REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 69. Diciembre 2023
Páginas 1-19

Completación de cuadrados y cubos en la deducción geométrica-algebraica de la ecuación de tercer grado
Completação de quadrados e cubos na dedução geométrica-algebraica da equação de terceiro grau

Julio Barreto García

Fecha de recepción: 30/10/2023
Fecha de aceptación: 5/12/2023

Resumen	En este artículo deduciremos geométrica-algebraicamente la ecuación de tercer grado mediante la completación del cubo que se construyen y se visualizan en el espacio tridimensional, los cuales generan un volumen por integración o suma de diversas figuras geométricas, sean cubos o paralelepípedos, formando un sólido en el espacio y nos ayudaremos con la completación de cubos. Esto se realiza partiendo de conceptos y proposiciones de la geometría plana, en donde se parten de figuras geométricas básicas como son cuadrados, paralelogramos y polígonos regulares o irregulares y la completación de cuadrados, usando algunos productos notables como el cuatrinomio cubo perfecto. **Palabras clave**: Didáctica de la Matemática, Completación de cuadrados y cubos, Productos Notables, Ecuación de tercer grado.
Abstract	In this article we will geometrically-algebraically deduce the third-degree equation by completing the cube that is built and visualized in three-dimensional space, which generates a volume by integration or sum of various geometric figures, whether cubes or parallelepipeds, forming a solid. in space and we will help each other with completing cubes. This is done based on concepts and propositions of plane geometry, where they are based on basic geometric figures such as squares, parallelograms and regular or irregular polygons and the completion of squares, using some notable products such as the perfect cube quadrinomial. **Keywords**: Didactics of Mathematics, Completion of squares and cubes, Notable Products, Third grade equation.
Resumo	Neste artigo deduziremos geométrico-algebricamente a equação do terceiro grau completando o cubo que se constrói e visualiza no espaço tridimensional, que gera um volume por integração ou soma de diversas figuras geométricas, sejam cubos ou paralelepípedos, formando um sólido. no espaço e ajudaremos uns aos outros a completar cubos. Isso é feito com base em conceitos e proposições da geometria plana, onde se baseiam em figuras geométricas básicas como quadrados, paralelogramos e polígonos regulares ou irregulares e no

completamento de quadrados, utilizando alguns produtos notáveis como o quadrinômio cubo perfeito.
Palavras-chave: Didática da Matemática, Completação de quadrados e cubos, Produtos notáveis, Educação de terceiro grau.

1. Introducción

Los métodos de resolución de ecuaciones de segundo y tercer grado por completación de cuadrados y cubos son bien conocidos, incluso, antes del desarrollo del álgebra, los babilonios, los griegos e, incluso, los árabes abordaban este tipo de problemas con el enfoque geométrico que el presente trabajo pretende rescatar mediante el desarrollo de las *acciones cognitivas* también llamados *procesos cognitivos* dadas en el campo de la Didáctica de la Matemática, según (Barreto, 2008a) y que es capaz de ayudar a nuestros estudiantes de secundaria en la percepción geométrica de sólidos, en función de la idea de volúmenes y les permitirá deducir geométricamente alguno de los productos notables que se originan al desarrollar, por ejemplo, la suma o diferencia del cubo de un binomio (Barreto, 2014).

Destaquemos que, este producto notable nos genera un cuatrinomio cubo perfecto, el cual es el cubo del primero más o menos el triple producto del cuadrado del primero por el segundo más el triple producto del primero por el cuadrado del segundo más o menos el cubo del segundo y puede deducirse a través de estos *procesos cognitivos* que se deben realizar coordinando la caracterización propuesta por (Duval, 1998) y desarrollados por (Torregrosa y Quesada, 2007), en donde se explica que la *visualización* está íntimamente relacionada con la forma geométrica de la figura, es decir, su configuración geométrica y el *razonamiento* se basa en aplicar las afirmaciones matemáticas que les corresponda algebraicamente, logrando la deducción geométrica-algebraica, tomando en consideración la idea de volumen.

Es preciso mencionar que, la coordinación de estos procesos cognitivos permitirá a nuestros estudiantes construir desde una perspectiva geométrica las fórmulas usadas en algunos productos notables que estén en el espacio y que involucran sólidos, tomando en cuenta lo propuesto por (Duval, 1998) que restringe el concepto de *visualización* al de *aprehensión* en el cual “Concebimos las especies de las cosas sin hacer juicio de ellas o sin negar o afirmar” según el Diccionario de la RAE (Real Academia Española, 2001). Resaltando que, en estas *aprehensiones*, nos desplazaremos de una que empieza cuando el estudiante realice por ejemplo la denominada *aprehensión operativa de reconfiguración*, que es cuando las configuraciones iniciales se manipulan como piezas de un rompecabezas.

Y también tenemos la denominada *aprehensión operativa de cambio figural*, que es cuando se añaden (quitan) a la configuración inicial nuevos elementos geométricos creando nuevas configuraciones. Destacando que, de acuerdo con un *razonamiento discursivo como un proceso natural*, el cual es espontáneamente realizado en el acto de la comunicación ordinaria a través de la descripción, explicación y argumentación, nuestros estudiantes llegan a las conclusiones a partir de la coordinación entre la *aprehensión discursiva* y la *operativa*, y se pueden usar para deducir otras proposiciones o teoremas que les permitan desarrollar toda la teoría emergente.

Esto se puede lograr usando figuras o sólidos construidas en cartulinas de colores, que nuestros estudiantes puedan además de construir también manipular y hasta reconfigurar como piezas de un rompecabezas. Debemos tener en cuenta que, los procesos cognitivos se deben realizar coordinando la caracterización propuesta por (Duval, 1998) y desarrollados por (Torregrosa y Quesada, 2007), en donde la *visualización* está íntimamente relacionada con la forma geométrica de la figura, es decir, su *configuración geométrica* y el *razonamiento* se basa en aplicar las *afirmaciones matemáticas* que les corresponda algebraicamente, lo cual nos permitirá deducir geométrica-algebraicamente dicha solución o demostración geométrica.

2. Marco teórico

En (Barreto, 2008b, 2009a, 2009b) se dedujo geométrica y algebraicamente el producto notable que se obtiene de la factorización del cuadrado de la suma de dos cantidades, el cual puede representarse geométricamente cuando los valores son positivos, usando los siguientes pasos: Se construyen dos cuadrados de lados a y b unidades, además construimos dos rectángulos verdes congruentes que tengan de largo a y ancho b unidades, como podemos ver en la siguiente figura 1:

Figura 1. Acepción geométrica de las figuras para deducir el producto notable que se origina de la factorización del cuadrado de la suma de dos cantidades (cuadrado del binomio de la suma).

