

<http://www.fisem.org/www/index.php>
<https://union.fespm.es/index.php/UNION>

Dos Teorías de Aprendizaje que se Complementan para Analizar el Proceso de Resolución de Problemas en Ambientes de Geometría Dinámica

Carlos David Sánchez, Carmen Samper

Fecha de recepción: 02/05/2020
 Fecha de aceptación: 30/11/2020

Resumen	<p>Se analiza uso e interpretación de representaciones que construyen, en un programa de geometría dinámica, los estudiantes de secundaria cuando resuelven un problema abierto de conjeturación. Para ello se usan la Teoría de la Variación y la Teoría de Aprehensiones Figurales. Se destaca el potencial que tiene conjugar ambas teorías para comprender el proceso de resolución de problemas en ambientes de geometría dinámica. Se muestra cómo la variación, a través de distintos tipos de arrastre, definen nuevas formas de aprehender una figura y cómo las aprehensiones permiten nuevas estrategias de exploración.</p> <p>Palabras clave: tipos de arrastre, variación, tipos de aprehensiones figurales, problemas abiertos de conjeturación, geometría dinámica.</p>
Abstract	<p>We analyze the use and interpretation of representations that high school students construct in a dynamic geometry program when they solve a conjecturing open problem. For this, the Theory of Variation and the Theory of Figurative Apprehensions are used. The potential of combining both theories to understand the problem-solving process in dynamic geometry environments is highlighted. It shows how variation, through different types of drag, defines new ways of apprehending a figure and how apprehensions allow new exploration strategies.</p> <p>Keywords: types of drags, variation, types of figural apprehensions, open conjecture problems, dynamic geometry.</p>
Resumo	<p>Analizamos o uso e a interpretação de representações que alunos dos anos finais do ensino fundamental ao utilizar um programa de geometria dinâmica, quando resolvem um problema de conjectura aberta. Para isso, são utilizadas a Teoria da Variação e a Teoria das Apreensões Figurais. É destacado o potencial de combinar as duas teorias para entender o processo de resolução de problemas em ambientes de geometria dinâmica. Ele mostra como a variação, por diferentes tipos de arrasto, definem novas maneiras de apreender uma figura e como as apreensões permitem novas estratégias de exploração.</p> <p>Palavras-chave: tipos de arrasto, variação, tipos de apreensões figurais, problemas de conjecturas abertas, geometria dinâmica.</p>

1. Introducción

En los últimos años, varios investigadores en el campo de la didáctica de la geometría han propuesto teorías que permiten analizar los procesos de enseñanza y aprendizaje. Según Sinclair et al. (2016), las teorías se clasifican en dos: aquellas relacionadas específicamente con la enseñanza y el aprendizaje de la geometría y aquellas que son teorías generales sobre educación que se aplican al contexto de la educación geométrica. En el presente artículo se reportan resultados de un estudio en el que se pretende mostrar el potencial que tiene la articulación de dos teorías: la Teoría de la Variación (general) y la Teoría de las Aprehensiones Figurales (específica del aprendizaje de la geometría), cuando se utilizan como herramientas de análisis del proceso de resolución de problemas realizado por estudiantes de grado octavo. Específicamente, se determinan, mediante estas dos teorías, aspectos del uso e interpretación de lo que representan los estudiantes en un Sistema de Geometría Dinámica (SGD) que influyen en la identificación de propiedades geométricas, cuando resuelven problemas que implican la formulación de una conjetura.

En Leung (2011), se propone la idea de utilizar las estrategias de arrastre y los tipos de aprehensiones como herramientas para el diseño de tareas en un SGD. Este antecedente investigativo, sugiere la posibilidad de que ambas teorías también se puedan aplicar en el análisis de los procesos de resolución de problemas que realizan los estudiantes. Esto le puede aportar al docente elementos para entender cómo los estudiantes interpretan las representaciones que construyen en un SGD y las acciones que realizan para discernir propiedades geométricas cuando resuelven problemas de conjeturación.

A continuación, se presentan los principales referentes teóricos del estudio, los aspectos metodológicos que se tuvieron en cuenta, un ejemplo de análisis de los datos obtenidos y conclusiones al respecto.

2. Marco de referencia

La fundamentación teórica del estudio se divide en tres partes: concepto de problema abierto de conjeturación, tipos de arrastre de acuerdo con la Teoría de la Variación y tipos de aprehensiones figurales. De la primera teoría, se usan como referentes las investigaciones de Leung (2003, 2008) y Leung, Baccaglioni–Frank y Mariotti (2013) en las que el autor determina los tipos de arrastre según los patrones de variación; y de la segunda, se tienen en cuenta los estudios de Duval (1995, 1998, 1999) y Torregrosa y Quesada (2007) en los que se explican los diferentes tipos de aprehensiones figurales.

