REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2005, Número 1, páginas 7 - 15
ISSN: en trámite

Cuadratura de polígonos

Carmen Galván

Resumen

Intentamos mostrar una forma de resolver en el aula el problema geométrico “Cuadratura de polígonos”. Encontraremos la posibilidad de establecer conexiones con las funciones y el álgebra. El uso de un programa de geometría interactivo facilita el dibujo, la visualización y la comprensión.

Abstract

We try to show a way to solve in classroom the geometric problem “Squaring polygons”. We will find the possibility of connections with algebra and functions. The use of an interactive geometry program facilitates drawing, visualisation and understanding.

Introducción

Partimos de la idea de que en la enseñanza de las matemáticas la geometría tiene una gran importancia. Su carácter formativo es evidente, por sí misma y porque en ella podemos encontrar una serie inagotable de ejemplos donde pueden relacionarse diversos contenidos matemáticos. Los conceptos, apoyados en la realidad de las figuras, adquieren más sentido y se aprenden mejor.

Nuestro ejemplo geométrico de hoy surge de la lectura de algo de historia de las matemáticas.

En *Historia de la Matemática* de J. Rey Pastor y J. Babini leemos: *En cuanto al problema de la cuadratura del círculo, surgió sin duda de la exigencia práctica de determinar el área de un círculo conociendo su radio o su diámetro, y traduciéndose geométricamente en un problema de equivalencia: dado un segmento como radio de un círculo, determinar otro segmento como lado del cuadrado equivalente. Los pitagóricos habían resuelto el problema de la “cuadratura de los polígonos”, pero al pasar de los polígonos al círculo, el proceso resultaba inaplicable…*

Y pensamos: Quizás en nuestro método de enseñanza de las áreas estamos dando poca relevancia a la equivalencia (igualdad del área de dos figuras) y al papel primordial que tienen el rectángulo y el cuadrado en la medida de una superficie: para empezar, es el cuadrado la figura elegida para representar la unidad de medida, y es a partir de la fórmula del área del rectángulo como producto de sus dos magnitudes lineales básicas (su base y su altura) como se justifican las fórmulas de las áreas de las demás figuras. En dichas fórmulas se relacionan, siempre a través de un producto, dos magnitudes lineales. Sin embargo, en la práctica, inconscientemente, recurrimos al rectángulo o al cuadrado para comprender mejor la cuantía de una superficie: una habitación de 12 m^2 la imaginamos como un rectángulo de 3 por 4 metros, por ejemplo, o un país cuya superficie sea, aproximadamente, 490000 Km^2 será como un cuadrado de 700 Km. de lado… Estamos recurriendo a la equivalencia, y, en ello, el rectángulo y el cuadrado aparecen de manera natural.

Pero ¿cómo resolvieron los pitagóricos en los siglos VI-V a C. el problema geométrico?: *Encontrar el segmento que será el lado del cuadrado de igual área que un polígono utilizando sólo rectas y circunferencias* es un problema atractivo, motivador... (Tenemos que buscar información, estudiar…)

En este trabajo se presenta una forma de llevarlo al aula. Puede servir para empezar a apreciar la fuerza y la belleza de las construcciones geométricas de la antigua Grecia y para repasar diversas propiedades fundamentales. Primero veremos la transformación de un polígono en un rectángulo de igual área. Después, el rectángulo se transformará en su cuadrado equivalente. Como el rectángulo que da origen al cuadrado no es único, "nos veremos obligados" a analizar los rectángulos que son equivalentes entre sí. La ocasión es buena para relacionar la geometría con las funciones.

Recurriremos a la ayuda de GEUP (www.geup.net), un programa de matemáticas interactivo, que nos va a facilitar al máximo el dibujo y la visualización, favoreciendo, por tanto, la comprensión, el hallazgo de nuevas relaciones, la formulación de nuevas preguntas, nuevas pautas para seguir trabajando.