Uniendo estas cuatro figuras anteriores, de acuerdo con una *aprehensión operativa de reconfiguración*, formamos efectivamente un cuadrado que denominamos cuadrado perfecto, de lado $(a+b)$ unidades, según la figura 2:

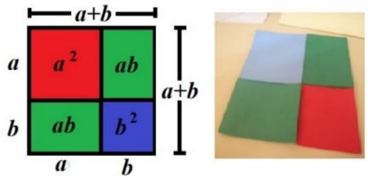

Figura 2. A la izquierda vemos la acepción geométrica del producto notable que se genera del desarrollo de la factorización del cuadrado de una suma de un binomio con los polígonos, cuadrados y rectángulos, de la figura 1. A la derecha se muestra una foto tomada con las figuras realizadas en foami en el año 2007 en el IV CIEM de la ULBRA en Canoas/RS. Brasil.

El área de este cuadrado es $(a+b)\cdot(a+b)=(a+b)^2$, según la figura 2, dada en unidades cuadradas, está formada por un cuadrado rojo de área a^2, un cuadrado azul de área b^2, y dos rectángulos verdes de área $a\cdot b$ cada uno, o sea $2\cdot a\cdot b$ (recordemos que las figuras son conjuntos elementales y, por tanto, son aditivos). Y, tenemos la siguiente *conjetura sin demostración*: $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ (1).

Conclusión 1: El cuadrado de la suma de un binomio, desde un punto de vista geométrico, significa sumar dos cuadrados cuyos lados son de a y b unidades, más dos rectángulos que tienen por longitud los lados de cada uno de los cuadrados. Si en la ecuación (1) hacemos el cambio de variable $z=a+b$, efectivamente nos queda un cuadrado de lado z, cumpliendo lo que denominamos algebraicamente la completación del cuadrado y que está dada por la ecuación $z^2=a^2+2ab+b^2$.

Nota Histórica (El Gnomon): Los griegos antiguos usaron el "gnomon", el cual es la figura que queda después de quitar de la esquina de un cuadrado otro cuadrado más pequeño. Euclides amplia el significado de gnomon aplicándolo a paralelogramos en general. Además, Aristóteles decía que el gnomon es la figura que añadida a un cuadrado aumenta sus lados, pero no altera su forma según se ve en la figura 2 a la izquierda, y para deducir el producto notable que se obtiene de la factorización del cuadrado de una suma de un binomio: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, tenemos que los rectángulos verdes y el cuadrado rojo dado algebraicamente por la expresión siguiente: $ab + ab + a^2 = 2ab + a^2$, es precisamente la parte llamada gnomon, que para mayor información podemos verlo planteado según (Barreto, 2016).

Ahora bien, para el cubo de la suma de dos cantidades, según lo planteado en (Barreto, 2014), este puede representarse geométricamente, cuando los valores son positivos, usando los siguientes pasos: Construimos dos cubos de lados a y b unidades respectivamente. Veamos la construcción en la siguiente figura 3:

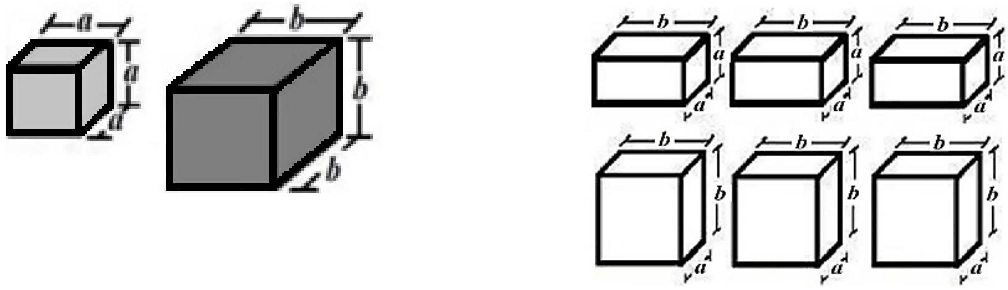

Figura 3. A la izquierda un cubo gris claro y un cubo gris oscuro de a y b unidades de lado respectivamente, los cuales tienen por volumen en unidades cubicas dadas por a^3 y b^3. A la derecha, tres paralelepípedos, en la parte de arriba de área en la base igual a $a \cdot b$, altura a y volumen $a^2 \cdot b$ unidades cubicas y en la parte de abajo tenemos tres paralelepípedos de área en la base igual a $a \cdot b,$ altura b y volumen $a \cdot b^2$ unidades cubicas.

Ahora, podemos formar unos paralelepípedos más grandes, uniendo estas figuras geométricas, mediante una *aprehensión operativa de reconfiguración*:

Figura 4. En el lado izquierdo podemos colocar estos tres paralelepípedos de la figura 3 a la derecha y el cubo gris claro de la izquierda para tener un paralelepípedo que tendrán por volumen $a^3 + 2 \cdot a^2 \cdot b + a \cdot b^2$ unidades cubicas y en el lado derecho podemos colocar otros tres paralelepípedos de la figura 3 a la derecha y el cubo gris oscuro de la izquierda para tener un paralelepípedo que tendrá por volumen $b^3 + 2 \cdot a \cdot b^2 + a^2 \cdot b$ unidades cubicas.

Antes de continuar, debemos recordar que, podemos definir un conjunto sólido que se llame elemental en el espacio tridimensional, el cual se puede expresar como unión finita de paralelepípedos (ortoedros o cubos) y las cuñas (poliedro definido por dos triángulos y tres caras trapezoidales). En tal sentido, aquí se cumple de manera general, el siguiente axioma de aditividad 2: El volumen de un conjunto elemental sólido es aditivo. Esto quiere decir que: Si A y B son conjuntos elementales sólidos tal que A intersecado con B es vacío, un punto, un segmento o una región plana (definido como un conjunto sin solapamiento en la Teoría de Integración Múltiple), entonces el volumen de A unión B es igual a la suma del volumen de A más el volumen de B. Y tenemos la siguiente figura mediante una *aprehensión operativa de reconfiguración* en el espacio que nos ayudará a deducir el producto notable de $(a+b)^3$, lo cual se ve en la *aprehensión operativa de reconfiguración* de la figura 5:

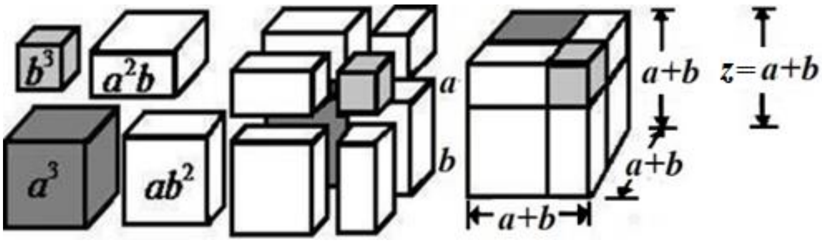

Figura 5. En la configuración geométrica se ve que podemos unir todas estas figuras elementales mediante una *aprehensión operativa de reconfiguración* y obtenemos efectivamente un cubo de lados $a + b$ unidades.