2.1. Sobre los problemas abiertos de conjeturación

Arsac y Silver (citados por Baccaglioni – Frank y Mariotti, 2010) definen problema abierto como aquel cuyo enunciado no menciona la solución ni sugiere una vía de resolución. A partir de esa definición, Baccaglioni – Frank y Mariotti (2010) proponen la idea de problemas abiertos de conjeturación, para denotar aquellos problemas abiertos cuya solución consiste en la formulación de una conjetura. Por ejemplo, un problema como “Demostrar que cualquier punto P que pertenece a la mediatriz de un

\overline{AB} equidista de sus extremos” no es un problema abierto. En cambio, “Describir el conjunto de puntos que equidista de dos puntos fijos A y B ” es un problema abierto de conjeturación. En el estudio que se reporta en este artículo, se utilizaron problemas abiertos de conjeturación de búsqueda de antecedente (Molina y Samper, 2019), que son aquellos en los que en el enunciado del problema se menciona la consecuencia necesaria (consecuente) y se deben hallar las condiciones suficientes (antecedente) para que esta se cumpla.

2.2. Sobre los tipos de arrastre de acuerdo con la teoría de la variación

El arrastre en un SGD promueve el discernimiento de propiedades geométricas cuando se varían ciertos elementos que componen la configuración representada en este (Leung, 2003). Según Leung, Baccaglioni – Frank y Mariotti (2013), una persona discierne cierta propiedad geométrica cuando, además de percibirla visualmente, la relaciona con aspectos conceptuales de la geometría euclidiana.

Dado que la variación resulta determinante en el discernimiento de propiedades geométricas, cuando se resuelve un problema en un SGD, Leung et al. (2013) definen, a partir de los patrones de variación propuestos por Marton, Runesson y Tsui (2004), cuatro tipos de arrastre de una representación que incluye las condiciones descritas en el enunciado del problema, que se pueden presentar durante el proceso de resolución. A continuación, se describen estos tipos de arrastre teniendo en cuenta cómo podrían efectuarse durante el proceso de resolución de un problema de búsqueda de antecedente.

- *Arrastre de contraste*: se realiza con la intención de determinar si la propiedad descrita en el enunciado del problema (consecuente) se cumple o no. Para ello se comparan diferentes configuraciones, producto del arrastre, para identificar en cuáles se presenta la propiedad y en cuáles no.
- *Arrastre de separación*: tiene como objetivo descubrir posibles condiciones que lleven al cumplimiento de la propiedad, por lo que se varía la posición de un punto de la representación, mientras se intenta mantener invariante la propiedad descrita en el consecuente.
- *Arrastre de generalización*: se utiliza con el fin de verificar una propiedad invariante que se ha discernido durante el proceso de exploración, para lo cual se centra la atención en identificar esa propiedad en las diversas representaciones.
- *Arrastre de fusión*: el propósito es evidenciar la relación entre dos propiedades invariantes, la dada en el enunciado del problema y la discernida en el proceso de resolución. Este tipo de arrastre se puede realizar cuando hay una construcción robusta de la situación.

2.3. Sobre los tipos de aprehensiones figurales

Duval (1995) utiliza la palabra aprehensión para indicar que hay varias formas de ver una representación visual o figura. Se entiende como figura geométrica a una configuración conformada por varias gestalts constitutivas que se relacionan visualmente entre sí y que tienen propiedades inherentes (Duval, 1998). Así, por

ejemplo, la representación visual de un cuadrado se puede considerar como una figura cuyas gestalts constitutivas son los segmentos; su relación visual es que se intersecan dos a dos, en sus extremos, y tienen las propiedades de ser congruentes y perpendiculares entre sí.

Este concepto de figura geométrica permite inferir que existen dos formas en la que esta se puede aprehender: perceptualmente y discursivamente. La aprehensión perceptual es la identificación espontánea de una figura en su totalidad (Duval, 1999). Por ejemplo, al observar la Figura 1, una persona puede reconocerla como un diamante de la baraja de póker o como una región delimitada por un rombo. En este último caso, la aprehensión perceptual consiste en un simple reconocimiento de la frontera de la figura representada como rombo, sin que necesariamente se establezca relación alguna entre las gestalts constitutivas.



Figura 1. Representación para explicar las aprehensiones perceptual y discursiva.

Por otra parte, cuando hay un enunciado que expresa una propiedad o relación entre las gestalts que conforman la figura, el tipo de aprehensión es discursiva (Duval, 1999). Por ejemplo, por un lado, si acompañando la Figura 1 se tiene el siguiente enunciado: “los segmentos opuestos son paralelos”, Duval (1998) indica que la representación visual puede favorecer la evocación de determinadas propiedades, definiciones o teoremas (anclaje de lo visual a lo discursivo); por otro lado, a partir de lo que se expresa en un enunciado, se puede evocar cierto concepto, teorema o propiedad y se procede a representar cierta configuración (anclaje de lo discursivo a lo visual).

La aprehensión perceptual muchas veces se realiza aplicando las leyes de la Gestalt: proximidad, similaridad, continuidad, cerramiento, simetría o figura fondo (Gal y Linchevski, 2010). Hay *proximidad* cuando se agrupan objetos porque se encuentran unos cerca a otros; *similaridad* cuando, habiendo diferentes objetos, se tiende a agrupar aquellos que tiene formas similares; *continuidad* cuando se privilegia la “buena continuación de una curva”; por ejemplo, cuando dos líneas se intersecan se tiende a percibir cada una, más que las configuraciones que determinan su intersección; *cerramiento* cuando mentalmente se “completa” una figura para dar lugar a una determinada figura (Pomerantz y Kubovy, 1986); *simetría* cuando se privilegia el reconocimiento de figuras simétricas o se completa una configuración para que sea simétrica; *figura y fondo* cuando hay regiones que comparten un borde, el cual visualmente se asigna a una de estas para conformar la figura, y la región adyacente, sin borde, se convierte en el fondo (Gal y Linchevski, 2010).

