

EL RINCÓN INTERCREATIVO

Vereda perimétrica de una piscina elíptica

Mariano A. González Ulloa

mgonzal@pucp.edu.pe

Una variante interesante del problema propuesto en “El Rincón de Problemas”, del número 67 de UNIÓN, es el siguiente problema:

Problema:

Se dispone de un terreno rectangular de dimensiones $30m$ de largo por $15m$ de ancho en el cual se desea construir una piscina de forma elíptica con eje mayor de longitud $20m$ y eje menor de longitud $8m$. Además, se quiere construir una vereda alrededor de la piscina, de ancho constante, la cual se debe cubrir con mayólicas. ¿Cuál es el ancho máximo de la vereda si se dispone de $200m^2$ de mayólica?

Solución.- Observar que el borde exterior de la vereda es de forma elíptica. Para determinar el ancho de la vereda, se puede plantear de la siguiente manera:

$$A(x) = A_i(x) - A_p$$

donde x representa el ancho de la vereda, $A(x)$ es el área de la vereda a construir,

$A_i(x)$ es el área de la región elíptica cuyo borde es el borde exterior de la vereda:

$$\pi(10 + x)(4 + x)$$

A_p es el área de la piscina : $\pi \times 10 \times 4 = 40 \pi$.

Entonces, $A(x) = \pi(10 + x)(4 + x) - 40 \pi = \pi x^2 + 14 \pi x$

Luego, resolver la inecuación

$$\pi x^2 + 14 \pi x \leq 200$$

Cuya solución es:

$$0 < x \leq \sqrt{\frac{200 + 49\pi}{\pi}} - 7$$

El mayor valor de x sería la solución del problema. Pero, dado que se trata de un número irracional, bastaría tomar una aproximación, por ejemplo $x = 3.61423$.

Para efectos prácticos, considerando el ancho del terreno, $0 < x \leq 3.5$, se podría considerar el ancho de la vereda 3.50 m.

Observación

Como ilustración del proceso desarrollado, se debe observar que el área de la vereda se expresa mediante una función cuadrática

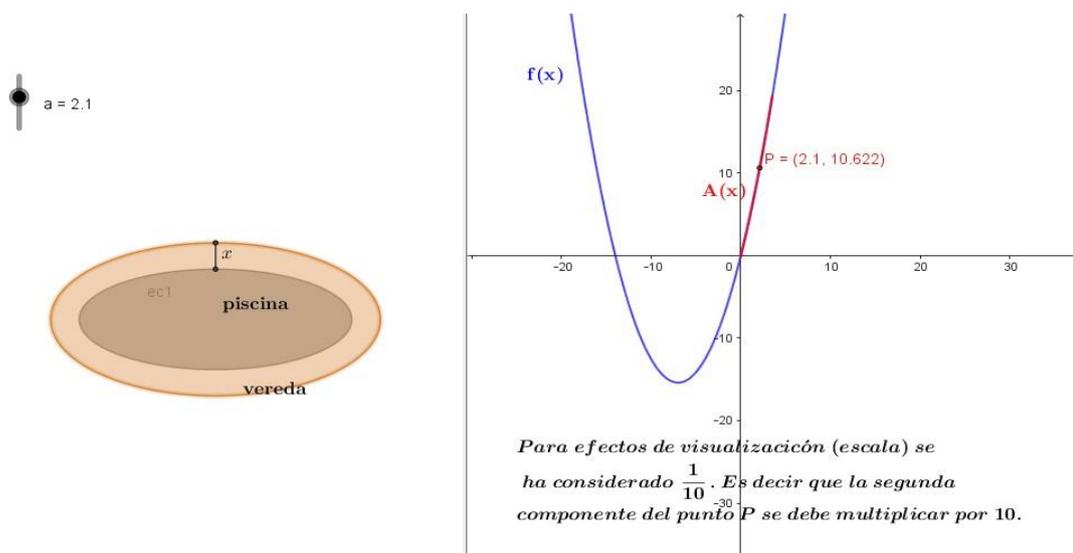
$$A(x) = \pi x^2 + 14 \pi x$$

cuya gráfica es una parábola con vértice en el punto $(-7, -49\pi)$ y cuyo dominio está restringido al intervalo $[0, 3.5]$, por las restricciones en las dimensiones del terreno.

Así, la mejor solución del problema será el mayor valor de x que satisface las restricciones. Ver en la figura, la construcción realizada con GeoGebra, donde se puede arrastrar el deslizador para visualizar la variación del ancho (x) de la vereda y la gráfica de la función cuadrática; y también se puede ver la animación.

https://drive.google.com/drive/folders/1r7AJdzA_ekfjx6JM3pCU7TTCniYpylxF

https://drive.google.com/drive/folders/1r7AJdzA_ekfjx6JM3pCU7TTCniYpylxF



Nota: Quienes tengan instalado GeoGebra en su computador, podrán ver la animación al hacer clic en los enlaces que figuran en el párrafo anterior.