

Estrategias de cálculo mental mediante el uso de la calculadora descompuesta en estudiantes de secundaria

Leticia Sánchez González, Prócoro Omar Butrón Zamora, José Antonio Juárez López

Fecha de recepción: 18/04/2020
Fecha de aceptación: 28/08/2020

<p>Resumen</p>	<p>El presente estudio muestra las estrategias de cálculo mental identificadas en seis estudiantes de segundo grado de secundaria después de implementar el uso de la calculadora descompuesta, al manipular números naturales con las cuatro operaciones básicas. Los resultados presentan avances significativos en la solución de problemas de cálculo mental, así como en la importancia de este tipo de actividades en el aula, donde la herramienta digital juega un papel importante en el desarrollo de nuevas habilidades, creatividad y exploración numérica. Palabras clave: Cálculo mental, estrategias, calculadora descompuesta, secundaria</p>
<p>Abstract</p>	<p>The present study shows the mental calculation strategies identified in six second grade secondary pupils after implementing the use of the broken calculator, when manipulating natural numbers with the four basic operations. The results present meaningful progress in solving problems of mental calculation as well as the importance of this type of activities in the classroom, where the digital tool plays an important role in the development of new skills, creativity, and numerical exploration. Keywords: Mental calculation, strategies, broken calculator, secondary school</p>
<p>Resumo</p>	<p>O presente estudo apresenta as estratégias de cálculo mental identificadas em seis alunos do segundo ano do ensino fundamental após implementar o uso da calculadora decomposta, ao manipular números naturais por meio das quatro operações básicas. Os resultados indicaram avanços significativos na resolução de problemas de cálculo mental, bem como na importância desse tipo de atividades em sala de aula, em que a ferramenta digital desempenha um papel importante no desenvolvimento de novas habilidades, criatividade e exploração numérica. Palavras-chave: Cálculo mental, Estratégias, Calculadora decomposta, Ensino médio</p>

1. Introducción

En la vida cotidiana, las personas están inmersas en realizar diversos cálculos matemáticos. Por ejemplo, al revisar el cambio que nos entregan de alguna compra, realizar el descuento de algún producto o al determinar la cantidad a pagar en el supermercado, entre otros. Sin embargo, a pesar de ser consideradas operaciones sencillas y rápidas, en ocasiones se suele utilizar algún medio para realizar dicha operación. Esta idea sugiere que estos cálculos pueden ser realizados por tres vías.

Estos medios pueden ser: a) medios mecánicos: calculadora, computadora, celular, etc.; b) lápiz y papel para ejecutar operaciones en algoritmos escritos y c) cálculo mental: operaciones llevadas a cabo solo con la mente.

A pesar de que cada uno de estos medios puede ser aplicado en diversos contextos dependiendo de la exigencia de la operación involucrada, se resalta la importancia de adquirir y desarrollar habilidades de cálculo mental, con el fin de dotar de sentido a las operaciones y comprender mejor el sistema de numeración. Por lo que la inclusión de esta actividad en las aulas es uno de los objetivos que tienen los programas curriculares en diversos países, siendo una de las competencias básicas que deben adquirir los alumnos desde la escuela primaria y secundaria. Al respecto, se señala en los Principios y Estándares para la Matemática Escolar: “Los estudiantes deberían desarrollar y adaptar también procedimientos para el cálculo mental y la estimación con fracciones, decimales y enteros. El cálculo mental y la estimación son también útiles en muchos cálculos donde se involucran porcentajes...” (NCTM, 2000, p. 220).

A través del cálculo mental se pueden explorar y descubrir distintas formas de operar con los números y desarrollar habilidades que son esenciales para las operaciones aritméticas de la vida real, tales como descomponer, agrupar, estimar, etc., (Barrera-Mora, Reyes-Rodríguez y Mendoza-Hernández, 2018). Además, como describen Ortega y Ortiz (2002), el cálculo mental promueve la concentración, la capacidad de organización, el rigor, la lógica, la memoria, la autonomía, la imaginación, la creatividad y la seguridad.

Agregando a esto, existen otras razones por las cuales se debe dar énfasis en el desarrollo del cálculo mental. Como analiza Lemonidis (2016), algunas de ellas son porque:

- Investigaciones en adultos voluntarios (Northcote y McIntosh, 1999), muestran que, en un lapso de 24 horas de su vida cotidiana, el cálculo mental toma lugar al menos un 84.6 %, los cálculos escritos un 11%, mientras que la calculadora un 6.8%. Además, se resalta que dentro de estos, el 60% son cálculos estimados y un 40 % son exactos.
- Está relacionado con métodos didácticos y pedagógicos y principios adoptados por los programas implementados en las escuelas.

Asimismo, el autor menciona que la filosofía de los programas implica un movimiento general hacia enfoques constructivistas para la enseñanza de las matemáticas, que, en lo que respecta a los cálculos, se expresan con el interés de comprender las estrategias utilizadas por los propios estudiantes para calcular mentalmente.

Siguiendo la lógica del nuevo currículum de educación básica, y resaltando los programas y planes de estudio dados por la Secretaría de Educación Pública (SEP) (2017) en México, los estudiantes son cuestionados a desarrollar un sentido numérico con habilidades de conocimiento y comprensión, así como también uso y aplicación de las matemáticas para resolver problemas, comunicarse y razonar.

En contraste con lo anterior, en muchas escuelas de educación básica, el hecho de utilizar algoritmos escritos tiene tradicionalmente un papel más preponderante y

central en el currículo en relación con el cálculo mental (Gálvez et al., 2011). Además de que su importancia ha ido disminuyendo conforme el avance de la tecnología y el uso de dispositivos como la calculadora o el teléfono celular, ya que éstos se convirtieron en herramientas para dar respuestas rápidas y sin error. Con ello no se quiere afirmar que el uso de estos instrumentos sea incorrecto o perjudicial, sino que deberían utilizarse en el momento propicio, dadas las características del problema, como auxiliar en la validación de resultados o para construir conocimientos.