Estas actividades están pensadas para realizar en clase con alumnos de catorce a dieciséis años (sería ideal que fuera en un aula en la que cada alumno pudiera utilizar un ordenador). Podrían resultar de interés en el momento del estudio de las áreas. Aportarían, quizás, algo nuevo a este estudio, que normalmente limitamos a ejercicios de repaso de las fórmulas y su aplicación. También se podría cambiar el orden: durante el estudio de las funciones, empezar por el estudio de rectángulos de igual área, como ejemplo de función de proporcionalidad inversa, y hablar después del cuadrado equivalente…

1. Reducción de vértices de un polígono

¿Podemos transformar un polígono cualquiera de n lados en un triángulo equivalente, valiéndonos sólo de rectas?

Esto promete ponerse interesante… Seguro que a los alumnos les gustará la idea. Es fácil. Sólo tenemos que recordar una propiedad fundamental: *Todos los triángulos que tienen la misma base y el vértice opuesto es cualquier punto de una paralela a ella, tienen igual área.*

Si fijamos la base AB y un punto C formando triángulo con A y B, moviendo el vértice C sobre la recta paralela por él a la base conseguimos diferentes triángulos ABC de la misma base y la misma altura y, por tanto, de igual área. (Fig. 1).

Es conveniente que cada alumno realice él mismo el dibujo y darle la oportunidad de que descubra por sí mismo la propiedad, antes de enunciarla formalmente.

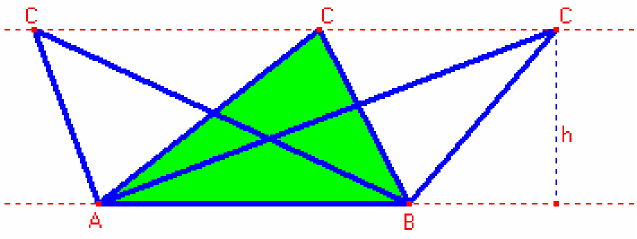

Fig.1

El programa, aparte de facilitar el dibujo, permite cambiar el triángulo de partida modificando cualquiera de sus vértices, y visualizar los triángulos generados por el movimiento de C sobre la paralela. La comprensión de la propiedad está, así, al alcance de todos.

Ahora, podemos aplicarla para la transformación del polígono.

Recurrimos de nuevo al programa:

Como ejemplo, dibujamos un pentágono ABCDE cualquiera. Nuestro objetivo: transformar el pentágono en un cuadrilátero ABCD’ y éste, después, en un triángulo BCD’’, equivalentes ambos al pentágono de partida.

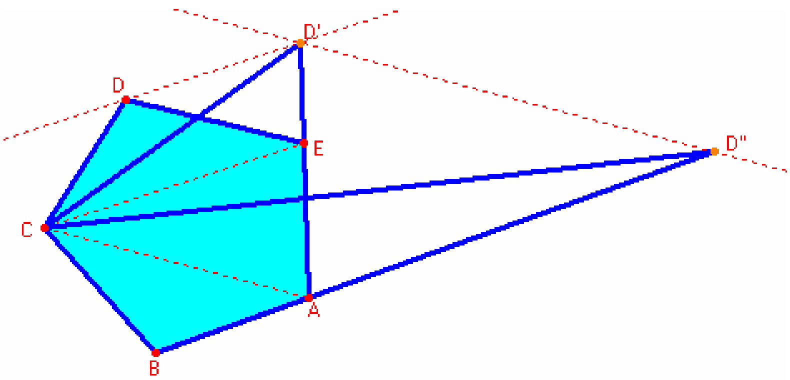

Fig. 2

El proceso es el siguiente: Poniendo como ejemplo el seguido en la Fig. 2, sustituimos el triángulo CDE por su equivalente CD’E. El punto D’ es la intersección de la prolongación del lado AE con la recta paralela a la diagonal CE por el vértice D. Hemos conseguido el cuadrilátero ABCD’ equivalente al pentágono. De forma análoga conseguimos el triángulo ACD'', como se observa en la figura, equivalente al ACD'. Con lo cual, el pentágono ABCDE es equivalente al triángulo BCD''.

El programa permite, con una sola construcción, tener el problema resuelto para cualquier polígono del mismo número de lados que el de partida, sin más que modificar cualquiera de los vértices. Si nos interesa, también nos dará el valor del área en cada caso.

Una vez que tenemos el triángulo equivalente, es fácil transformar éste en un rectángulo de igual área. Sólo tenemos que dibujar uno que tenga la misma base y la mitad de su altura (o aquel que tenga la misma altura y la mitad de la base).