Existe un tercer tipo de aprehensión que Duval (1998, 1999) denomina operativa; se caracteriza por la modificación de la configuración inicial con la que se representa el enunciado de un problema geométrico. Duval (1998) explica que la aprehensión operativa puede llevarse a cabo de tres formas. La primera es cuando se realiza un cambio figural en el que se incluyen o se retiran elementos de la configuración inicial para crear una nueva. La segunda, cuando se crean otras configuraciones a partir de la inicial, como si esta se dividiera, y las partes resultantes se “reconfiguraran como

piezas de un rompecabezas” (Torregrosa y Quesada, 2007, pp.284). La tercera es cuando se cambia la orientación o posición de una configuración para poder reconocerla. Este tipo de aprehensión se realiza, por ejemplo, cuando la representación de un ángulo recto está en posición no estándar y se rota para identificarlo como tal.

3. Aspectos metodológicos

En el estudio realizado, se implementó una estrategia metodológica de tipo naturalista basada en prácticas usuales (Camargo s.f.), conocida en el ámbito escolar como *classroom based research* (Johnson, Sullivan y Williams, 2009), porque tiene como objetivo captar el quehacer habitual de los estudiantes durante el desarrollo de las clases. En este tipo de estrategia, se sugiere que tanto los instrumentos de recolección de información, como el tipo de tareas y normas sociales que se establezcan, sean lo menos intrusivos posibles para que la actividad de los estudiantes se presente de manera espontánea. Al respecto, Wu (2002) menciona que es posible integrar nuevos recursos en las clases y utilizarlos de manera continua para que con el tiempo formen parte del ambiente natural de la clase.

Inicialmente, se trabajó durante un año con dos grupos de grado octavo, cada uno con 22 estudiantes, cuyas edades oscilaban entre los 12 y 14 años, con el fin de lograr que el ambiente natural de las clases incluyera un ambiente de geometría dinámica. Para ello, en todas las clases de geometría se implementaron: el uso de GeoGebra instalado en tabletas digitales, la resolución de problemas abiertos de conjeturación, el trabajo en grupos, y la elaboración de registros escritos por parte de los estudiantes. Los instrumentos de registro, el uso de programas de captura de pantalla y registro de audio que se instalaron en las tabletas, y la videograbación de los acontecimientos, se utilizaron en todas las clases previas y durante la recolección de información, para que los estudiantes se habituaran a ellos, a tal punto que su interacción fuera espontánea a pesar de su presencia.

Para el estudio, se escogieron dos grupos de tres estudiantes cada uno. Esos grupos se eligieron porque entre sus integrantes se evidenciaba una comunicación constante de sus ideas. Se utilizan los nombres Brenda, Alex y Patricia para identificar a los estudiantes del Grupo 1; y Camila, Diana y John para los estudiantes del Grupo 2.

El estudio se centró en el proceso de resolución de dos problemas abiertos conjeturación de búsqueda de antecedente, que se evidencia a través de la interacción entre los estudiantes y las acciones que realizan en el SGD. Para efectos de este artículo, se muestra el análisis del proceso de resolución del siguiente problema.

Dados dos puntos fijos A y B :

- ¿Existe un punto X tal que la medida del $m\angle AXB = 90^\circ$?
- ¿Existen más puntos con esa propiedad?
- ¿Cómo le explicarían a otra persona dónde encontrar todos los puntos que cumplen la propiedad?

Para obtener los datos que se analizaron, primero se identificaron, en cada registro de audio, los fragmentos de interacción donde los estudiantes utilizaron el arrastre, realizaron alguna interpretación de lo que representaron en el programa de geometría dinámica o reportaron alguna propiedad geométrica encontrada. Luego, se transcribieron las interacciones comunicativas en los fragmentos seleccionados y se complementaron con imágenes de las capturas de pantalla, observaciones que se hicieron a partir de los videos y apartes de los reportes escritos, para construir episodios.¹

En este estudio, las categorías de análisis provienen directamente del marco teórico en cuestión. Así, para analizar las intervenciones de los estudiantes en cada episodio, se utilizaron los tipos de arrastre propuestos por Leung (2003, 2008, 2013) de acuerdo con la Teoría de la Variación, así como los tipos de aprehensiones figurales que define Duval (1998, 1999) y que aplican Torregrosa y Quesada (2007), para analizar el proceso de resolución de problemas en geometría. También se utilizaron las leyes de la Gestalt, para argumentar, en los casos que fuese posible, el hecho de que en alguna intervención de un estudiante se evidenciara un tipo de aprehensión perceptual. Para identificar las categorías, se asignaron los siguientes códigos a los tipos de arrastre y a los tipos de aprehensiones, los cuales se utilizaron durante el análisis. Como no se evidenciaron momentos en los que se utilizara la aprehensión operativa de reconfiguración, esta no se incluyó como categoría de análisis.

