estudiantes, E12 determina cada uno de los valores de α y β requeridos en cada inciso. Señala que, en todos los casos, es posible expresar a $\vec{w}_i$ como como combinación lineal de los vectores dados ya que éstos son vectores linealmente independientes y que dos vectores con esa propiedad en R^2 generan a dicho espacio vectorial.

De manera similar, en la actividad 3 de E6 puede leerse “En el caso que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean colineales gen{$\vec{u}, \vec{v}$ $\vec{u} + \vec{v}$}=gen{$\vec{u}$}=gen{$\vec{v}$} ya que al ser colineales se encuentran en la misma recta” y “si no fueran colineales el conjunto $gen\{\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{u + v}\} = gen\{\vec{u}, \vec{v}\}$,, se ignora $\vec{u} + \vec{v}$ ya que es una combinación lineal de ambos vectores”.

En términos de APOE, los comentarios anteriores evidencian que E12 y E6 poseen, entre las construcciones previas mencionadas en 4.1, la concepción Objeto de vector y Proceso de la suma de vectores.

Más adelante, en la actividad 4, E6 hace referencia a la colinealidad, al paralelismo de vectores, a la dilatación de un segmento dirigido, a la conservación del sentido y la dirección asociados a la dependencia lineal.

Estu-diante	**Con respecto a $\overrightarrow{w_1}$**	**A $\overrightarrow{w_2}$**	**Y a $\overrightarrow{w_3}$**
E6	Sí, es combinación lineal de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ con $\alpha = 2$ y β=1, entonces $\vec{w}$=2$\vec{u}$+1$\vec{v}$	Sí, es combinación lineal de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ con $\alpha = 1$ y β= -1, entonces $\vec{w}$=1$\vec{u}$-1$\vec{v}$	Sí, es combinación lineal de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ con $\alpha = 2$ y β=0, entonces $\vec{w}$=2$\vec{u}$. $\vec{w}$ es un vector paralelo a $\vec{u}$, con módulo igual al doble que el de $\vec{u}$ ($\lvert w \rvert = 2.\lvert u \rvert$)

Tabla 3. Respuesta de un estudiante. Fuente: Elaboración propia

Lo anterior hace suponer que E6 ha logrado la encapsulación del concepto operación binaria al evidenciar que puede hacer acciones sobre los vectores dados, comparando espacios generados correspondientes a distintos grupos de vectores y determinar sus propiedades, como, por ejemplo, su dimensión.

En conclusión, la estrategia didáctica seguida permitió observar en algunos de los estudiantes las concepciones Objeto de vector y una concepción Proceso de las operaciones involucradas en los espacios vectoriales.

7. Reflexiones provisorias

En esta propuesta de enseñanza, enfrentar a los alumnos a situaciones sin la ecuación de las transformaciones para decidir si son o no lineales se ajusta a la observación de Roa Fuentes y Oktac (2010) "El razonamiento que logre hacer el estudiante sobre cierta situación depende del tipo de preguntas que se le planteen, orientándolas al objetivo de que generen un nuevo conocimiento que se integre al conjunto de construcciones previas" (p 92).

Los resultados de la primera actividad de la propuesta permiten inferir, desde la teoría APOE, que algunos de los estudiantes bajo estudio poseen las construcciones y mecanismos mentales que inciden en la construcción cognitiva del concepto espacio vectorial para R^2 y R^3.

Si bien los tópicos vinculados con las operaciones suma de vectores en R^2 y R^3 y multiplicación por un escalar se desarrollaron en Matemática Básica privilegiando el tratamiento algebraico de las mismas, algunos alumnos que participaron en esta propuesta, en la actividad de familiarización, han manifestaron vinculaciones tanto algebraicas como gráficas, de dichas operaciones con otros conceptos del algebra lineal como independencia lineal, subespacios vectoriales de R^2 y de R^3, etc. Conjeturamos que estas evidencias contribuyeron al logro de la coordinación de los procedimientos algebraicos y gráficos en las condiciones de linealidad en la actividad principal y en el cuestionario post-instrucción.

Los primeros resultados de esta investigación, expuestos en el apartado 6, contribuyen a interpretar el estado de construcción de las condiciones de linealidad en los espacios euclídeos R^2 y R^3 y evidencian que el empleo de las estructuras de la teoría APOE permite determinar las construcciones que subyacen a las dificultades de estudiantes universitarios en relación a la definición de TL.

Un primer análisis de las actividades de esta propuesta de enseñanza muestra que algunos estudiantes evocan razonamientos, observables a través de sus argumentos, que corresponden a la concepción Proceso TL en el modelo APOE. Sin embargo, al mismo tiempo, otros alumnos emplearon ideas erróneas relacionadas con las construcciones previas mencionadas en 4.1. Actualmente estamos abocadas a la elaboración de otras conclusiones.

8. Referencias bibliográficas

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa-Fuentes, S., Trigueros, M. & Weller, K. (2014). *APOS Theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education*. Springer Science Estados Unidos

Asiala, M., Brown, A., Devries, D.J., Dubinsky, E, Mathews, D. y Thomas K. (1996). *A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education*. En J. Kaput, A.H. Schoenfeld, E. Dubinsky (Eds.)

Research in collegiate mathematics education (pp. 1-32). American Mathematical Society. Estados Unidos.