Es importante mencionar, como sugiere Gómez (1989, citado en Cantón, 2003), que el cálculo mental en las clases se percibe y desarrolla sin problemas en la mayoría de los alumnos que son considerados hábiles para calcular, sin embargo, el aprendizaje en los demás casos se puede propiciar con un método adecuado. En este sentido es posible que los alumnos desarrollen este tipo de habilidades o bien ejerciten y mejoren las que ya tienen (Rodríguez y Juárez, 2019). Por ejemplo, Floris (2017) propicia el aprendizaje del valor posicional en estudiantes de primaria, con ayuda de una calculadora, esto al hacer que el alumno *piense* operaciones que puede aplicar para llegar a un número solicitado dado un número inicial. De manera análoga, usando este medio autores como Lemoyne (2005, citada en Squalli, 2007) y Phong (2007) propician el sentido numérico y cálculos aritméticos sugiriendo la idea de actividades que involucren una tecla inactiva, llamada así calculadora descompuesta.

De esta manera, surge nuestra pregunta de investigación: ¿Cuál es el impacto que tiene la implementación de la calculadora descompuesta en el desarrollo de estrategias de cálculo mental con números naturales en estudiantes de secundaria? Partiendo de esta idea se plantearon los siguientes:

Objetivo General:

Analizar las estrategias de cálculo mental que llevan a cabo estudiantes de secundaria con las operaciones básicas de números naturales haciendo uso de la calculadora descompuesta.

Objetivos específicos

1.- Identificar los procedimientos que llevan a cabo estudiantes de segundo grado de secundaria al resolver problemas básicos de cálculo mental mediante el uso de la calculadora descompuesta.

2.- Describir las estrategias desarrolladas por los estudiantes al implementar el uso de la calculadora descompuesta como herramienta para el cálculo mental.

2. Marco teórico y antecedentes

2.1. El cálculo mental

Desde la educación básica, los alumnos deben desarrollar el significado de las cantidades y aplicar, con flexibilidad, diferentes propiedades de los números y las operaciones para abordar situaciones problemáticas de manera eficaz. Así, el sentido numérico es una habilidad que todo ser humano posee. Barrera-Mora et al. (2018)

realizan una profunda caracterización de dicho concepto y establecen que el cálculo mental forma parte esencial de este.

Las primeras ideas del cálculo mental son determinadas sólo por la ausencia del lápiz y papel al realizar operaciones aritméticas. Lemonidis (2016) menciona las concepciones de varios autores ante tal concepto, haciendo notar la diferencia entre matemáticas mentales y las que se apoyan de algún medio externo para llegar al resultado. Además, el autor hace notar que el cálculo mental hace uso de algoritmos no estándar para calcular respuestas exactas.

Cuando ejecutamos un cálculo, procesamos números y aplicamos las propiedades del sistema de numeración, hechos numéricos, etc., así para obtener una respuesta específica y única. Si la respuesta fuese un valor no exacto, entonces se conoce como cálculo estimado o aproximado, pues varía la naturaleza de los datos (Gómez, 2005).

Por otro lado, la habilidad del cálculo para ser mental depende del tamaño de los números que están involucrados en la operación. Se puede decir que los datos originales del problema se descomponen o se sustituyen por otros con los cuales el sujeto trabaja más cómodamente para obtener la respuesta (Mochón y Vázquez, 1995). Incluso si la meta es una respuesta aproximada, o los números son grandes, entonces la transformación es requerida.

También es importante reconocer las diferencias que radican entre el algoritmo tradicional (de lápiz y papel) y el algoritmo de cálculo mental. Dada una operación, en el primer caso el algoritmo es fijo y general y todas las personas lo aplican igual, mientras que en el cálculo mental dicha operación puede ser resuelta de diversas formas. Resaltando entonces que, el cálculo mental es holístico, variable y flexible.

2.2. Importancia del cálculo mental

Gran parte de las investigaciones coinciden en que el cálculo mental juega un papel importante en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Por ejemplo, Reys (1984) establece las siguientes: es un prerrequisito para el éxito de algoritmos escritos, como también lo sugiere Ruthven (1998); favorece la comprensión de los números y sus propiedades; impulsa la creatividad, el conocimiento independiente y el ingenio; contribuye a la resolución de problemas y promueve habilidades de estimación.

De manera análoga y ampliando esto, Lemonidis (2016) enfatiza en la utilidad y aplicación en la práctica del cálculo mental en comparación con el cálculo escrito y su contribución a la comprensión y profundización de conceptos matemáticos. Por ejemplo, al del sentido numérico y al desarrollo de habilidades cognitivas y metacognitivas.

2.3. Clasificación de estrategias de cálculo mental

El cálculo mental representa parte de habilidades aritméticas, por lo que se inserta el concepto de estrategias (Threlfall, 2001). Las estrategias de cálculo mental constituyen un tipo especial de procesos cognitivos. Aunque su definición presenta

diferencia entre varios investigadores de acuerdo con la literatura, se consideran como un esfuerzo cognitivo y donde se adoptan procedimientos dirigidos a objetivos para mejorar el comportamiento de la memoria.

Thompson (1999) define las estrategias de cálculo mental como: “La aplicación de datos numéricos conocidos o calculados rápidamente en combinación con propiedades específicas del sistema numérico para encontrar la solución de un cálculo cuya respuesta no se conoce” (p. 2).

Lo más importante es que estas estrategias pueden ser desarrolladas. Incluso se puede considerar que las diferencias de edad afectan el número de estrategias disponibles para los niños y la efectividad con la que se usan. Coincidiendo con esto, se ha encontrado que, con el aumento de la edad y la experiencia, los niños no solo tienden a desarrollarse mediante el uso de estrategias menos eficientes a estrategias más eficientes, sino que también se vuelven cada vez más adaptables en sus elecciones de estrategia al resolver un problema (Hickendorff, Torbeyns y Verschaffel, 2019).

Por otro lado, las estrategias utilizadas para recordar información de la memoria de largo plazo coexisten con otras funciones cognitivas y están influenciadas por muchos factores. En su estudio, Verschaffel (2007); citado en (Hickendorff et al., 2019), señala que los niños dependen de las estrategias estándar que se introducen en la escuela. Así, un alumno que recibe una instrucción centrada en el dominio de una descomposición basada en números o una estrategia secuencial dada sin poner más atención a la variedad de las estrategias restantes, tienden a depender solo de la estrategia instruida.