Tipos de arrastre	Códigos
Contraste	C
Separación	S
Generalización	G
Fusión	F
Tipos de aprehensiones	Códigos
Perceptual	AP
Discursiva con anclaje de lo discursivo a lo visual.	AD-DV
Discursiva con anclaje de lo visual a lo discursivo.	AD-VD
Operativa de cambio figural	AO-F
Operativa de cambio de posición	AO-P

Tabla 1. Códigos de categorías de análisis

4. Análisis del proceso de resolución del problema planteado

El análisis se desarrolla de la siguiente forma: primero, se muestra una síntesis de los principales tipos de aprehensiones y de arrastres que realizaron los estudiantes de los dos grupos durante el proceso de resolución del problema. Luego, se dividen ambos procesos de resolución en tres momentos para hacer un análisis comparativo

¹ Las imágenes que se presentan en este artículo son copia fiel de las capturas de pantalla, que no son muy nítidas. Se elaboraron con el fin de presentar al lector una imagen clara que ayude a comprender lo que comunican los estudiantes.

momento a momento. Finalmente, se explica, para cada momento y grupo, cómo se realizaron los tipos de arrastre o de aprehensiones, y cómo hubo una mutua influencia entre estos, para entender qué aspectos del uso e interpretación de lo que representaron los estudiantes en el SGD les permitió discernir propiedades geométricas.

4.1. Primer momento: realizan una exploración inicial

En el primer momento del proceso de resolución, estudiantes de ambos grupos realizan aprehensión discursiva con anclaje de lo discursivo a lo visual (AD – DV), arrastre de contraste (C) y aprehensión perceptual (AP). Sin embargo, la forma cómo se dan estos difiere en ambos grupos.

En el Grupo 1, Alex y Brenda comienzan un proceso de exploración representando un punto que creen puede ser solución de la situación propuesta.

5. Alex: Ahí están fijos [los puntos A y B]. No. Espere. Un punto X que sea 90 . Sí tiene que haberlo, ¿no?

6. Brenda: Obvio; sí. Si pone un punto por acá (construye un punto X) eso **va a ser un ángulo de 90** .



Figura 2. Representación inicial del Grupo 1.

Consideramos que en este caso hay aprehensión con anclaje de lo discursivo a lo visual, puesto que los estudiantes proponen un punto como vértice de un ángulo, teniendo en cuenta la propiedad que se exige en el enunciado: el ángulo debe ser recto. La representación que propone Brenda abre la posibilidad de encontrar un conjunto de puntos que sean solución del problema.

En el Grupo 2, Camila propone desde el inicio lo que ella cree es la solución del problema.

6. Camila: (Representa los puntos A y B) ¿Acá no se puede dibujar un cuadradito? (Explora las diferentes herramientas de GeoGebra). Elipse, circunferencia, polígono. Pongamos Lápiz y **hagamos un cuadrado**. Listo, hice un cuadrado (traza el dibujo de la Figura 3 con la herramienta Lápiz). Entonces, deshagamos (borra el cuadrado que dibujó con la herramienta Deshacer). Entonces, dice un punto X , entonces hacemos un punto X (Dibuja un punto).

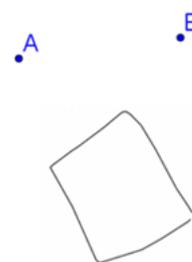


Figura 3. Representación inicial del Grupo 2.

Camila también realiza aprehensión con anclaje de lo discursivo a lo visual (AD – DV). Ella utiliza su conocimiento previo para representar una figura en la que sabe que hay un ángulo recto. En este caso, la solución que propone inicialmente se obtiene con la construcción de un cuadrado.

Las distintas formas en las que ambos grupos realizan AD – DV promueven, a su vez, dos formas distintas de explorar, aunque mediante el mismo tipo de arrastre. Ambos grupos arrastran su punto X para determinar si la propiedad exigida en el

problema se cumple (arrastre de contraste C). El Grupo 1 arrastra con el fin de explorar la posible existencia de otros puntos que, junto con los puntos A y B dados, determinen un ángulo recto. El Grupo 2 arrastra para configurar una representación de cuadrado en el que A y B sean vértices. Con esto, podrían hallar dos puntos solución.

El arrastre C, descrito en el párrafo anterior y que se evidencia a continuación, promovió a su vez un tipo de aprehensión perceptual en cada grupo.

Grupo 1

13. Alex: Venga hacemos lo siguiente (construye la recta AX y una recta perpendicular a la \overrightarrow{AX} en X). Sí se puede mover (arrastra el punto X con la intención de lograr que la recta perpendicular contenga a B y mide el $\angle AXB$). Mide 89, 84. Hay más puntos con esa misma [propiedad]. Habría otro [punto], el de acá (señala lo que parece ser el cuarto vértice de un rectángulo) y ya.