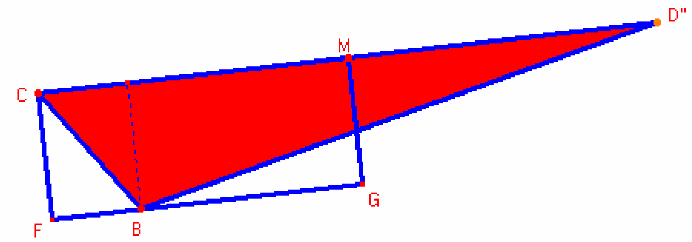

Fig.3

En la Fig. 3 el rectángulo CFGM tiene la misma altura y la mitad de la base que el triángulo BCD''.

Es importante advertir que triángulo final no es único, depende del vértice elegido para empezar el proceso de reducción.

2. El cuadrado equivalente a un rectángulo

Claro que la solución numérica es muy sencilla. Cualquier alumno de estas edades será capaz de indicarnos que la raíz cuadrada del área será el valor del lado del cuadrado equivalente… ¿Pero por qué renunciar a la riqueza de conceptos y a la belleza que encierra la construcción puramente geométrica?

El problema sería: *Dado un rectángulo, encontrar el lado del cuadrado equivalente a él utilizando sólo rectas y circunferencias.*

Aquí no va a haber cálculo numérico alguno. Sólo manipularemos segmentos valiéndonos de una regla sin graduar (trazado de rectas) y un compás (trazado de arcos de circunferencia). Puede resultar interesante.

El álgebra va a abrir el camino para la construcción…

Recordemos una identidad algebraica fundamental:

$$(a + b)\ (a - b) = a^2 - b^2$$

Podemos interpretarla desde la geometría: Si a y b representan segmentos, el primer miembro representa el rectángulo de dimensiones (a + b) y (a – b), mientras que el segundo miembro es el resultado de restar al cuadrado de lado “a” el cuadrado de lado “b”. Lo dibujamos: (Fig. 4.1).

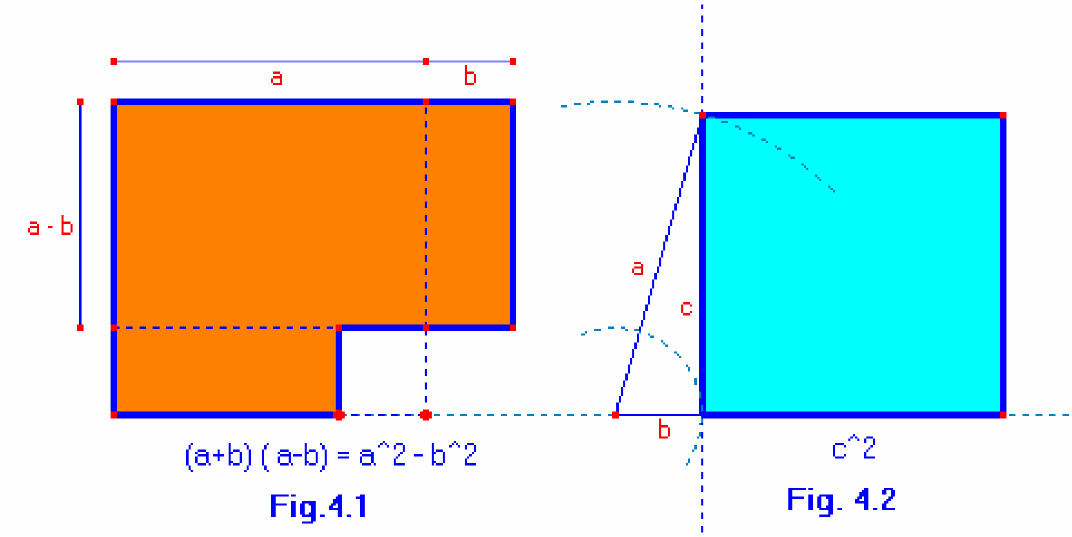

Fig.4.1 Fig. 4.2

Encontrar el cuadrado equivalente a la diferencia $\mathbf{a^2 - b^2}$ nos conduce a recordar el *Teorema de Pitágoras*, que relaciona los cuadrados de los tres lados de un triángulo rectángulo: $\mathbf{a^2 = b^2 + c^2}$, siendo “**a**” la hipotenusa y “**b**” y “**c**” los catetos. El problema se reduce a encontrar el cateto “c”, conocidos “a” y “b”: (Fig. 4.2).