En los últimos treinta años, muchos estudios han identificado y estudiado las estrategias de los estudiantes, por ejemplo, sumas y restas (Barrera-Mora et al., 2018; Rathgeb y Green, 2019; Mastrothanas, Geladari, Zervoudakis, y Strakalis, 2018; entre otros), números racionales (Rezat, 2011) y las cuatro operaciones básicas con multidígitos (Hickendorff et al., 2019; Lemonidis, 2016).

Para nuestro estudio, tomaremos la clasificación propuesta por Lemonidis (2016), el cual, clasifica las estrategias de cálculo mental que utilizan los estudiantes al trabajar con números entre 20 y 100 en las cuatro operaciones básicas. Dicha clasificación puede observarse en las siguientes tablas.

Estrategia	Descripción	Adición 38+25	Sustracción 63-25
Estrategia de división (1010)	Se llama así, debido a que los números añadidos o quitados se dividen en múltiplos de diez y unidades. Es también llamada estrategia de partición.	38+25: 5+8=13, 30+20=50,63	63-25: 13-5=8, 50-20=30, 38
Estrategia de encadenamiento (N10)	De acuerdo con este método, mantenemos el primer término estable, dividimos el segundo término en unidades y decenas, y sumamos o	38+25: 38+5=43, 43+20=63	63-25: 63-5=58, 58-20=38 (sustracción)

	restamos unidades y decenas sucesivamente del primer término.		63-25:25+8=33, 33+30=63, 38 (adición)
Puentes a través de múltiplos de diez (A10)	Puede ser considerada una subcategoría de la estrategia de encadenamiento. En este caso mantenemos el primer término estable y se agrega o sustrae partes del segundo término para llegar a los diez más cercanos.	38+25: 38+2=40, 40+23=63	63-25: 63-3=60, 60-20=40, 40-2=38
Estrategia mixta (10S)	Suele llamarse también método del salto dividido. Es una combinación de la estrategia de división y encadenamiento.	38+25: 30+20=50, 50+8=58, 58+5=63	63-25: 60-20=40, 40+3=43, 43-5=38
Holístico	Este método requiere operaciones cognitivas complejas. Y es usado como indicador de flexibilidad cuando se pueden seleccionar y aplicar correctamente estrategias. Se divide en dos subcategorías:	Compensación: 38+25: 40+25=65, 65-2=63 Nivelación 38+25: 40+23=63	Compensación: 63-25: 63-30=33, 33+5=38 Nivelación 63-25:68-30=38
Resta por suma (SA)	Solo es aplicada para la resta. Se realiza agregando desde el sustraendo hasta el minuendo.		63-25: 25+5=30 30+30=60, 60+3=63 5+30+3=38
Resta indirecta (IS)	Solo es aplicada para la resta. Se realiza restando del minuendo hasta llegar al sustraendo.		63-25: 63-3=60 60-30=30, 30-5=25 3+30+5=38
Conteo	Se cuentan paso a paso según la secuencia de números, comenzando desde el primer término y subiendo o bajando tantos pasos como muestra el segundo término de la operación. Se divide en dos subcategorías	Por unidades 38+25: 38, 39, 40.... Por decenas u otros números 38+25: 38+10=48, 48+10=58, 58+5=63	
Imagen mental del algoritmo tradicional	Se piensa y realiza mentalmente el método del algoritmo escrito estándar, realizando la operación de derecha a izquierda.		

Tabla 1. Estrategias de cálculo mental para la suma y resta.

Estrategia	Descripción	Ejemplo
Modelado directo	Los estudiantes modelan el problema y cuentan el número total de objetos, el número de grupos o el número de objetos en cada grupo.	<p>Multiplicación:</p> <p>Cuentan en el modelo el número total de objetos.</p> <p>División:</p> <p>Cuentan en el modelo el número de grupos (cociente) o el número de objetos en cada grupo (partitivo).</p>
Conteo	Toda forma de estrategia de conteo, omitir el conteo hacia adelante o hacia atrás, sumar o restar repetidamente, duplicar y dividir en dos.	<p>Multiplicación:</p> <p>5x15: 15, 30, 45, 60, 75 o 5x15: 2x15=30, 30+30=60, 60+15=75.</p> <p>División:</p> <p>75/5: 15, 30, 45, 60, 75 o 180/4: 180/2=90, 90/2=45.</p>
Recuperación directa	Usan un hecho conocido de multiplicación o división o un hecho derivado.	<p>Multiplicación:</p> <p>8x11=88, 5x12=60</p> <p>División:</p> <p>120/6=20, porque 6x20=120.</p>
Partición de un número	Dividen uno o ambos términos de la operación en números menores, para poder multiplicarlos o dividirlos más fácilmente.	
Partición de un número basado en el valor posicional	Un número está dividido en base al valor posicional del sistema aritmético.	<p>Multiplicación:</p> <p>7x15= (7x5) + (7x10) =35+70=105.</p>
Partición RL	El número está dividido y actúan de derecha a izquierda.	<p>División:</p> <p>84/4: 4/4=1, 80/4=20, 20+1=21.</p>
Partición LR	El número está dividido y actúan de izquierda a derecha.	<p>Multiplicación:</p> <p>7x15= (7x10) + (7x5) =70+35=105.</p> <p>División:</p> <p>84/4: 80/4=20, 4/4=1, 20+1=21.</p>

Partición de ambos números en función del valor posicional	El multiplicador y el multiplicando se dividen en números basados en el valor posicional.	$14 \times 26 = (10+4) \times (20+6)$ $= (10 \times 20) + (10 \times 6) +$ $(4 \times 20) + (4 \times 6)$
Partición no basada en el valor posicional	El multiplicador y el multiplicando se dividen, no se basan en el valor posicional del sistema aritmético.	$15 \times 136 = (5 \times 3) \times 136 = 5 \times (3 \times 136)$ <p style="text-align: center;">ó</p> $7 \times 15: (5+1+1) \times 15 = 75 + 15 + 15.$
Holístico o compensador	Los números se tratan como enteros.	<p>Multiplicación:</p> $8 \times 99 \rightarrow 8 \times 100 - 8$ $50 \times 46 \rightarrow 50 \times 46 = 100 \times 23.$ <p>División:</p> $940/5: 940/10 = 94, 94 \times 2 = 188$ $105/15: 4 \times 15 = 60, 3 \times 15 = 45,$ $60 + 45 = 105,$ <p>Así, $3 + 4 = 7.$</p>
Imagen mental del algoritmo tradicional.		