De la figura anterior obtenemos pasando de un *anclaje visual al anclaje discursivo*, usando el axioma de aditividad 2, que se cumple la siguiente expresión:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 + b^3 \quad (2).$$

Ejercicio: Desarrollar el cubo de la suma: $(3x + 2y)^3$. (Use la ecuación 2).

Conclusión 2: Si la expresión algebraica (2) la colocamos de la siguiente forma: $(a + b)^3 = a^3 + 3ab(a + b) + b^3$, y hacemos el cambio de variable $z = a + b$, nos queda ahora que $z^3 = a^3 + 3abz + b^3$, que es precisamente según la figura 5, geométricamente, lo que denominaremos la completación del cubo de lado z.

2.1. Gnómones en el espacio

Eurito solía representar los números con piedrecillas (origen de la palabra cálculo ya que en el latín calculus significa piedra), y por este procedimiento, obtuvo lo que hoy en día son los llamados números "cuadrados" y números "oblongos": En efecto, si partimos de la unidad y le añadimos mediante un gnomon los números impares siguiendo el gnomon, obtendremos los números «cuadrados», y si partimos del 2 y le añadimos mediante un gnomon los números pares, obtendremos los números «oblongos». Veamos los gnómones, discretos y continuos, en la figura 6:

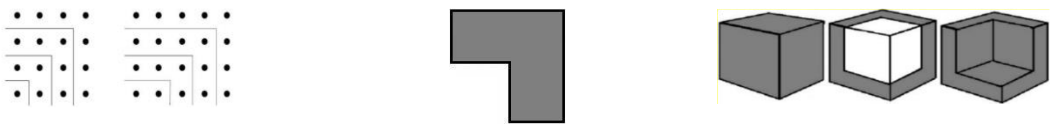

Figura 6. Las figuras a la izquierda nos muestran que la costumbre de representar los números o relacionarlos con la geometría ayuda a comprender por qué los pitagóricos consideraban las cosas como números y no sólo como numerables y transferían sus concepciones matemáticas al orden de la realidad material, lo cual vemos reflejado en el gnomon del centro. En la parte de la izquierda se muestra un cubo gris y en el centro se le quita al cubo gris un cubo blanco, con lo que nos queda a la derecha un gnomon en el espacio de color gris que queda hueco.

En la figura 6 a la izquierda, notamos la demostración geométrica de las sumas notables de los n primeros números impares y pares, tales como la suma de los números impares y la suma de los números pares, respectivamente dadas por:

$$1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n - 1) = n^2,$$

$$2 + 4 + 6 + 8 + \cdots + (2n) = n(n + 1).$$

Y en la figura 6 al centro muestra también a un polígono de seis lados llamado hexágono, que al ser además cóncavo (son todas aquellas figuras en las que al menos uno de sus ángulos interiores mide más de $180°$) se le denomina hexágono cóncavo y es llamado más comúnmente como un gnomon. Euclides amplia el significado de gnomon aplicándolo a paralelogramos en general, has una representación geométrica de la misma y la creación de un gnomon sólido, que según (Barreto, 2014) ayuda a deducir la diferencia de cubos, según la figura 6 a la derecha.

3. Completación de cuadrados

Dada una ecuación de segundo grado $x^2 + 4x - 12 = 0$, formamos la siguiente ecuación algebraica equivalente $x^2 + 4x = 12$, que expresa que la suma de las áreas del miembro izquierdo de la ecuación es igual a 12. Veamos geométricamente:

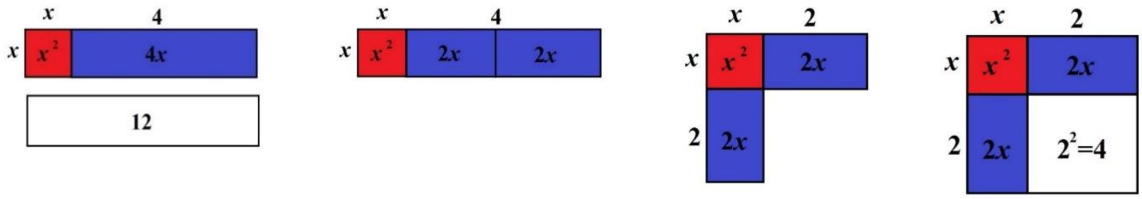

Figura 7. En la parte de la izquierda se muestra la representación geométrica de las áreas del miembro izquierdo de la ecuación, el resultado del área y la representación geométrica de las áreas del miembro izquierdo de la ecuación, mediante una *aprehensión operativa de cambio figural*, y en este caso es la mitad del área de $4x$, que será $\frac{4x}{2} = 2x$.

Ahora, reconfigurando estas figuras geométricas fundamentales de la figura 7 a la izquierda, podemos formar el siguiente gnomon, mediante una *aprehensión operativa de reconfiguración,* como se muestra a la derecha, el gnomon formado con las figuras elementales de la figura 7 a la izquierda, y aquí notamos que para completar el cuadrado debemos colocar un cuadrado de lado 2, como se muestra a la derecha en la completación del cuadrado. Ahora bien, al colocar este cuadrado blanco de lado 2 nos genera un área de 4, y así, completamos un cuadrado de lado $x + 2$. Pero como agregamos este cuadrado en el miembro izquierdo, donde se encuentra el área, debemos colocar esta área en el miembro derecho de la ecuación, en donde está el resultado del área. Ahora vamos a cuadrar el rectángulo para sumarlo con el cuadrado, de acuerdo con lo mostrado en la siguiente figura 8:

Figura 8. A la izquierda se muestran geométricamente las dos áreas, numéricas, que están en el miembro derecho de la ecuación de segundo grado. A la derecha, para cuadrar el rectángulo de área 12 unidades cuadradas, usamos la Proposición 13 del Sexto Libro de los Elementos, en la que se muestra cómo construir un segmento que sea media geométrica entre otros dos.

La construcción en cuestión, la haremos de acuerdo con la figura 8 a la derecha, cuando trazamos una circunferencia cuyo diámetro es la suma de los lados del rectángulo, y en el punto de enlace de ambas longitudes dibujamos una perpendicular al diámetro hasta la circunferencia; el segmento así generado es el lado del cuadrado buscado. Veamos la construcción geométrica en la siguiente figura 9:

Figura 9. Podemos formar el siguiente triángulo rectángulo de color violeta uniendo los puntos del diámetro con el punto de intersección, recordando que un triángulo inscrito en un círculo cuyo diámetro es un lado, es efectivamente un triángulo rectángulo.