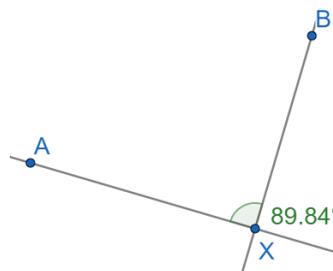


Figura 4. Representación con la que el Grupo 1 evidenció los primeros tipos de aprehensiones.

Grupo 2

34. John: (Construye la \overrightarrow{XA} y la \overrightarrow{XB}).

35. Camila: ¿Listo? Entonces hagamos una vaina. Espere. Semirecta (construye la \overrightarrow{CA} y la \overrightarrow{CB}). **Pero eso no es un cuadrado.**

36. John: Es algo parecido (...). Estos no se pueden mover [refiriéndose a que A y B son puntos fijos como se menciona en el enunciado del problema].

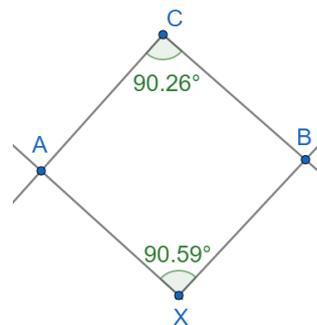


Figura 5. Representación con la que el Grupo 2 evidenció los primeros tipos de aprehensiones.

En el Grupo 1, Alex arrastra al punto X hasta encontrar un punto que considera que cumple la propiedad. Luego, como resultado de la aprehensión perceptual de la figura representada en la pantalla de la tableta digital, asume que hay otro punto con la misma propiedad. Su aprehensión perceptual, en este caso, se basa en la ley de la Gestalt *cerramiento*. Esta establece la posibilidad de que, al observar una representación, esta se complete mentalmente para percibir determinada figura (Pomerantz y Kubovy, 1986). De esta forma, el Grupo 1 plantea la misma solución que ha establecido el Grupo 2, pero ellos consideran la posibilidad de que existan otros puntos X para los cuales el $\angle AXB$ sea recto, al manifestar “hay más puntos”. En el Grupo 2, Camila y John realizan aprehensión perceptual del cuadrilátero que han construido, para establecer que este no representa un cuadrado. Por tanto, parece que concluyen que los vértices X y C representados no son la solución del problema.

Este tipo de aprehensión perceptual, tal como se presenta en cada grupo, resulta determinante en los tipos de arrastre y de aprehensiones que se llevan a cabo durante el segundo momento del proceso de resolución del problema.

4.2. Segundo momento: hallan una solución

En el Grupo 1, Alex afirma que sí cree que hay más puntos y decide utilizar el arrastre de separación (S) para determinar solo aquellos posibles puntos X que cumplen la propiedad. Para esto, varía la posición de X con la intención de mantener invariante la medida del $\angle AXB$; cuando logra hallar un punto para que el ángulo mida aproximadamente 90° , lo representa activando la herramienta Rastro y desactivándola. Luego procede a encontrar otro punto. En ese proceso, Alex arrastra a X al semiplano superior, determinado por la \overleftrightarrow{AB} , cambiando la orientación del $\angle AXB$ representado (Figura 6).

Consideramos que Alex realiza aprehensión operativa de tipo posicional (AO – P), ya que este cambio de orientación lo hace con la intención de encontrar otros puntos solución. Debido a esa acción, Brenda percibe los puntos que serían la imagen simétrica, respecto a la \overleftrightarrow{AB} , de los tres puntos que ya él había representado. Con ello, afirma que “hay seis [puntos] porque por el otro lado también” (línea 52) cumpliéndose así la ley de Simetría de la Gestalt mencionada en Gal y Linchevski (2010). Los estudiantes aceptan esos puntos como solución, a pesar de que el SGD le provee otras medidas que distan mucho de los 90° (Figura 6), al parecer, porque en ese momento ellos reconocen que la medida del ángulo está determinada por las rectas perpendiculares que constuyeron. Luego, los estudiantes deciden realizar de nuevo el arrastre S (Figura 7). Brenda realiza aprehensión perceptual y afirma: “Profe, todos están en un círculo. Hay una circunferencia trazada acá.” (línea 56). La percepción de la figura se realiza bajo la Ley de Cerramiento: al ver la serie de puntos, Brenda completa los espacios (cerramiento) y, por tanto, la percibe como una circunferencia (Boring 1942, citado en Pomerantz y Kubovy, 1986), sin mencionar ninguna propiedad geométrica que determine esa circunferencia.

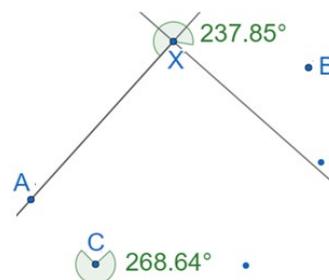


Figura 6. Representación que muestra cómo el Grupo 1 empezó a usar el arrastre de separación.

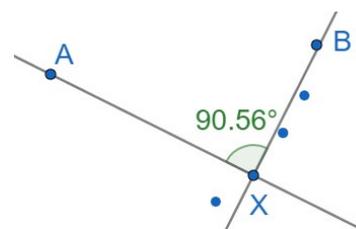


Figura 7. Esta representación muestra un uso más preciso del arrastre de separación por parte de los estudiantes del Grupo 1.