Hemos conseguido la igualdad $\mathbf{(a + b)\ (a - b) = c^2}$. Es emocionante. No hay duda, las construcciones geométricas tienen una magia especial.

En el dibujo con GEUP (Fig. 5) se muestran dos construcciones del cuadrado equivalente a un rectángulo de base “a” y altura “b”. Una de ellas es análoga a la que hemos hecho anteriormente y la segunda utiliza la propiedad: *La altura h sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es media proporcional entre los segmentos (en este caso “a” y “b”) que determina en ella* (conocido como *Teorema de la altura*). Será necesario, además, recordar otra propiedad importante: *El triángulo que tiene un lado como diámetro y el vértice opuesto sobre la circunferencia es rectángulo, siendo el diámetro la hipotenusa.*

Es una oportunidad para recordar e ir consolidando el conocimiento de estas propiedades.

Nuestro objetivo está cumplido: Podemos conseguir geométricamente, utilizando sólo rectas y circunferencias, transformar un polígono cualquiera en un cuadrado equivalente: primero hemos conseguido un rectángulo, y, a través de éste, el cuadrado.

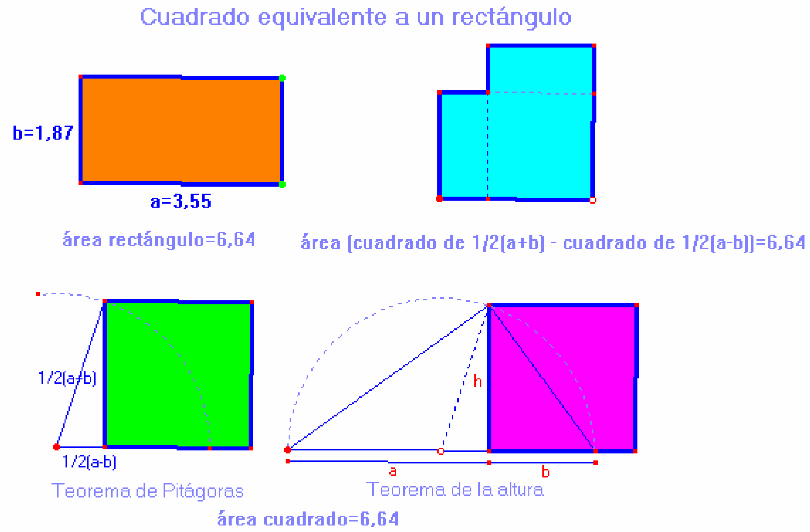

Fig.5

Tiene que quedar claro que para cada valor de un área, independientemente de la figura que sea, el cuadrado equivalente será único: el valor numérico de su lado es la raíz cuadrada del área.

Y todos deben saber que, sin embargo, no es único el rectángulo equivalente, pero, *¿Podemos dibujar o imaginar todos ellos?*

3. Rectángulos de igual área

Los diferentes apartados de esta actividad se irán proponiendo en clase uno a uno, a medida que los alumnos vayan resolviendo (es un ejercicio que solía trabajar con mis alumnos en el momento de iniciar el estudio de la proporcionalidad inversa):

a) Dibujar diferentes rectángulos que tengan la misma área (12 u^2 por ejemplo)

Aparecerán, rápidamente, los rectángulos cuyas medidas de la base y la altura son números naturales y divisores de 12:

3 x 4; 2 x 6; 1 x 12; y los 12 x 1; 6 x 2; 4 x 3…

b) ¿Cuántos rectángulos de igual área podemos dibujar?

Lo más probable es que no aparezca ningún rectángulo más, pero si es así, ayudaremos un poco: *Dibujar un rectángulo que tenga de base 2'5 y que su área sea 12…* (por ejemplo).