De aquí, como los triángulos rectángulo violetas más pequeños son semejantes, según el caso de dos ángulos iguales que son α y $90° - \alpha$, así, y usando la proporcionalidad de sus lados, tenemos que: $\frac{h}{12} = \frac{1}{h}$. De lo cual queda $h^2 = 12 \cdot 1$, de donde tenemos que $h^2 = 12$, y, por tanto $h = \sqrt{12}$. Lo anteriormente deducido, se conoce como el teorema de la altura que expresa que: El cuadrado de la altura sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual al producto de las proyecciones de sus catetos sobre la hipotenusa. Ahora tenemos los dos cuadrados en la figura 10:

Figura 10. A la izquierda vemos los dos cuadrados de las áreas, numéricas, del miembro derecho de la ecuación. Ahora, a la derecha tenemos que estos dos dos cuadrados se pueden convertir en un solo cuadrado usando el teorema de Pitágoras, según (Barreto, 2008b, 2010, 2011).

Ahora, cambiando del *anclaje visual al anclaje discursivo*, tenemos que:

$$(x+2)^2 = \left(\sqrt{12}\right)^2 + (2)^2 = 12 + 4 = 16$$

De donde nos queda que: $x + 2 = \sqrt{16} = 4$, o bien $x = 2$.

El área de un conjunto elemental es aditiva, lo cual nos debe dar como resultado un área total de 16, lo cual se muestra en las figuras geométricas de la figura 11:

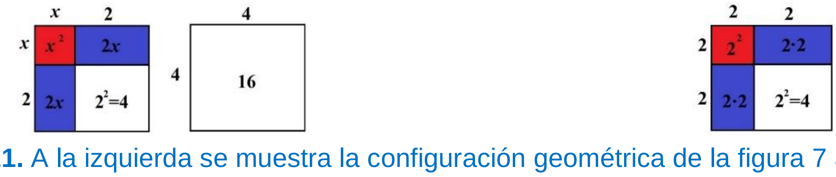

Figura 11. A la izquierda se muestra la configuración geométrica de la figura 7 a la derecha y el cuadrado formado con la figura 10 a su derecha. En la parte derecha de la figura se muestra geométricamente que, en efecto, uno de los valores que puede tomar x es 2, ya que, si comparamos las dos figuras, notamos algebraicamente que si tomamos el valor de $x = 2$, tenemos que se cumple que las áreas de los cuadrados son efectivamente iguales.

En la figura 11 a la izquierda, al comparar las dos figuras involucradas, nos queda la siguiente expresión algebraica mediante una *conjetura sin demostración*:

$(x+2)^2 = 16$. Al resolver la ecuación nos queda que las dos raíces: $x+2 = \pm\sqrt{16}$, que nos dan $x+2 = \pm 4$ y despejando $x = \pm 4 - 2$. Para una primera raíz, tenemos: $x = 4 - 2 = 2$. Que ya habíamos visto en la figura 11, pero ahora también tenemos una segunda solución será: $x = -4 - 2 = -6$. Y surgen las siguientes preguntas:

- ¿Qué representa esta solución negativa, dado que hablamos de longitudes?
- ¿Qué representación geométrica nos da esa solución algebraica negativa?

Ejercicio resuelto: Recordemos que en la ecuación de segundo grado del ejemplo desarrollado anteriormente: $x^2 + 4x - 12 = 0$, formamos la siguiente ecuación algebraica que es la equivalente: $x^2 + 4x = 12$, que expresa que la suma de las áreas del miembro izquierdo de la ecuación es igual a 12, y ese 12 es el área. Ahora, supongamos que tenemos la ecuación $x^2 - 3x + 2 = 0$, en donde tenemos la siguiente ecuación equivalente, dada por $x^2 - 3x = -2$, en donde el miembro derecho es negativo, lo cual no representa un área, pero si es el resultado de una resta de áreas en donde el área de $3x$ es mayor que el área de x^2. Veamos una solución geométrica-algebraica, partiendo de las figuras geométricas mostradas en figura 12:

Figura 12. A la izquierda se muestran las dos figuras geométricas y a la derecha tenemos el cuadrado rojo y se realiza una *aprehensión operativa de cambio figural* al rectángulo azul.

De aquí tenemos que se puede hacer la siguiente reconfiguración entre estas figuras geométricas, mediante una *aprehensión operativa de cambio figural*:

Figura 13. A la izquierda vemos la configuración geométrica de $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2$. A la derecha vemos la configuración geométrica de los dos cuadrados.

En efecto, al cuadrado rojo de área x^2, se le quitan dos rectángulos de área $\frac{3}{2}x$, y el cuadrado de área $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$, es lo que sobra de un rectángulo azul de área $\frac{3}{2}x$. Ahora, cambiando del *anclaje visual al anclaje discursivo* nos queda la siguiente expresión:

$$x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = x^2 - 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2$$

Y al sumar $\frac{9}{4}$ al miembro derecho de la ecuación principal dada, nos queda que: $-2 + \frac{9}{4} = \frac{-8+9}{4} = \frac{1}{4}$. Que, al ser positivo, si estamos en este momento comparando áreas según vemos a la derecha de la figura 13. De aquí, por inspección podemos decir que el valor de $x = 2,$ hace verdadero que las áreas sean iguales, ya que queda que: $2 - \frac{3}{2} = \frac{4-3}{2} = \frac{1}{2}$, que es el valor del lado de cuadrado blanco de área $\frac{1}{4}$. Ahora, comparando las áreas tenemos que: $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ y de aquí nos dan las dos raíces $x - \frac{3}{2} = \pm\sqrt{\frac{1}{4}}$, o bien por sacando raíz cuadrada: $x - \frac{3}{2} = \pm\frac{1}{2}$; y nos da la solución:

$$x = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \implies x = \frac{1+3}{2} \implies x = \frac{4}{2} \implies x = 2$$

Y también, tenemos una segunda solución, de acuerdo con el otro signo, y es:

$$x = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \implies x = \frac{-1+3}{2} \implies x = \frac{2}{2} \implies x = 1$$

Coloca esta otra solución en el cuadrado rojo y nota que longitud te da. Razona en términos de esta solución que proporciona un cuadrado de lado negativo, lo cual genera un conflicto cognitivo actualmente, pero que su área es positiva igual a $\frac{1}{4}$.

Se puede realizar una deducción general de una ecuación de segundo grado como en (Barreto, 2011), partiendo de la ecuación general de segundo grado dada por $ax^2 + bx + c = 0$. Como $a \neq 0,$ podemos colocar la ecuación cuadrática de la forma: $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ y lograremos hacer la siguiente construcción geométrica:

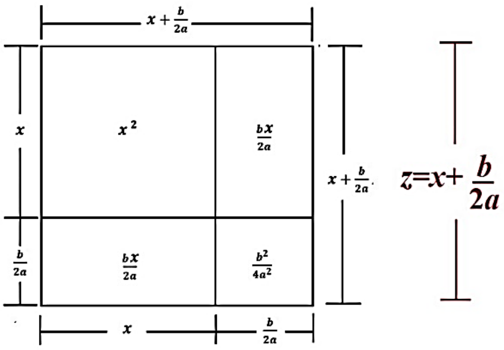

Figura 14. Configuración geométrica de la completación de cuadrado de la ecuación general de segundo grado. Recordemos que como $a \neq 0,$ se puede dividir toda la ecuación entre a.