Tabla 2. Estrategias de cálculo mental para la multiplicación y división.

2.4. La calculadora en el aprendizaje matemático

El uso de la calculadora para el aprendizaje de las matemáticas ha sido un tema de controversia desde su creación en la década de 1960. Phong (2006) cita a varios investigadores que han estudiado los efectos del uso de calculadoras en las aulas de matemáticas en primarias y secundarias. Estos estudios tienden a centrarse en el impacto del uso de la calculadora en el rendimiento y las actitudes de los estudiantes.

En este mismo sentido, Floris (2017) presenta un análisis de actividades basadas en calculadoras como medio de aprendizaje de las matemáticas. Su estudio lo realizó con estudiantes en diferentes grados escolares e incluso con maestros en formación. La intención del autor es dar a conocer cómo la calculadora es una herramienta muy beneficiosa y permite una mayor promoción del conocimiento, claro está, con la premisa de que su uso debe ser con una secuencia de actividades apropiadas y bien diseñadas. El análisis se basa en el concepto de "milieu" de Brousseau (1997), cuya esencia de la Teoría de Situaciones Didácticas es que, al final, el conocimiento enseñado tiene que ser transferible y aplicable al mundo real, es decir, no didáctico. Así, su investigación cuestiona si la calculadora en sí misma es un entorno de aprendizaje, concluyendo que no lo es, pues requieren un vínculo con

otras propiedades de un entorno, por ejemplo, la elaboración de la conexión entre las tareas propuestas por el profesor y lo que realmente logran los alumnos.

En contraste, la mayoría de profesores de matemáticas de nivel básico no consideran importante enseñar a usar una calculadora, pues suponen que es algo que aprenden los estudiantes por sí mismos. De esta forma, la mayoría de ellos limitan su uso a operaciones básicas y logran así un aprendizaje no suficiente, puesto que no están al alcance hacerlo.

Por otro lado, Stiff (2001, citado en Phong, 2006), quien fuera presidente del Consejo Nacional de Maestros de Matemáticas (NCTM), abordó nuevamente este tema al conocer un artículo que criticaba el uso de las calculadoras considerándola como perjudicial. Este investigador también señaló que las calculadoras son herramientas poderosas en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y se pueden usar de manera efectiva para promover el pensamiento de orden superior y ayudar a los alumnos a resolver problemas de manera flexible e ingeniosa.

Sin embargo, implementar el uso de la calculadora en el aula no es inmediato, requiere de una planificación detallada y minuciosa por parte del docente para integrarla con éxito a los contenidos y aprendizajes esperados. Es posible así, lograr que la calculadora juegue un rol significativo en temas como: estudio de las propiedades aritméticas, operaciones con fracciones, raíces cuadradas, aproximación, álgebra, entre otros (Floris, 2017).

En relación con lo anterior, Phong (2006) realizó una investigación que examina los mitos que existen con respecto al uso de calculadoras. De la información recolectada, se cree que el uso de calculadoras dificulta el desarrollo de conceptos y habilidades aritméticas básicas, especialmente entre los alumnos de baja capacidad. Halló también la creencia de que dificulta el desarrollo de habilidades de cálculo mental y que no promueve el desarrollo de habilidades de pensamiento, entre otras. Pero, por el contrario, el autor distinguió cómo el uso adecuado de la calculadora promueve el aprendizaje de las matemáticas y la resolución de problemas en las escuelas primarias.

Muchos de los críticos de la calculadora (Mackey, 1999; Izumi, 2000, citados en Phong, 2006) frecuentemente citan a Singapur, país reconocido por su limitado uso de la calculadora en niveles posteriores a primaria. Su lineamiento educativo se basa en no encontrar una respuesta correcta en sí, sino saber resolver problemas. Sin embargo, analizan la posibilidad de que este país las incorpore, bajo actividades claramente diseñadas y con un objetivo.

2.5. La calculadora descompuesta

La calculadora defectuosa o descompuesta es una actividad pensada por Lemoyne (2005, citada en Squalli, 2007) y fue utilizada en un estudio canadiense. Esta implicaba realizar una serie de cálculos usando una calculadora en la que algunas teclas (cuidadosamente elegidas de acuerdo con el objetivo pedagógico) están defectuosas. Por ejemplo, podríamos pedirle al alumno que realice el siguiente cálculo: Efectúa $76+65$ bloqueando, por ejemplo, la tecla "7", la tecla "6" y la tecla "5". El alumno deberá realizar operaciones para obtener 76 y 65 (por ejemplo, $80-4$ y

130/2). Esta actividad es excelente, ya que las posibilidades de realizar cálculos y teclas bloqueadas son infinitas. El estudiante podría practicar su sentido del número, sus habilidades de cálculo, las estrategias, las prioridades de las operaciones, etc. Se puede ver aquí que la calculadora se usa como una herramienta de enseñanza y no solo como una herramienta de cálculo (Goupil, 2012).

De esta forma, los docentes juegan un rol importante en la incursión de la calculadora en el aula, pues deberían ayudar a los estudiantes a identificar cuándo y cómo usar estas herramientas para promover conocimiento. En su artículo, Phong (2006) ejemplifica 4 actividades que pueden ayudar a la reflexión y al análisis de estrategias para la comprensión matemática. En particular, la primera de ellas nombrada la tecla rota o descompuesta, involucra el uso de la calculadora desde la idea de que una tecla no funciona y el alumno tiene que idear cómo resolver operaciones de suma y resta haciendo uso de las demás.

En relación con ello y tomando de referencia dicha actividad, se hizo uso de esta idea para indagar si es viable promover estrategias de cálculo mental en estudiantes de secundaria considerando las operaciones aritméticas que comúnmente se trabajan en el aula.

3. Método

El tipo de estudio es cualitativo de corte descriptivo, bajo lo descrito por Hernández, Fernández y Baptista (2010), debido al análisis de las estrategias utilizadas por estudiantes de secundaria cuando intentan resolver problemas aritméticos mediante cálculo mental.