Campos, V. F. (2017). Los conceptos Valor Propio y Vector Propio en un texto de Algebra Lineal: una mirada desde la teoría APOE (Tesis de Maestría). Instituto Politécnico Nacional, Ciudad de México, México.

Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. Educación Matemática 8 (3), 25-41.

Gareth, W. (2002). *Algebra Lineal con Aplicaciones*. Mc. Graw-Hill. México.

Gerber, H. (1992). *Algebra Lineal*. Grupo Editorial Iberamericana. México.

Goldenberg, P., Lewis P. & O'Keefe, J. (1992). *Dynamic representation and the development of an understanding of function*. En G. Harel & E. Dubinsky (Eds), The concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy (pp. 235-260). Mathematical Association of America. Estados Unidos.

González Astudillo, M. T y Bermudez, E. A. (2010). *Comprensión de la integral definida en el marco de la teoría APOE*. En A. Contreras de la Fuente y L. Ordóñez Cañada (Eds.). Jornadas de investigación en Didáctica del Análisis Matemático. Baeza, España.

Grossman, S. (2012). *Algebra Lineal* (Séptima edición). Mc Graw Hill. México.

Hoffman, K. & Kunze, R. (1971). *Algebra Lineal*. Prentice Hall Hispanoamericana. México.

Kozak, A. M, Pastorelli, S. y Vardanega, P. (2007). *Nociones de Geometría Analítica y Álgebra Lineal*. McGraw-Hill Interamericana. Argentina

Maturana Peña, I., Parraguez González, M. Trigueros Gaisman, M. (2015). Matriz Asociada a una Transformación Lineal. Una Mirada desde la Teoría APOE. En A. Ruiz (Presidencia), XIV CIAEM-IACME, Chiapas, México. Recuperado el 15 de enero de 2020, de http://xiv.ciaem-edumate.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/viewFile/501/226

Molina, G. y Oktaç, A. (2007). *Concepciones de la Transformación Lineal en Contexto Geométrico*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 10 (2), 241-273.

Parraguez, M. (2009). *Evolución cognitiva del concepto espacio vectorial* (Tesis doctoral). Instituto Politécnico Nacional, México.

Ramírez Sandoval, O. and Oktaç, A. (2012). *Modelos intuitivos sobre el concepto de transformación lineal*. *Actes du Colloque Hommage à Michèle Artigue*, Université Paris Diderot- Paris 7, Paris, Francia.

Roa-Fuentes, S. y Oktac, A. (2010). *Construcción de una descomposición genética: Análisis teórico del concepto transformación lineal. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 13*(1), 89-112.

Roa-Fuentes, S. y Oktac, A. (2012). *Validación de una descomposición genética de transformación lineal: un análisis refinado por la aplicación del ciclo de investigación de la teoría APOE*. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 15*(2), 199-232.

Rodriguez Jara, M. R, Parraguez González, M y Trigueros Gaisman, M. (2018). Construcción cognitiva del espacio vectorial R^2. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 21*(1), 57-86.

Romero Félix, C. y Oktac, A. (2015). *Representaciones dinámicas como apoyo para la interiorización del concepto de transformación lineal*. Ponencia de la XIV *Conferencia Iberoamericana de Educación Matemática XIV CIAEM-IACME*, Chiapas, México.

Romero Félix, C. F. (2016). *Aprendizaje de Transformaciones Lineales mediante la Coordinación de Representaciones Estáticas y Dinámicas* (Tesis doctoral). Centro de investigaciones y de estudios avanzados del Instituto Politécnico Nacional, Ciudad de México, México.

Soto, J. L., Romero, C. F. e Ibarra, S. E. (2012). El concepto de transformación lineal: una aproximación basada en la conversión Gráfico-Algebraica, con apoyo de GeoGebra. En F. Hitt & C. Cortés (Eds). Formation à la recherche en didactique des mathématiques (pp. 38-49). Loze-Dion. Canadá

Trigueros Gaisman, M., Maturana Peña, I., Parraguez González, M y Rodríguez Jara, M. (2015). Construcciones y mecanismos mentales para el aprendizaje del teorema matriz asociada a una transformación lineal. Educación Matemática 27(2), 95-124. Recuperado el 15 de enero de 2020, de http://www.scielo.org.mx/pdf/ed/v27n2/1665-5826-ed-27-02-00095.pdf

Podevils Lorena es Profesora de Matemática, Actualmente maestranda en Didáctica Específica. Profesora en la Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas de la Universidad Nacional del Litoral y Profesora titular en escuelas secundarias del sector público de la provincia de Santa Fe, Argentina. Se dedica a la investigación en Matemática, ocupándose en especial de las dificultades de enseñanza y aprendizaje de los conceptos del álgebra. podevilslorena@gmail.com. Tel. Móvil: 54-9-342-4083410.

Montenegro Fabiana es Profesora de Matemática, Licenciada en Matemática Aplicada y Magister en Matemática. Actualmente doctoranda en Educación. Profesora adjunta en la Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas de la Universidad Nacional del Litoral y Profesora titular en el Profesorado de Educación Secundaria en Matemática de la Escuela Normal Superior N° 32. Santa Fe– Argentina. montenegrofg@gmail.com. Tel. Móvil: 54-9-342-5337389.