Pronto se aclararán las cosas, la mente se abrirá para aceptar la posibilidad de los números no enteros y la posibilidad de "jugar" con las dimensiones a nuestro antojo: Si fijamos la base, que puede ser cualquiera, ***x***, la altura correspondiente, ***y***, se puede hallar fácilmente (***y* = 12 / *x***). O de igual forma, si fijamos la altura, la base se hallará sujeta a una ley similar. La respuesta será unánime: podemos dibujar todos los rectángulos de igual área que queramos. Podemos continuar:

La base y la altura en los rectángulos de área constante (A) están relacionadas mediante una ley de proporcionalidad inversa: El producto de ambas magnitudes debe ser constante:

$$x \times y = A.$$

c) Construir la gráfica de la función y = A / x. Analizar aspectos importantes de esta gráfica, relacionándolos con los diferentes rectángulos.

Cada punto de esta gráfica tiene por coordenadas el valor de la base y de la altura de los infinitos rectángulos equivalentes, ¡pudiéndose visualizar, si queremos, cada uno de ellos! (Vale la pena estudiar la función).

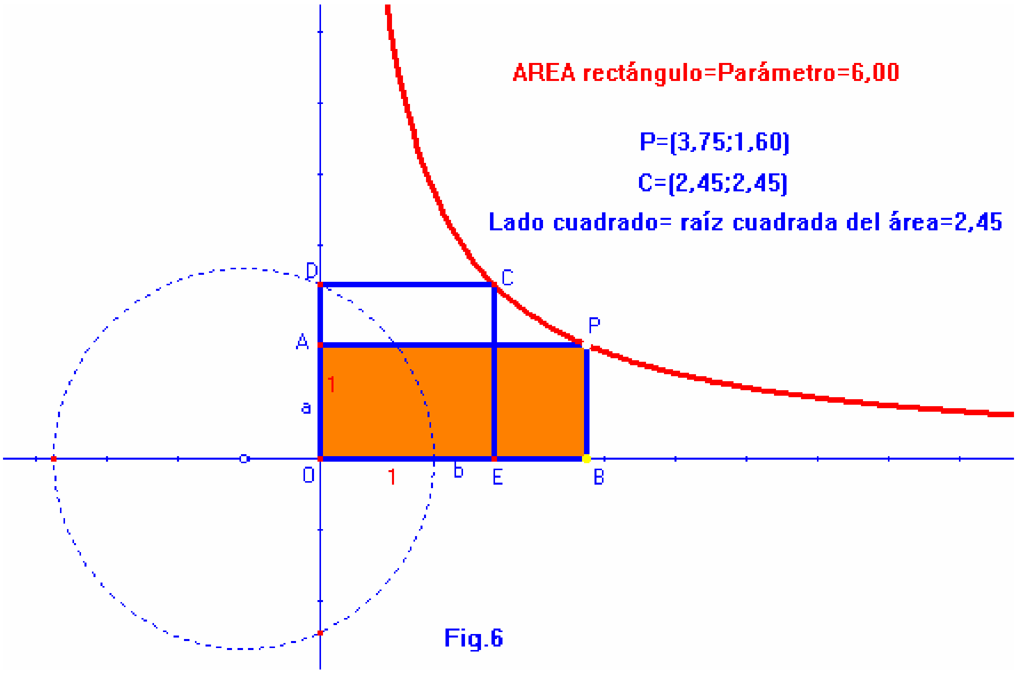

Fig.6

Será interesante analizar el intervalo de existencia (0,∞). No existe el rectángulo de base igual a cero (podemos reflexionar sobre la imposibilidad de dividir por cero); pero si la base tiende a cero la altura tiende a ser más y más grande (diremos que tiende a ∞). De igual forma, si la base tiende a infinito, la altura tiende a cero. Es una oportunidad para empezar a hablar de límites, basándonos en una situación concreta y visual como es el rectángulo. La continuidad en este intervalo se acepta fácilmente: cualquier segmento es admitido como base y el rectángulo tendrá su altura correspondiente, no tiene por qué faltar ningún rectángulo. Podemos observar la simetría de la función con respecto a la recta y = x relacionándola con los rectángulos (b ^{x} a) y (a ^{x} b) y fijar la atención en el punto de intersección de la recta y la curva: aquí el rectángulo tiene igual base que altura ¡es el cuadrado equivalente! En este punto el valor de la abscisa y de la ordenada es la raíz cuadrada del área (se puede recurrir al álgebra y resolver el sistema).