3.1. Población de estudio

En esta investigación, inicialmente se tomó un grupo de segundo grado de secundaria que contaba con 33 estudiantes de la escuela particular Emilio Sánchez Piedras de la Ciudad de Apizaco, Tlaxcala, México, a los cuales se les aplicó un pre-test de elaboración propia de los autores, que consistió de 12 operaciones básicas con números naturales. Después de dicha aplicación, se eligieron 6 estudiantes que mostraron resultados altos, medios y bajos (esta clasificación es de acuerdo con el número de respuestas correctas), con los cuales se implementó el uso de la calculadora descompuesta para desarrollar nuevas habilidades en el cálculo mental y su posterior evaluación mediante entrevistas semiestructuradas.

3.2. Diseño de las actividades

El pre-test constó de 12 ejercicios aritméticos con números enteros y se construyó bajo la perspectiva de Lemonidis (2016) al trabajar el cálculo mental con dos dígitos o más, y con cálculos en distinto grado de dificultad, considerando la respuesta cuyos números fueran menores a 50, entre 50 y 100, y superiores a 100. (Véase Tabla 3).

Operación	1	2	3
Suma	12 + 35	34 + 57	67 + 86
Resta	47 - 13	78 - 26	133 - 28
Multiplicación	14 * 4	12 * 7	13 * 17
División	36 / 3	84 / 2	141 / 3

Tabla 3. Operaciones propuestas para cálculo mental.

La intervención con los alumnos seleccionados fue llevada a cabo en 8 sesiones de 50 minutos, cada una empleando la calculadora descompuesta. Para ello se utilizó una aplicación llamada *The Broken Calculator APK*, la cual fue instalada en una Tablet para mayor comodidad en las actividades. Esta herramienta permitió al investigador seleccionar el tipo de actividades afines con los objetivos que se perseguían. En nuestro caso, en la intervención realizada se tomó el dispositivo con el fin de crear ejercicios propios y seleccionar las teclas que en particular deseábamos que estuvieran bloqueadas y permitieran que los alumnos realizaran sus propios procedimientos ante los diferentes retos que se les propusieron.

La dinámica de las actividades consistió en trabajar con los alumnos en tres modalidades: trabajo en pares, grupal e individual. En las dos primeras sesiones las actividades fueron diseñadas con la finalidad de que el alumno escribiera números de dos cifras repetidas en cuyo caso la tecla correspondiente estaba descompuesta, por ejemplo, escribir el número 33 bajo la idea que la tecla 3 estaba inhábil; seguido de una actividad análoga pero en este caso para números de dos cifras diferentes, por ejemplo, el número 25 teniendo sin uso la tecla 2 y 5. Es importante señalar que a los alumnos se les restringió la tecla de punto decimal. La forma como se visualiza una actividad como la anterior se puede apreciar en la Figura 1.

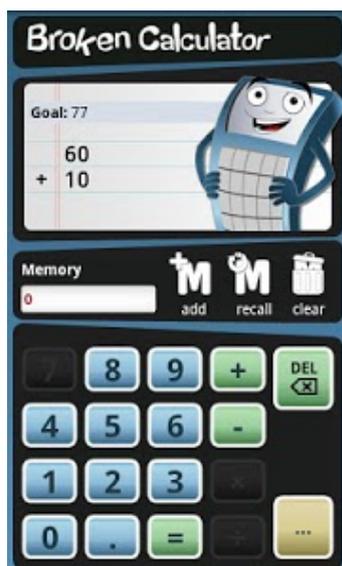


Figura 1. Ejemplo de actividad en la que faltan las teclas \times , \div y 7, y el reto es escribir el número 77. Fuente: Captura de pantalla de la aplicación.

(https://imgf.androidappsapk.co/fwf8SLLqI_36FuYSHUdNFiseR3xOXXLW3A7zi7P0hYwN6AeigbbrzYbQ1u_dZFFhNqg=h768)

Una de las ventajas presentadas por el dispositivo es que, posterior a las acciones del alumno y siendo el resultado correcto, se muestran los resultados en pantalla indicando el número de operaciones realizadas para completar el objetivo. Esta característica que ofrece la aplicación representa justamente lo que para Brousseau (2007) sería la devolución. En palabras de D'Amore (2011): "...para que el estudiante construya su propio conocimiento, debe ocuparse personalmente de la resolución del problema que se le propuso en la situación didáctica, es decir, debe implicarse en tal actividad..." (p. 95).

En las sesiones seguidas se le pidió al alumno que se enfrentara ahora a dar un resultado ante una operación aritmética, planteada mediante el uso de la calculadora descompuesta. De esta manera, las operaciones solicitadas al alumno fueron en el siguiente orden: suma, multiplicación, resta y división, y restringiendo dos dígitos distintos.

4. Resultados

4.1. Resultados del pre-test

El pre-test de cálculo mental se realizó de manera individual a cada uno de los 33 estudiantes, implementando una secuencia diferente de operaciones con cada uno. Posteriormente el estudiante daba su respuesta.

En esta evaluación se pudo observar que, de los ejercicios planteados, la suma 1 presentó mayor número de respuestas correctas, con 30 aciertos (91%), seguido de la división 2 con 28 aciertos (85%). Por otro lado, la que presentó mayor dificultad fue la multiplicación 3, cuya única respuesta correcta corresponde con la alumna de alto nivel de razonamiento, quien respondió 11 de 12 operaciones correctamente.

Para los resultados siguientes, que representan el análisis de las sesiones con los 6 estudiantes, se menciona que, dado el pre-test, se categorizaron a los alumnos por nivel de razonamiento: los alumnos 1 y 2 como nivel bajo, alumnos 3 y 4 de nivel medio y alumnos 5 y 6 de nivel alto.

En la Figura 2 se puede apreciar a uno de los estudiantes resolviendo una de las actividades con la aplicación de la calculadora descompuesta en una tableta. Puede notarse que algunas teclas están desactivadas.

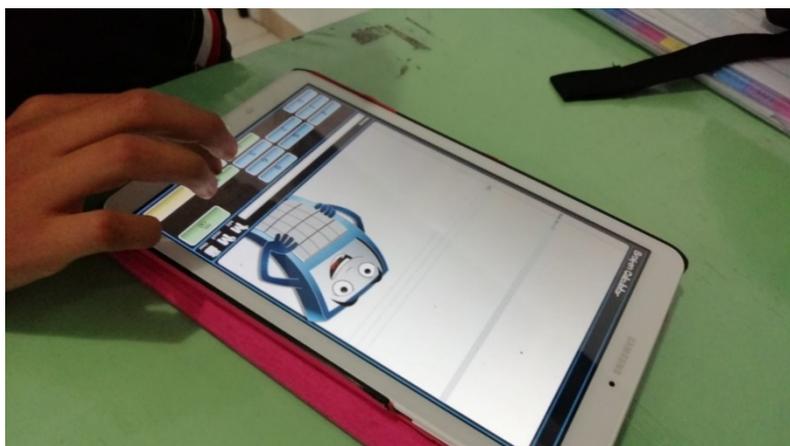


Figura 2. Un estudiante resolviendo la actividad propuesta.
Fuente: Elaboración propia.