El Grupo 2, al percibir que el cuadrilátero que representaron no corresponde a un cuadrado, decide hacer construcciones auxiliares que les permita construirlo. Consideramos la inclusión de estos nuevos elementos en la configuración inicial como aprehensión operativa de cambio figural (AO – F), ya que los estudiantes proponen nuevas configuraciones para resolver el problema. Inicialmente, construyen la bisectriz del $\angle AXB$, ubican en esta un punto C , miden el $\angle ACB$ y construyen dos rectas, por A y B , respectivamente, perpendiculares a \overrightarrow{XA} y a \overrightarrow{XB} (Figura 8).

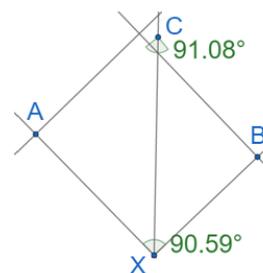


Figura 8. Construcciones auxiliares del Grupo 2 para construir el cuadrado.

Después de construir esa representación, Camila arrastra a C para que coincida con la intersección de dichas rectas perpendiculares; esto con el fin de lograr una configuración en la cual el $\angle ACB$ mida exactamente 90° . Debido a que esta estrategia resulta poco efectiva, Camila sugiere otra: “Y si ubicamos la mediatriz ¿no? Entonces, hagamos, digamos un segmento” (línea 81). Para implementar la estrategia, los estudiantes construyen un cuadrado, activando la cuadrícula que provee GeoGebra. Construyen el \overline{AB} y su mediatriz, ubican dos puntos X y D en esta, miden el $\angle AXB$, y arrastran los puntos X y D , guiándose con la cuadrícula, para conseguir que estos dos ángulos sean casi rectos (Figura 9).

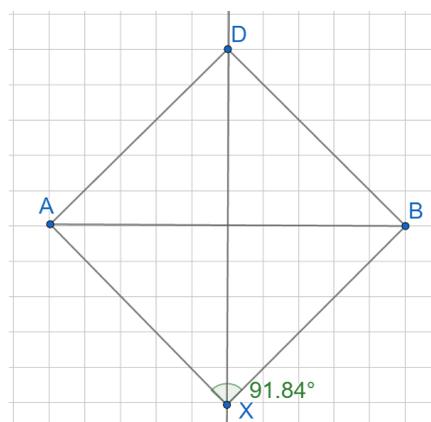


Figura 9. Configuración final realizada por el Grupo 2.

4.3. Tercer momento: formulan una conjetura

A través de las representaciones construidas en cada grupo, en el tercer momento del proceso de resolución se evidencia aprehensión discursiva, esta vez con anclaje de lo visual a lo discursivo (AD – VD), y arrastre de generalización (G) de los resultados obtenidos.

Dado que en el Grupo 1, Brenda ha percibido que los posibles puntos solución X forman una circunferencia, Alex determina que es la circunferencia con centro en el punto medio M del \overline{AB} y radio MB (distancia de M a B). Al relacionar la figura que Brenda percibe con la propiedad que la determina, Alex realiza AD – VD. Una vez construida la circunferencia, Alex utiliza el arrastre G, pues arrastra a X sobre la circunferencia para verificar que la medida del $\angle AXB$ es invariante. Luego de realizar este tipo de arrastre, los estudiantes de este grupo plantean la siguiente conjetura:

Conjetura: Si una circunferencia tiene diámetro AB , entonces los ángulos formados con extremos A, B y cualquier otro punto ubicado sobre la circunferencia serán de 90° .

Figura 10. Conjetura formulada por los estudiantes del Grupo 1.

En el Grupo 2, Camila y Diana realizan AD – VD cuando observan la representación que han construido (Figura 9) y afirman que los puntos X y D corresponden a la solución del problema, si la distancia de cada uno de estos, al punto medio O del \overline{AB} , es igual a la distancia de ese punto a .

El arrastre G en ese grupo se presenta porque el profesor cuestiona a los estudiantes sobre la posibilidad de que existan más puntos que cumplan la propiedad. Por eso, Camila arrastra a X , que pertenece a la mediatriz del \overline{AB} , para verificar que solo los dos puntos que hallaron determinan ángulos rectos con los puntos A y B dados (Figura 10). Luego de esto, Diana confirma que solo los puntos X y D , que distan AO del punto O , cumplen la propiedad, ya que al arrastrar “se va a dañar” (línea 160) el ángulo recto que han construido.