Pasando de un *anclaje visual al anclaje discursivo*, nos queda lo siguiente: $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$, donde tenemos el denominado discriminante $\Delta = b^2 - 4ac,$ y despejando algebraicamente nos queda la solución de la ecuación de segundo grado:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Nota importante: Notemos que si en la ecuación $x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$, realizamos una transformación lineal de la forma $z=x+\frac{b}{2a}$, como en la figura 5, tenemos que, en la variable original $x=z-\frac{b}{2a}$, que es quitar la longitud $\frac{b}{2a}$ de la figura 5 y nos queda:

$$\left(z-\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{b}{a}\left(z-\frac{b}{2a}\right)=-\frac{c}{a}$$

Desarrollando: $z^2-2z\frac{b}{2a}+\frac{b^2}{4a^2}+\frac{b}{a}z-\frac{b^2}{2a^2}=-\frac{c}{a}\quad(a)$.

Y cancelando términos iguales, lo que nos indica la reconstrucción que ocurre si tomamos en cuenta la figura 14, que cuando efectivamente le quitan $\frac{b}{2a}$, que geométricamente, nos queda x^2 y lo que sobra que es $-\frac{b^2}{4a^2}$, quedando una ecuación de segundo grado más simple, usando esto en la ecuación (a):

$$z^2-\frac{b^2}{4a^2}=-\frac{c}{a}\Longrightarrow z^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

Donde tenemos el denominado discriminante $\Delta=b^2-4ac$, que tiene solución real cuando $\Delta\geq 0$. Luego, despejando nos queda la siguiente expresión: $z=\frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Ahora, devolviendo el cambio nos queda, en efecto, la resolvente o solución:

$$x+\frac{b}{2a}=\frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\Longrightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

4. Completación de cubos

Para aplicar la completación de cubos en busca de la solución, partiremos de la ecuación de tercer grado incompleta, lo cual haremos sin perder generalidad, como veremos más adelante. Sea la ecuación $x^3+mx+n=0\ (3)$, y consecuentemente la obtenida por despeje $x^3+mx=-n$, comparándolo con el cubo de una suma:

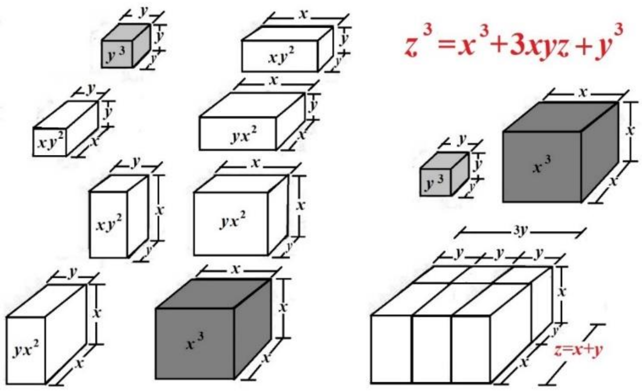

Figura 15. Descomposición volumétrica del binomio de una suma al cubo.

De la figura 15, mediante esa *aprehensión operativa de reconfiguración,* tenemos la siguiente expresión, pasando de un *anclaje visual al anclaje discursivo*:

$$(x+y)^3 = x^3 + 3xy(x+y) + y^3$$

Si tomamos en cuenta la conclusión 2: $z^3 = x^3 + 3xyz + y^3$, de completación del cubo, tenemos la siguiente configuración, tomando $z = x + y$, con y arbitrario.

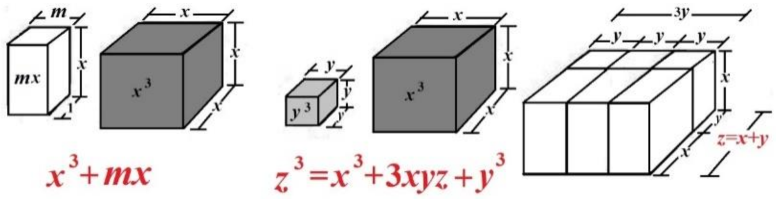

Figura 16. Comparación volumétrica para la completación del cubo.

Comparando la ecuación de tercer grado incompleta y esta última ecuación, tomaremos y de tal manera que $m = 3yz \;\; (4)$. Ahora, completando la ecuación de tercer grado incompleta, para formar la ecuación de la conclusión 2, de acuerdo con la configuración dada en la figura 16, podemos sumar y^3 a ambos lados de la expresión para completar el cubo que nos permita realizar la deducción buscada:

$$x^3 + mx + y^3 = -n + y^3,$$

Quedando en el lado izquierdo de la ecuación el cubo buscado y tenemos que:

$$z^3 = -n + y^3.$$

Despejando y, que es una variable arbitraria, de la ecuación (4) queda $z = \frac{m}{3y} \rightarrow y = \frac{m}{3z}$ y sustituyendo en la ecuación anterior, tenemos la siguiente expresión:

$$z^3 = -n + \left(\frac{m}{3z}\right)^3 \text{ o bien desarrollando } z^3 = -n + \frac{m^3}{27z^3}.$$

Luego, linealizando, multiplicando por z^3, en toda la expresión anterior, queda:

$$z^6 = -nz^3 + \frac{m^3}{27} \rightarrow z^6 + nz^3 = \frac{m^3}{27}.$$

Haciendo el cambio de variable, $u = z^3$, nos queda la siguiente ecuación cuadrática, que fue ampliamente estudiada al comienzo de este artículo:

$$u^2 + nu = \frac{m^3}{27}.$$

Y podemos completar cuadrados en la parte izquierda de la expresión anterior:

$$u^2 + nu + \left(\frac{n}{2}\right)^2 = \frac{m^3}{27} + \left(\frac{n}{2}\right)^2,$$

es decir, la expresión de la izquierda, tenemos un cuadrado perfecto, que queda:

$$\left(u + \frac{n}{2}\right)^2 = \left(\frac{n}{2}\right)^2 + \frac{m^3}{27}.$$

De donde tenemos, al sacar la raíz cuadrada, que esto nos da lo siguiente:

$$\sqrt{\left(u + \frac{n}{2}\right)^2} = \left|u + \frac{n}{2}\right| = \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3} \rightarrow u + \frac{n}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3}$$