4.2. Resultados de la intervención con la calculadora descompuesta

4.2.1. Resultados de las actividades 1, 2 y 3

En las 3 primeras sesiones el objetivo solicitado a los estudiantes es que escribieran en la pantalla distintos números: primero cuyas cifras eran repetidas y posteriormente sin repetir. En el desarrollo de estas actividades se dieron a los estudiantes distintas operaciones por nivel; siendo las dos primeras llevadas a cabo en pares y la tercera actividad de manera grupal. En primer lugar, sólo se les indicó la restricción de la tecla involucrada en el número y en un segundo momento restringiendo además la tecla de suma y resta, logrando promover en los alumnos una operación más allá de las ideas rápidas.

4.2.2 Resultados de las actividades 4, 5, 6 y 7

Las actividades realizadas por cada estudiante en estas sesiones involucraron la solución de dos ejercicios por cada operación básica. Los números involucrados fueron de dos dígitos cada uno. Inicialmente se restringieron los dos dígitos, y posteriormente se restringió también la tecla suma y resta.

Se pudo observar que los alumnos realizaban intentos de operaciones con la calculadora para llegar al resultado de la operación solicitada. De esta manera cuando iban desarrollando sus ideas con las teclas, había momentos en los que verificaban que se presentaba un error o que el procedimiento no era adecuado y realizaban la corrección correspondiente, es decir, la calculadora descompuesta propiciaba en los alumnos un razonamiento metacognitivo. Además de que la aplicación de la calculadora descompuesta permitió identificar el número de intentos/pasos realizados para llegar al resultado.

4.3. Resultados del post-test

Después de realizar la intervención con la calculadora descompuesta, se realizó a los alumnos una evaluación final, que consistió, como en el pre-test, de una secuencia diferente de las operaciones aritméticas sugeridas en la Tabla 3. A través de una entrevista semiestructurada y junto con la respuesta a cada operación, el estudiante daba de manera completa y detallada la explicación del procedimiento utilizado, lo cual nos permitió obtener la estrategia que el estudiante aplicó en las operaciones, y de esta forma categorizarlas de acuerdo con Lemonidis (2016) (ver Tabla 1 y 2).

La Figura 3 muestra todas las estrategias desarrolladas en los alumnos al resolver las operaciones propuestas. La distribución se encuentra en orden de la clasificación dada (bajos, medios y altos). El uso de la estrategia de imagen mental del algoritmo tradicional se ubica con mayor frecuencia, identificándose en todos los alumnos, y siendo la única que cumple esta característica. La estrategia de encadenamiento (N10) y recuperación directa fue presentada únicamente en tres alumnos y no pasando de más de dos veces de su aplicación. Dos alumnos hicieron uso de las estrategias de resta por suma (SA) y conteo, presentándose entre dos y tres veces, y finalmente la estrategia de división y de partición LR fue implementada máximo tres veces solo por dos alumnos. Además, solo hubo un alumno que omitió realizar el cálculo mental de una operación por dificultad, y que corresponde con el ejercicio 3 de la operación división. También, cálculos incorrectos solo se observaron en 4 alumnos, los cuales fueron de nivel bajo y medio, dada la clasificación propuesta.

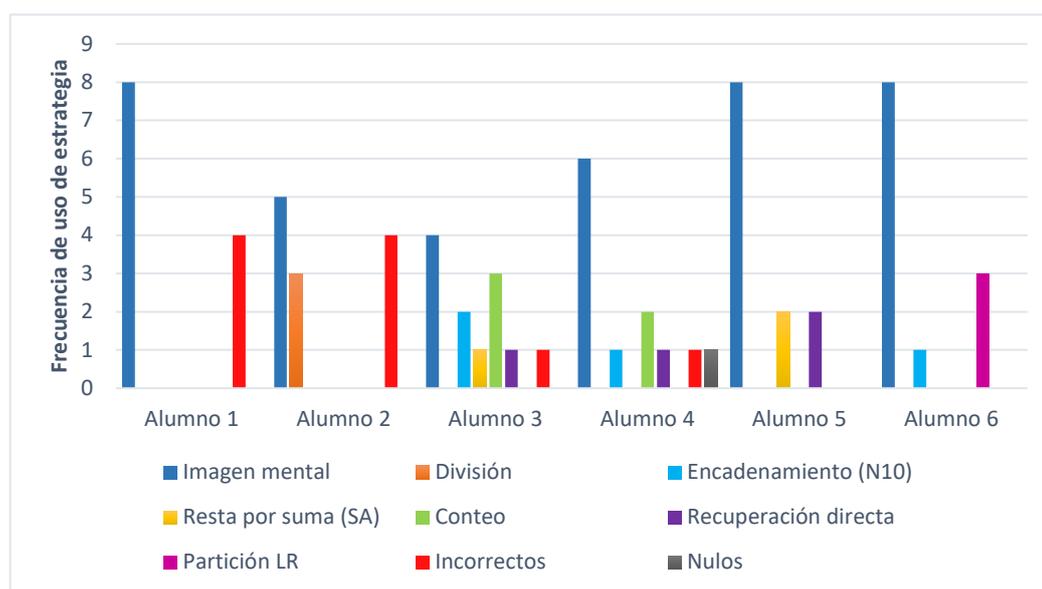


Figura 3. Frecuencia de las estrategias aplicadas por los seis alumnos al realizar operaciones de cálculo mental.

Fuente: Elaboración propia.

El desarrollo de estrategias de cálculo mental muestra un avance significativo entre los resultados iniciales y finales de cada alumno. Se resalta el aumento en el número de respuestas correctas como sigue: los alumnos de nivel de razonamiento bajo, en promedio respondieron 6 operaciones correctamente, adicionales a las

iniciales. Los de nivel medio realizaron 4 operaciones más y los de nivel alto cubrieron el total de aciertos posibles. Además, se identificó un menor tiempo en el proceso de solución, siendo en el post-test aproximadamente 10 y 12 minutos en contraste con el pre-test de 15 a 20 minutos. También se resalta el aumento de la confianza del estudiante al aplicar y justificar sus procedimientos.