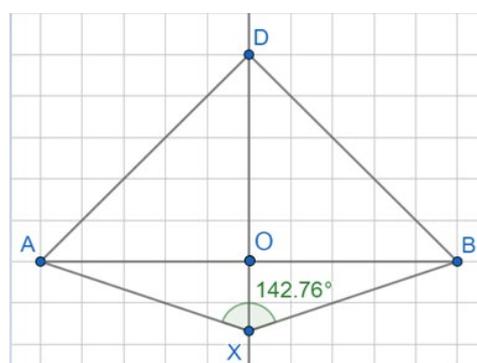
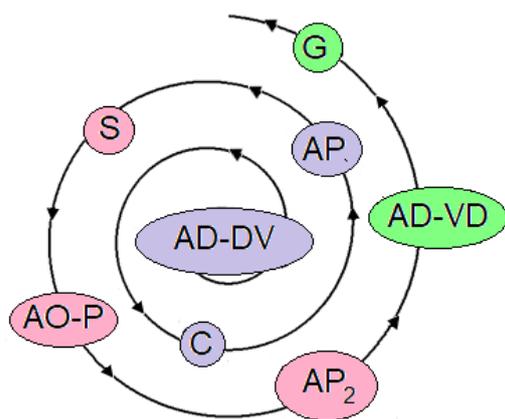


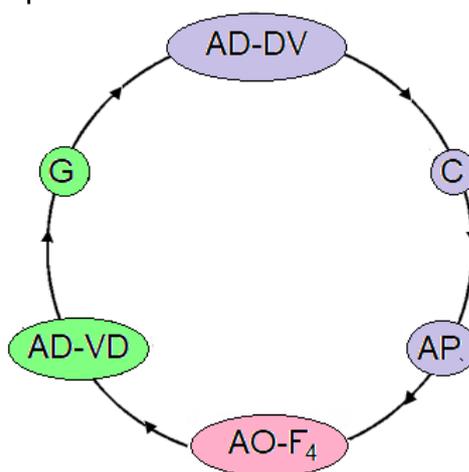
Figura 11. Arrastre de generalización

5. Resultados

Grupo 1



Grupo 2



■ Primero ■ Segundo ■ Tercero

Figura 12. Esquemas que ilustran la relación entre las aprehsiones y los tipos de arrastre, durante el proceso de resolución del problema en cada grupo.

Los siguientes esquemas sintetizan los tipos de aprehensiones y de arrastres que realizaron los estudiantes de cada grupo durante el proceso de resolución del problema propuesto.

Respecto a la figura anterior, hay dos observaciones acerca de algunos códigos y de la forma de cada esquema. Los códigos AP_2 y $AO-F_4$ significan que los estudiantes realizaron aprehensión perceptual dos veces y aprehensión operativa de cambio figural cuatro veces, respectivamente. Esta forma de escribirlos se realiza solo con el fin de abreviar. La forma del esquema del Grupo 1 es en espiral; esto indica que en este grupo los tipos de arrastre y de aprehensiones que utilizaron los estudiantes les permitieron discernir una propiedad diferente a la que consideraron cuando empezaron a resolver el problema. En cambio, el esquema del Grupo 2 es circular; ello indica que los estudiantes utilizaron los tipos de arrastre y de aprehensiones para verificar la solución que plantearon desde el principio.

En el análisis hecho, se evidencia la interdependencia entre los tipos de arrastre y los tipos de aprehensiones. Así, si entendemos los tipos de arrastre como la forma en que los estudiantes utilizan las representaciones que construyen en el SGD, y los tipos de aprehensiones como la forma en que las interpretan, podemos concluir que el uso de las representaciones determina su interpretación y viceversa. La relación entre tipos de arrastre y tipos de aprehensiones permite comprender el proceso de resolución del problema de cada grupo. En ambos grupos, la $AD - DV$ juega un papel determinante al iniciar el proceso de solución. Mientras que en el Grupo 1 se realiza para proponer la posible existencia de puntos que cumplen la condición exigida en el problema, en el Grupo 2 este tipo de aprehensión permitió determinar una solución inmediata, cuya validez radica en la posibilidad de construir un cuadrado. El hecho de que se haya presentado este tipo de aprehensión al iniciar el proceso de resolución, permite entender que el arrastre C tiene una naturaleza distinta en cada grupo. En el Grupo 1, se contrastan diferentes representaciones del $\angle AXB$ para percibir si hay alguna en el que este sea recto; en el Grupo 2, el contraste se realiza entre diferentes representaciones de cuadriláteros con el fin hallar aquella que corresponda a la de un cuadrado, con el fin de garantizar la solución propuesta inicialmente.

Tal como se presenta el arrastre C , este promueve tipos de aprehensiones y de arrastre distintos en cada grupo. En el Grupo 1, se combina $AO - P$ con el arrastre S lo que permite percibir la solución general del problema: el lugar geométrico de los puntos que cumplen la condición dada en el enunciado del problema. En cambio, en el Grupo 2 se combina $AO - F$ y AP para generalizar una solución particular: la existencia de solo dos puntos que cumplen la propiedad debido a que son vértices de un cuadrado.

6. Conclusiones

Concluimos que, independientemente de los resultados obtenidos en cada grupo, en ambos grupos hay discernimiento de propiedades geométricas cuando se realiza $AD - VD$ en el tercer momento del proceso de resolución. En el Grupo 1, se discierne que cualquier ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto y los estudiantes plantean, en sus palabras, una conjetura al respecto. En el Grupo 2, se

discierne que el punto de intersección de las diagonales equidista de los vértices del cuadrado; propiedad novedosa para los estudiantes puesto que solo conocían la definición de cuadrado. Esta propiedad fue la que finalmente les permitió construir el cuadrado.