Donde podemos ahora definir el discriminante de la ecuación de tercer grado de la siguiente forma: $\Delta = \left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3$, y nos queda la siguiente expresión:

$$u = -\frac{n}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3}$$

Y devolviendo el cambio de variable $u = z^3$, tomando una de las seis soluciones:

$$z = \sqrt[3]{-\frac{n}{2} + \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3}}$$

De donde haciendo algunos cálculos con las cantidades subradicales y por la ecuación (4) que:

$$\sqrt[3]{-\frac{n}{2} + \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3}} \cdot y = \frac{m}{3}$$

Realizando algunos cálculos algebraicos, empezando por elevar al cubo en ambos miembros de la expresión deducida anteriormente, tenemos que:

$$\left(\sqrt[3]{-\frac{n}{2} + \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3}}\right)^3 \cdot y^3 = \left(\frac{m}{3}\right)^3$$

De aquí:

$$\left(-\frac{n}{2}+\sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2+\left(\frac{m}{3}\right)^3}\right)\cdot y^3=\left(\frac{m}{3}\right)^3$$

Despejando:

$$y^3=\frac{\left(\frac{m}{3}\right)^3}{-\frac{n}{2}+\sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2+\left(\frac{m}{3}\right)^3}}$$

Racionalizando:

$$y^3=\frac{\left(\frac{m}{3}\right)^3}{-\frac{n}{2}+\sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2+\left(\frac{m}{3}\right)^3}}\cdot\frac{\left(-\frac{n}{2}-\sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2+\left(\frac{m}{3}\right)^3}\right)}{\left(-\frac{n}{2}-\sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2+\left(\frac{m}{3}\right)^3}\right)}$$

$$y^3=\frac{\left(\frac{m}{3}\right)^3\left(-\frac{n}{2}-\sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2+\left(\frac{m}{3}\right)^3}\right)}{\left(-\frac{n}{2}\right)^2-\left(\sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2+\left(\frac{m}{3}\right)^3}\right)^2}$$

$$y^3=\frac{\left(\frac{m}{3}\right)^3\left(-\frac{n}{2}-\sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2+\left(\frac{m}{3}\right)^3}\right)}{\left(-\frac{n}{2}\right)^2-\left(\frac{n}{2}\right)^2-\left(\frac{m}{3}\right)^3}$$

$$y^3=\frac{\left(\frac{m}{3}\right)^3\left(-\frac{n}{2}-\sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2+\left(\frac{m}{3}\right)^3}\right)}{-\left(\frac{m}{3}\right)^3}$$

$$y^3=-\left(-\frac{n}{2}-\sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2+\left(\frac{m}{3}\right)^3}\right)$$

$$y=\sqrt[3]{-\left(-\frac{n}{2}-\sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2+\left(\frac{m}{3}\right)^3}\right)}$$

$$y=-\sqrt[3]{\left(-\frac{n}{2}-\sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2+\left(\frac{m}{3}\right)^3}\right)}$$

Por lo cual, de la transformación lineal $z = x + y$, tenemos que devolviendo al cambio de variable $x = z - y,$ podemos obtener la siguiente solución de la ecuación:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{n}{2} + \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3}} - \left(-\sqrt[3]{-\frac{n}{2} - \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3}}\right)$$

$$x = \sqrt[3]{-\frac{n}{2} + \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{n}{2} - \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3}} \quad (5)$$

En concordancia con el cambio de variable realizado en la ecuación de segundo grado, podemos hacer un cambio de variable adecuado para la ecuación general de tercer grado dada por la expresión $at^3 + bt^2 + ct + d = 0$ (6), la cual, mediante algunas configuraciones, notamos que puede ser de la siguiente forma $x - \frac{b}{3a} = t$.

Hagamos algunos cálculos en la ecuación (6) sustituyendo el despeje o cambio de variable $t = x - \frac{b}{3a}$, teniendo en cuenta que en la ecuación (6) también $a \neq 0$:

$$a\left(x - \frac{b}{3a}\right)^3 + b\left(x - \frac{b}{3a}\right)^2 + c\left(x - \frac{b}{3a}\right) + d = 0$$

De lo cual nos queda, dividiendo entre $a \neq 0,$ y desarrollando nos queda que:

$$x^3 - \frac{b}{a}x^2 + \frac{b^2}{3a^2}x - \frac{b^3}{27a^3} + \frac{b}{a}x^2 - \frac{2b^2}{3a^2}x + \frac{b^3}{9a^3} + \frac{c}{a}x - \frac{cb}{3a^2} + \frac{d}{a} = 0$$

$$x^3 + \left(\frac{3ac - b^2}{3a^2}\right)x + \frac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{27a^3} = 0$$

De donde tenemos los coeficientes :

$$m = \frac{3ac - b^2}{3a^2}, \qquad n = \frac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{27a^3} \quad (7)$$

Devolviendo el cambio realizado a la ecuación general de tercer grado a la ecuación reducida o incompleta (3) según la solución (6), nos queda la denominada Fórmula de Cardano, que es usada para la resolución de la ecuación de tercer grado:

$$t = \sqrt[3]{-\frac{n}{2} + \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{n}{2} - \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3}} - \frac{b}{3a} \quad (8)$$

Debemos entonces, tener en cuenta que, dada la ecuación de tercer grado (6) con coeficientes reales, para el discriminante: $\Delta = \left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3$, se cumple lo siguiente:

- Si $\Delta = 0$, todas sus raíces son reales, y al menos dos de ellas son iguales.
- Si $\Delta > 0$, la ecuación tiene una raíz real y dos raíces son imaginarias.
- Si $\Delta < 0$, la ecuación tiene tres raíces reales simples.

5. Actividades de aula

1) Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $t^3 + 3t^2 + 3t + 1 = 0$. En esta ecuación tenemos los coeficientes: $a = 1$, $b = 3$, $c = 3$ y $d = 1$, y del cambio de variable sugerido $t = x - \frac{b}{3a}$, sustituyendo los valores de los coeficientes de la ecuación de tercer grado, el cambio de variable nos queda $t = x - 1$. Sustituyendo en la ecuación:

$$(x-1)^3 + 3(x-1)^2 + 3(x-1) + 1 = 0.$$

Realizando algunos cálculos algebraicos y reduciendo nos queda que: $x^3 = 0 \quad (9)$. De aquí tenemos como solución que: $x = 0$. Y del cambio de variable $t = x - 1$, nos queda que: $t = -1$, que es la única raíz real. Este es precisamente el caso en donde $\Delta = 0$, y, además, se observa que en la ecuación (8) precisamente se cumple que $m = 0, n = 0$. Esto se puede verificar mediante algunos cálculos algebraicos realizados en los coeficientes (7). Aquí, geométricamente se formaron con la raíz única un **Cubo Perfecto**, cuyo lado despejando de la solución es $t + 1 = 0$, como veremos en la configuración geométrica de la siguiente figura 17:

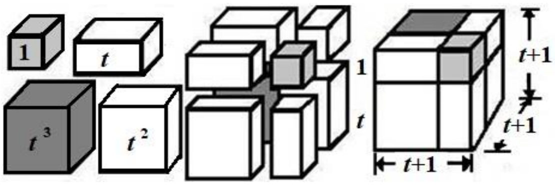

Figura 17. Cubo perfecto de lado t+1.