La Tabla 4 muestra ejemplos particulares de procedimientos desarrollados con las estrategias identificadas de las que el estudiante hizo uso.

Estrategia	Operación	Alumno	Ejemplo
Imagen mental del algoritmo tradicional	12+35	Todos	2+5=7, 1+3=4, 47
	78-26	1, 4, 6	8-6=2, 7-2=5, 52
	12*7	2	2*7=14, 1*7=7,84
	63/3	2, 6	6/3=2, 3/3=1, 21
Resta por suma (SA)	78-26	5	26+52=78
Partición LR	14*4	6	4*4=16, 4*10=40, 56
División	12+35	2	30 + 10=40, 5+2= 7, 47
Conteo	14*4	3, 4	14+14=28, 28+28=56
Encadenamiento (N10)	67+86	3, 4	7+6=13, 8+6=14, 140, 140+13=153
Recuperación directa	36/3	3, 4, 5	12*3=36

Tabla 4. Ejemplos de uso de estrategias cálculo mental en los alumnos.

Se hace notar que los alumnos considerados inicialmente en el nivel alto lograron ahora tener el 100% de respuestas correctas, sin embargo, solo usaron tres estrategias de todas las posibles clasificadas por Lemonidis (2016). El alumno 5 uso: imagen mental del algoritmo tradicional, resta por suma y recuperación. Mientras que el alumno 6 utilizó también, en gran medida, el algoritmo tradicional, encadenamiento y partición LR.

Por otro lado, los de nivel medio usaron 4 o 5 estrategias. Se destaca que fueron innovadoras por el grado de dificultad presentado. En la Tabla 5 se pueden observar algunos ejemplos de las estrategias implementadas por estos alumnos.

Alumno	Operación	Proceso	Estrategia
3	34+57	57+4=61, 61+30=91	Estrategia de encadenamiento (N10)
	47-13	13+7=20, 20+27=47, 7+27=34	Resta por suma (SA)
4	14*4	10*4=40, 4*4=16, 40+16=56	Conteo
	36/3	12*3=36	Recuperación directa

Tabla 5. Ejemplos de estrategias de cálculo mental implementadas por alumnos de nivel medio.

Asimismo, como se observa en la Tabla 4, los alumnos de nivel bajo lograron un 50% más de respuestas correctas a las iniciales, aunque solo uno de ellos (Alumno 2) logró desarrollar una estrategia más a la usual del algoritmo tradicional, y que corresponde con la estrategia de división. Dicha estrategia fue usada en tres ocasiones como se puede observar en la Tabla 6.

Alumno	Operación	Proceso
2	12+35	30 + 10=40, 5+2= 7, 47
	67+86	60 + 80=140, 6+7=13, 153
	78-26	70 – 20 = 50, 8 – 6 = 2, 52

Tabla 6. Estrategias de división de cálculo mental implementadas por alumno 2 de nivel bajo.

Adicionalmente, se puede destacar que, con esta actividad se logró desarrollar la metacognición en los estudiantes. Afirmación que es justificada por las observaciones registradas durante la entrevista con cada estudiante. La dinámica consistió en que, ante cada operación solicitada por el investigador y pidiéndole al alumno que expresara cómo la llevaba a cabo en voz alta, este se obligaba a razonar nuevamente su proceso matemático y darse cuenta de algún posible error y rectificarlo. Al observar esto, se realizaban las preguntas correspondientes que dieran respuesta al análisis respecto del cambio realizado. Se resalta entonces cómo el estudiante planeaba su proceso, lo llevaba a cabo y lo evaluaba.

5. Discusión y conclusiones

En la presente investigación se ha obtenido un primer registro de las estrategias de cálculo mental desarrolladas mediante el uso de la calculadora descompuesta que realizaron 6 alumnos de segundo grado de secundaria. Los resultados obtenidos muestran un avance significativo de respuestas correctas y estrategias utilizadas al resolver las operaciones.

La comparación de los resultados entre el pre-test y pos-test muestran que hubo mejoría en las estrategias utilizadas para resolver dichas operaciones, sin embargo, algunas estrategias, como la holística o partición no basada en el valor posicional, entre otras, requieren mayor práctica, habilidad y tiempo, por lo que no se observaron. Se distingue también, que con los alumnos identificados de nivel medio se desarrollaron otras estrategias a las iniciales. Resaltamos que la estrategia más utilizada sigue siendo la de imagen mental del algoritmo tradicional de lápiz y papel, identificada al menos en cuatro ocasiones con cada uno de los estudiantes. Nuestros resultados coinciden con los hallados por Lemonidis, Tsakiridou, Panou y Griva (2014), quienes evidenciaron en su estudio las estrategias utilizadas por los estudiantes para el cálculo de las multiplicaciones de dos dígitos en la elección de situación libre, la estrategia dominante fue la representación mental del algoritmo escrito 48.3%, mientras que en nuestro estudio fue de 54,1%. Se observó que esta

estrategia es aplicada por los alumnos debido a que frecuentemente hacen uso de ella en el aula, vista como un método de cálculo usual, debido a que el currículo tradicional en México no incluye la enseñanza de otros métodos. Se puede decir así, que esta estrategia limita el desarrollo y el uso de nuevas estrategias mentales, como se reporta en el estudio de Yang y Huang (2015).

De esta manera, es importante resaltar que esta herramienta de enseñanza propició en gran medida el estímulo e interés para desarrollar ideas de cómo resolver problemas de cálculo mental, debido a los retos presentados, favoreció la agilidad y razonamiento matemático. También podría decirse que, el hecho de trabajar con actividades como las descritas, ayudó en gran medida al proceso de *devolución*, ya que los estudiantes recibían la retroalimentación de sus acciones a través de la calculadora (*milieu*) (D'Amore, 2011). Con todo esto, podemos concluir que esta actividad fomentó el desarrollo de estrategias de cálculo mental en los estudiantes examinados, por lo cual sería recomendable incluirla desde nivel básico. Sin embargo, es pertinente mencionar que se tienen que implementar las actividades adecuadamente para que se desarrolle la estrategia que se requiere.