Sería una lástima no detenernos en relacionar el lenguaje gráfico con el geométrico y con el algebraico. La realidad geométrica, visual, nos ayuda a entender la utilidad de las funciones y sus gráficas, así como a comprender mejor los números y el álgebra. De igual forma, la función y su gráfica nos han facilitado el cálculo y la visualización de todos los rectángulos equivalentes…

La gráfica puede hacerse, primero, en el cuaderno y en la pizarra, como es habitual, para el caso concreto estudiado dibujando la función punto a punto. Después utilizaremos el ordenador.

El uso del programa nos va a permitir la observación de manera general. Vamos a poder modificar el valor del área (A) y, para cada valor de ésta, observar la transformación de los diferentes rectángulos equivalentes y disponer, en general, del dibujo de la función ***y*=A/*x*.** Podemos construir geométricamente el cuadrado equivalente y observar su comportamiento cuando movemos los rectángulos. Evidentemente, el cuadrado cambiará si cambia el valor del área.

La construcción es sencilla, (Fig. 6):

1. Elegimos un valor inicial cualquiera “A” para el área, que será un parámetro que podremos modificar.
2. Construimos el rectángulo de base “b” variable al mover el punto B; la altura correspondiente a cada base estará determinada por el valor “a = A / b”. Así, para cada valor de A y de b tendremos el rectángulo correspondiente.
3. Situando con origen en el vértice O unos ejes de coordenadas, podemos obtener el dibujo de la curva, que será el lugar geométrico del punto P cuando se mueve B. ¡Si movemos B sobre el eje horizontal, podemos observar el cambio del rectángulo y el punto P moviéndose, en consecuencia, sobre la curva (su lugar), o, también, mover el punto P y observar cómo va cambiando el rectángulo correspondiente!
4. Por último construiremos, de forma geométrica, el cuadrado equivalente, de tal forma que el vértice C esté situado en la curva correspondiente al lugar geométrico de los diferentes rectángulos. Para un área concreta, podremos observar la infinidad de los rectángulos equivalentes mientras el cuadrado permanece invariable.

Es interesante fijar la atención en cómo a medida que el punto P se acerca a C, sus coordenadas se van haciendo más y más iguales entre sí, aproximándose más y más al valor de la raíz cuadrada del área, obviamente, ya que el rectángulo se va haciendo cada vez “más cuadrado”. De nuevo la geometría, la visualización, ayuda a comprender la continuidad: llegaremos a encontrar el punto exacto, el segmento que será el lado del cuadrado, que tendrá, exactamente, un valor numérico (racional o irracional).

Este ejercicio de visualización y observación de los rectángulos equivalentes junto con su correspondiente cuadrado nos conduce a otras preguntas y a reflexiones nuevas:

El problema inverso: *Dado un cuadrado, encontrar el rectángulo equivalente,* tiene, lógicamente, infinitas soluciones. Sería interesante proponer la construcción geométrica de este caso.

Y seguir observando: *¿Es igual el perímetro de todos los rectángulos que tienen la misma área?*

La resolución y el análisis de estas dos cuestiones nos reserva nuevas sorpresas… Podemos seguir trabajando.

Una pequeña reflexión final

Tenemos que animarnos. Animarnos a adaptar nuestros contenidos, nuestra metodología y nuestros recursos didácticos a los nuevos tiempos. No podemos permanecer estáticos, anclados en nuestras viejas tradiciones, mientras el mundo se mueve. El movimiento, en el sentido adecuado, trae como consecuencia el avance. Lo vemos en la geometría, imprimir movimiento a las figuras produce el descubrimiento de nuevas propiedades, y en el análisis, que es, en sí, pura variación…

Bibliografía

- Courant, R. y Robbins, H. (1971): *¿Qué es la matemática?* Aguilar, Madrid.
- Eves, Howard. (1969): *Estudio de las geometrías.* Uteha, Méjico.
- Rey Pastor, J. y Babini, J. (1986): *Historia de las matemáticas.* Gedisa, Barcelona.
- Ríbnikov., K. (1987): *Historia de las matemáticas.* Mir, Moscú.

Carmen Galván ha sido profesora de educación secundaria en varios centros de la isla de Tenerife (Canarias, España). Tiene varias publicaciones sobre la enseñanza de las matemáticas.

e-mail: carmen@geup.net