Y, por tanto, también notamos que, para que este cubo tenga volumen cero, necesariamente debe ocurrir que $t = -1$. y como al menos dos de ellas son iguales, y, es más, las tres raíces efectivamente son iguales.

b) $t^3 - 3t^2 + 3t - 1 = 0$. En esta ecuación tenemos los coeficientes: $a = 1$, $b = -3$, $c = 3$ y $d = -1$, y del cambio de variable sugerido $t = x - \frac{b}{3a}$, tenemos que, colocando los valores de los coeficientes de la ecuación de tercer grado, el cambio de variable nos queda $t = x + 1$. Sustituyendo en la ecuación dada en este ejercicio, tenemos lo siguiente:

$$(x+1)^3 - 3(x+1)^2 + 3(x+1) - 1 = 0.$$

Realizando algunos cálculos nos queda: $x^3 = 0 \quad (10)$. De aquí tenemos que: $x = 0$. Y del cambio de variable $t = x + 1$, nos queda que: $t = 1$. En este ejercicio notamos que nos da precisamente la raíz real en la cual todas son iguales. Este es precisamente el caso en donde $\Delta = 0$, en donde se observa en la ecuación (8) que $m = 0, n = 0$. Esto se puede verificar mediante cálculos en los coeficientes (7). Aquí, geométricamente se formaron con la raíz única un **Cubo perfecto**, cuyo lado despejando de la solución es $t - 1 = 0$, veamos la construcción en la figura 18:

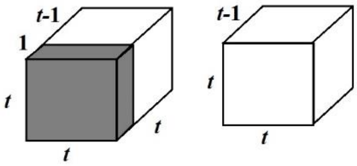

Figura 18. A la izquierda tenemos un cubo de lado t y de volumen t^3, del que extraemos un paralelepípedo de lados $1, t, t$ y volumen t^2, quedando el paralelepípedo del lado derecho.

Ahora veamos la siguiente configuración geométrica para el paralelepípedo de la figura 18, según la *aprehensión operativa de cambio figural* en el espacio, que se muestra en la siguiente figura 19:

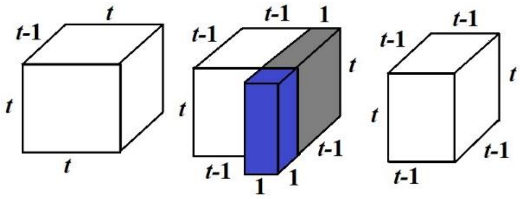

Figura 19. A la izquierda tenemos un paralelepípedo de lados $t, t, t-1$, del que extraemos como vemos en el centro un paralelepípedo de lados $1, t, t$ y volumen t^2, para formarlo, esta vez debemos agregar un paralelepípedo de lados $1{,}1, t$ y volumen t de color azul, quedando el paralelepípedo del lado derecho.

Ahora veamos otra configuración geométrica para el paralelepípedo de la figura 19, según *aprehensión operativa de cambio figural* de la figura 20:

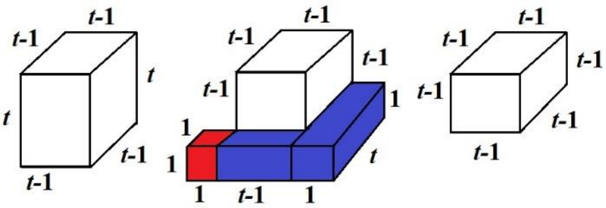

Figura 20. A la izquierda tenemos un paralelepípedo de lados $t, t-1\ t-1$, del que extraemos como vemos en el centro un paralelepípedo de lados $1, t, t$ y volumen t^2, para lo cual debemos agregar dos paralelepípedos de lados $1{,}1, t$ y volumen total de $2t$ de color azul, y como vemos sobra un cubo de lado 1, y volumen 1, que se ve en la figura roja, quedando el cubo del lado izquierdo de lado $t-1$ y volumen $(t-1)^3$.

De todo lo anterior tenemos que este cubo de lado $t - 1$ se forma quitándole 3 paralelepípedos de volumen total $3t^2$, al que para lograrlo debimos sumarle 3 paralelepípedos de volumen total $3t$ y que a la vez debimos quitarle un cubo de volumen 1, y algebraicamente cambiando del *anclaje visual al anclaje discursivo*, tenemos la siguiente expresión:

$(t-1)^3 = t^3 - 3t^2 + 3t - 1$. Y, por tanto, notamos tanto de esta expresión, como del cubo de la parte derecha de la figura 20 que este volumen es cero cuando precisamente se toma el valor de $t = 1$.

c) $t^3 - 4t^2 + 5t - 2 = 0$**.** En esta ecuación los coeficientes: $a = 1, b = -4$, $c = 11$ y $d = -6$, del cambio de variable sugerido $t = x - \frac{b}{3a}$, tenemos colocando los valores de los coeficientes de la ecuación de tercer grado, que el cambio de variable nos queda $t = x + \frac{4}{3}$. Sustituyendo en la ecuación:

$$\left(x + \frac{4}{3}\right)^3 - 4\left(x + \frac{4}{3}\right)^2 + 5\left(x + \frac{4}{3}\right) - 2 = 0.$$

Realizando algunos cálculos queda: $x^3 - \frac{1}{3}x - \frac{2}{27} = 0 \quad (11)$. Recordando que, esto lo comparamos con la expresión del cubo: $z^3 = x^3 + 3xyz + y^3$.