Por otro lado, para tener más evidencia sobre qué estrategias se desarrollan con la calculadora descompuesta, consideramos que sería necesario realizar el estudio en una muestra más grande para tener más información al respecto. Asimismo, consideramos conveniente, para la investigación futura, profundizar en el estudio más detallado de las estrategias de cálculo mental que se desarrollan con la calculadora descompuesta, mediante entrevistas clínica en profundidad.

Referencias

- Barrera-Mora, F., Reyes-Rodríguez, A., y Mendoza-Hernández, J. G. (2018). Estrategias de cálculo mental para sumas y restas desarrolladas por estudiantes de secundaria. *Educación Matemática*, 30(3), 122-150.
- Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.
- Cantón, R., y Simón, M. (2003). El sorobán como herramienta para desarrollar habilidades del cálculo mental. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 16(3), 1-6.
- D'Amore, B. (2011). *Didáctica de la Matemática*. Bogotá, Colombia: Magisterio.
- Floris R. (2017) Pocket Calculator as an Experimental Milieu: Emblematic Tasks and Activities. In: Aldon G., Hitt F., Bazzini L., Gellert U. (Eds.) *Mathematics and Technology. Advances in Mathematics Education*. Springer, Cham. Recuperado de: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-51380-5>.
- Gálvez, G., Cosmelli, D., Cubillos, L., Leger, P., Mena, A., Tanter, É., Flores, X., Luci, G., Montoya, S. y Soto-Andrade, J. (2011). Estrategias cognitivas para el cálculo mental. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 14(1), 9-40.
- Gómez, B. (2005). La enseñanza del cálculo mental. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 4, 17-19.
- Goupil J.-F. (2012). L'utilisation de la calculatrice dans l'apprentissage des mathématiques au secondaire. En Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des*

- mathématiques et contrat social: enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012 (SPE1, pp. 1583–1603)*. Recuperado de: <http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actesemf-2012>
- Hickendorff M., Torbeyns J. y Verschaffel L. (2019). Multi-digit Addition, Subtraction, Multiplication, and Division Strategies. En: Fritz A., Haase V., Räsänen P. (Eds.) *International Handbook of Mathematical Learning Difficulties*. Springer, Cham.
- Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, P. (2010). *Metodología de la Investigación*. México: Mc Graw Hill.
- Lemonidis, C., (2016). *Mental Computation and Estimation: Implications for mathematics education research teaching and learning*. London: Routledge
- Lemonidis, C., Tsakiridou, H., Panou, F. y Griva, E. (2014). Prospective teacher's efficiency and flexibility in prep and mental calculation of two-digit multiplications. *MENON: Journal of Educational Research. 1st Thematic Issue*, 110-125.
- Mastrothanasis, K., Geladari, A., Zervoudakis, K., y Strakalis, P. (2018). Primary school pupils' strategies for mental addition and subtraction computations. *International Journal of Education and Research*, 6(8), 43-56.
- Mochón, S., y Vázquez, J. (1995). Cálculo mental y estimación: métodos, resultados de una investigación y sugerencias para su enseñanza. *Educación Matemática*, 7(3), 93-105.
- NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA, USA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Northcote, M. y McIntosh, M. (1999). What mathematics do adults really do in everyday life? *Australian Primary Mathematics Classroom*, 4(1), 19–21.
- Ortega, T. y Ortiz, M. (2002). Diseño de una intervención para la enseñanza-aprendizaje del cálculo mental en el aula. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 5(3), 271-291.
- Phong, K. (2006). Calculator use in primary school mathematics: A Singapore perspective. *The Mathematics Educator*, 9(2), 97-111.
- Rathgeb-Schnierer, E. y Green, M.G. (2019). Developing Flexibility in Mental Calculation. *Educação & Realidade*, 44(2).
- Reys, R. E. (1984). Mental computation and estimation: Past, present, and future. *The Elementary School Journal*, 84(5), 546–557.
- Rezat, S. (2011). Mental calculation strategies for addition and subtraction in the set of rational numbers. En M. Pytlak, T. Rowland, & E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of CERME-7* (pp. 396-405). Rzeszów, Poland: CERME
- Rodríguez, T. y Juárez, J. A. (2019). Estrategias de cálculo mental empleadas por una alumna de segundo grado de primaria: El caso de Luisa. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 102(3), 67-81.
- Ruthven, K. (1998). The use of mental, written and calculator strategies of numerical computation by upper primary pupils within a 'Calculator aware' number curriculum. *British Educational Research Journal*, 24(1), 21-42.
- Secretaría de Educación Pública (2017). *Plan y programas de Estudio de educación Básica secundaria*, México, Comisión Nacional de los Libros de Texto Gratuitos.
- Squalli H. (2007). *L'éducation mathématique au Canada: perspectives concernant les applications de nouvelles technologies dans l'enseignement de l'algèbre*. Université de Sherbrooke.

Thompson, I. (1999). Mental calculation strategies for addition and subtraction. Part 1. *Mathematics in School*, 28(5), 2-4.

Threlfall, J. (2002). Flexible Mental Calculation. *Educational Studies in Mathematics*, 50(1), 29-47.

Yang, D. C., y Huang, K. L. (2014). An intervention study on mental computation for second graders in Taiwan. *The Journal of Educational Research*, 107, 3–15.

Recuperado de: <http://dx.doi.org/10.1080/00220671.2012.753854>

Leticia Sánchez González. Docente de matemáticas en sección secundaria y bachillerato. Licenciada en Matemáticas Aplicadas. Estudiante de Maestría en Educación Matemática en la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. letysg2010@gmail.com

Prócoro Omar Butrón Zamora. Nació el 10 de mayo de 1990 en Tuxpan, Veracruz. Es Licenciado en Matemáticas Aplicadas por la Universidad Autónoma de Tlaxcala. Estudiante de Maestría en Educación Matemática en la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. omar_21063@hotmail.com

José Antonio Juárez López. Doctor en Ciencias, especialidad en Matemática Educativa, trabaja en la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, México. Realiza investigación y docencia en Educación Matemática. Sus proyectos actuales se relacionan con el diseño de tareas matemáticas auténticas y la comprensión textual de problemas matemáticos. jajul@fcfm.buap.mx