Con este trabajo, se evidencia que, la complementariedad entre la teoría de la variación y la teoría de las aprehensiones figurales, constituye una eficaz herramienta, no solo para el diseño de tareas en ambientes de geometría dinámica (Leung, 2011), sino también para analizar la actividad de los estudiantes cuando resuelven problemas abiertos de conjeturación en ese tipo de ambientes. En este sentido, resultaría interesante estudiar modelos de conjeturación basados en los tipos de arrastre (Arzarello, Olivero, Paola, y Robutti, 2002; Baccaglini – Frank y Mariotti, 2010) a la luz de las aprehensiones que los estudiantes realizan de las figuras que construyen en programas de geometría dinámica.

7. Referencias bibliográficas

- Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D., y Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 34(3), 66-72. DOI: 10.1007/BF02655708.
- Baccaglini-Frank, A., y Mariotti, M. A. (2010). Generating conjectures in dynamic geometry: The maintaining dragging model. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 15(3), 225-253. DOI: 10.1007/s10758-010-9169-3
- Camargo, L. (s.f.). Estrategias Cualitativas de Investigación en Educación Matemática. Libro en evaluación. Fondo Editorial Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá.
- Duval, R. (1995). Geometrical pictures: Kinds of representation and specific processings. En R. Sutherland y J. Mason (Eds.), *Exploiting mental imagery with computers in mathematics education* (pp. 142-157). Berlin: Springer.
- Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. En C. Mammana y V. Villani (eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century* (pp.37-52). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Duval, R. (1999). Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for Learning. En F. Hitt y M. Santos (Eds.), *Proceedings of the 21st North American PME Conference* (pp. 3-26), Columbus, Ohio, USA: ERIC/CSMEE Publications–The Ohio State University.
- Gal, H., y Linchevski, L. (2010). To see or not to see: analyzing difficulties in geometry from the perspective of visual perception. *Educational studies in mathematics*, 74(2), 163-183. DOI:10.1007/s10649-010-9232-y.
- Johnson, B., Sullivan, A. M., & Williams, D. (2009). A one-eyed look at classroom life: Using new technologies to enrich classroom-based research. *Issues in Educational Research*, 19(1).
- Leung, A. (2003). Dynamic Geometry and The Theory of Variation. En N. A. Pateman, B. J. Dougherty, y J. T. Zillox (Eds.), *Proceedings of PME 27: Psychology of*

- Mathematics Education 27th International Conference* (pp. 197–204). Honolulu: University of Hawaii.
- Leung, A. (2008). Dragging in a dynamic geometry environment through the lens of variation. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 13(2), 135-157. DOI: 135-157. 10.1007/s10758-008-9130-x.
- Leung, A. (2011). An epistemic model of task design in dynamic geometry environment. *ZDM—The International Journal on Mathematics Education*, 43(3), 325–336. DOI: 10.1007/s11858-011-0329-2.
- Leung, A., Baccaglini-Frank, A., y Mariotti, M. A. (2013). Discernment of invariants in dynamic geometry environments. *Educational Studies in Mathematics*, 84(3), 439-460.
- Marton, F., Runesson, U., y Tsui, A. (2004). The space of learning. En F. Marton y A. Tsui (Eds.), *Classroom Discourse and the Space of Learning*. London: Lawrence Erlbaum Associates.
- Molina, Ó. y Samper, C. (2019). Tipos de problemas que provocan la generación de argumentos inductivos, abductivos y deductivos. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 33(63), 109-134. DOI: 10.1590/1980-4415v33n63a06.
- Pomerantz, J. R., y Kubovy, M. (1986). Theoretical approaches to perceptual organization: Simplicity and likelihood principles. *Organization*, 36(3), 1– 46.
- Sinclair, N., Bartolini Bussi, M. G., de Villiers, M., Jones, K., Kortenkamp, U., Leung, A., & Owens, K. (2016). Recent research on geometry education: *An ICME-13 survey team report*. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*, 48(5), 691–719.
- Torregrosa, G., y Quesada, H. (2007). Coordinación de procesos cognitivos en geometría. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 10(2), 275-300. Recuperado de http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362007000200005&lng=es&tlng=es
- Wu, H.K. (2002). Middle school students' development of inscriptional practices in inquiry-based science classrooms. Unpublished doctoral dissertation, University of Michigan, Ann Arbor, MI.

Autores:

Sánchez, Carlos David: Magíster en Docencia de la Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional (Bogotá, Colombia). Docente de básica secundaria y media. Editor y coautor de textos escolares en Santillana Colombia. cardavsan@gmail.com. Orcid.org/0000-0003-1344-1510

Samper, Carmen: profesora emérita del Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional., en Bogotá, Colombia. Es miembro del grupo de investigación, Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría, de la misma Universidad. Estudió Matemáticas en la Universidad de Ottawa, Canadá, y tiene una Maestría en Matemáticas de la Universidad de Maryland, E.E.U.U. Es coautora de series de textos escolares y autora del texto escolar Geometría de la Editorial Norma. Ha publicado artículos en revistas de circulación nacional e internacional, como Educational Studies in Mathematics, Revista Educación Matemática y Bolema. Orcid.org/0000-0003-2342-8950