De lo cual debe ocurrir que si $3yz = -\frac{1}{3}$, tenemos que: $z^3 = x^3 - \frac{1}{3} + y^3 = y^3 + \frac{2}{27}$, teniendo en cuenta que $z = -\frac{1}{3y}$, y nos queda: $\left(-\frac{1}{9y}\right)^3 = y^3 + \frac{2}{27}$ o bien $-\frac{1}{729y^3} = y^3 + \frac{2}{27}$. Multiplicando por y^3, $-\frac{1}{729} = y^6 + \frac{2}{27}y^3$. Haciendo $y^3 = u$, queda: $-\frac{1}{729} = u^2 + \frac{2}{27}u$. Completando el cuadrado:

$$-\frac{1}{729} + \left(\frac{1}{27}\right)^2 = u^2 + \frac{2}{27}u + \left(\frac{1}{27}\right)^2$$

Quedando: $0 = \left(u + \frac{1}{27}\right)^2$ y devolviendo los cambios aplicados tenemos:

$$u = -\frac{1}{27} \quad \Rightarrow \quad y^3 = -\frac{1}{27} \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{3}$$

$$z = 1 \quad \Rightarrow \quad 1 = x - \frac{1}{3}\ ; \quad x = \frac{2}{3}$$

Y la raíz simple es dada por $t = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = 2$, y la otra raíz doble se puede buscar reduciendo el polinomio. Es preciso mencionar que este es el caso donde $\Delta = 0$, en donde se observó, mediante cálculos que $m \neq 0, n \neq 0$ haciendo cálculos en los coeficientes (7) y se puede ver en la ecuación (11). Y de la fórmula de Cardano, queda: $t = 2\sqrt[3]{-\frac{n}{2}} - \frac{b}{3a}$**.** Y colocando los coeficientes para hallar el valor de n, se obtienen la raíz simple que está dada por: $t = 2$. Se pueden, por ahora, realizar cálculos con polinomios para hallar la raíz doble. Aquí, geométricamente los estudiantes formaron con las tres raíces un **Paralelepípedo**, según la mostrada en la figura 21:

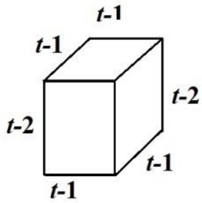

Figura 21. Configuración geométrica que queda de la ecuación de tercer grado dada por t^3-4t^2+5t-2, lo cual se puede realizar trazando los pasos realizados en las figuras 18 a la 20.

d) t^3-2t^2+t-2. Este es el caso donde $\Delta > 0$, en donde mediante algunos cálculos, la raíz real simple viene dada por la fórmula de Cardano:

$$t=\sqrt[3]{\frac{26}{27}+\frac{15\sqrt{3}}{27}}+\sqrt[3]{\frac{26}{27}-\frac{15\sqrt{3}}{27}}+\frac{2}{3}.$$

Es preciso mencionar que, esta raíz es un poco más compleja pues se resuelve usando radicales semejantes, dando como resultado que $t=2$. Después, se puede hacer alguna operación con el polinomio reducido para determinar las dos raíces imaginarias conjugadas, y el ejercicio se torna aún más complejo, incluso para hacer su configuración geométrica.

e) $t^3-7t-6=0$. Aquí, $\Delta < 0$, la ecuación tiene tres raíces reales simples. Aun así, para hallar una raíz por la fórmula de Cardano implica cálculos con radicales semejantes, después mediante operaciones con el polinomio hallamos las otras dos raíces y se puede realizar la configuración geométrica que es un **Paralelepípedo**, en el espacio tridimensional. Queda como ejercicio propuesto para practicar el lector.

6. Conclusión

En esta experiencia de aula realizada con los estudiantes se evidenció la importancia que tiene el trabajo en equipo, y sobre todo la construcción del aprendizaje a partir de figuras geométricas realizadas en foamis o con cartulinas de colores y que se manipulan como si fueran piezas de un rompecabezas, lo cual les permite a los integrantes del grupo configurar y reconfigurar los procedimientos a través de procesos constructivos, llegando luego a razonamientos que les permiten crear un aprendizaje significativo. Pero debemos tener presente que se debe tener una comunicación en el aula de matemática lo cual es muy importante, ya sea de diversos modos de comunicación que no se restringen únicamente a la verbal.

Sin embargo, aunque la actividad fundamental en las clases de Matemática sea el razonamiento que efectúen nuestros estudiantes, la enseñanza será tanto más activa cuanto más haga funcionar la imaginación, la creatividad y la inventiva de nuestros estudiantes a partir de la construcción de las figuras geométricas. Al mismo tiempo que podemos mantenerlos entretenidos, interesados a la vez que ellos descubran conceptos que no son tan triviales ni obvios como los presentados en este artículo, los cuales le permitirán hallar la solución de una ecuación de tercer grado a partir de deducciones geométricas, sin memorizarse formulas tan complicadas y largas como es precisamente la fórmula de Cardano para hallar esta solución.

Bibliografía

Barreto, J. (2008a). Deducciones de las fórmulas para calcular las áreas de figuras geométricas a través de procesos cognitivos. *Números*, 69. www.sinewton.org/numeros/numeros/

Barreto, J. (2008b). Deducciones del Teorema de Pitágoras a lo largo de la historia como recurso didáctico en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática. *Números*, 69. www.sinewton.org/numeros/numeros/

Barreto, J. (2009a). Otras deducciones o extensiones del Teorema de Pitágoras a lo largo de la historia como recurso didáctico. *Números*, 70. http://www.sinewton.org/numeros/numeros/

Barreto, J. (2009b). Percepción geométrica de los productos notables y de la media geométrica. *Números*, 71. http://www.sinewton.org/numeros/numeros/

Barreto, J. (2010). Deducción y extensión más general del Teorema de Pitágoras. *Números*, 75. http://www.sinewton.org/numeros/numeros/

Barreto, J. (2011). Dos perspectivas geométricas de la diferencia de cuadrados como recurso didáctico en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática. *Matematicalia*, 7. No. 2. http://www.matematicalia.net/

Barreto, J. (2014). Dinamización Matemática: Deducción geométrica de los productos notables en el espacio tridimensional como recurso didáctico en el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática. *Unión*, 38. https://revistaunion.org/index.php/UNION/article/view/724/444

Barreto, J. (2016). Los gnómones y la solución geométrica de ecuaciones de segundo grado y su aplicación a los productos notables. *Suma*, 38. http://revistasuma.es/revistas

Duval, R. (1998). *Geometry from a cognitive point of view*. Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers, pp 37-51.

Euclides. (1996). *Elementos*. [Traducción de M. L Puertas C.]. (tres vols.). (1a ed.). Editorial Gredos: España.

Real Academia Española. (2001). Diccionario de la lengua española (22a ed.). Consultado en: http://www.rae.es/rae.html

Torregosa, G y Quesada, H. (2007). Coordinación de los Procesos Cognitivos en Geometría. *Relime*, 10 (2), 273-300. México: Publicación del CLAME.

Julio Barreto García. Licenciado en Ciencias Matemáticas por la Universidad Centroccidental “Lisandro Alvarado”. Especialista en procesos didácticos del nivel básico por la Universidad Pedagógica Experimental Libertador (UPEL)- Instituto de Mejoramiento Profesional del Magisterio (IMPM). Doctorante en Educación en la Universidad Pedagógica Experimental Libertador (UPEL) - Instituto Pedagógico Rafael Alberto Escobar Lara (IPRAEL). Dedico este articulo a mi primo y mentor matemático Guido Rafael Pereira García. Laboro en el Colegio Cristiano Annie Soper, en la ciudad de Moyobamba, en la región San Martin, Perú, como profesor especialista en el nivel secundario. Email: juliocesarbarretogarcia@hotmail.com