UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2005, Número 3, páginas 19 - 23
ISSN: 1815-0640

La indigestión de Gulliver
(¿Es posible un mundo a escala?)

Agustín Martínez Menéndez

"....Le será entregada diariamente una ración de comestibles y bebidas suficientes para alimentar a 1728 súbditos de Liliput..."

Los viajes de Gulliver
Jonathan Swift

Es una constante de la literatura de imaginación el plantear variaciones apreciables en tamaño y forma. De los elaborados textos victorianos de Swift, Pope o Carroll hasta los relatos ultramodernos de algunos escritores de ciencia-ficción, se ha presentado el aumento o disminución de tamaño como algo interesante y, además, intrínsecamente factible, a falta de los medios materiales para ello.

Es esta una motivación que puede ayudar a comprender claramente el concepto de magnitud y la relación existente entre diferentes tipos de esta. Es ideal para que se borren los conceptos erróneos, y producir el choque necesario que haga al alumno abrir la mente a temas poco habituales. En último extremo un estudio profundo de estos temas llevaría al planteamiento fisico-matemático de las teorías de modelos, que son ya excesivamente complejos para nuestro propósito.

El trabajo de crítica y reflexión sobre las variaciones de magnitud no es evidentemente nuevo; ya Galileo estudio los principios de semejanza hace mas de 300 años (Ley cuadrático-cúbica) y mas modernamente, científicos como J.B.S. Haldane y D'Arcy Wentworth Thompson o divulgadores de la categoría de Perelman o Asimov han tratado el tema con profundidad, aunque con fortuna variable.

No se pretende pues introducir un problema nuevo, sino acercarlo a nuestra realidad y tratar de plantear una serie de casos llamativos y explícitos.

En muchas ocasiones la realidad no se corresponde con lo que "lógicamente" pensaríamos que ha de ocurrir, por ejemplo:

La torre Eiffel de París mide 300 metros de altura y pesa unos 8 millones de kilos. Si encargamos un modelo exacto de dicha torre, también de hierro y que pese sólo un kilo ¿qué altura tendrá? ¿será mayor o menor que un lápiz?

Con las dimensiones dadas podríamos pensar que, con sólo un kilo de peso, será muy pequeña, incluso menor que el lápiz. Pero hagamos números.

Si el modelo pesa un kilo, su volumen, al estar fabricado de igual material que el original, será 8 millones de veces menor que el de este. Sabemos (por la ley cuadrático-cúbica) que la relación entre los volúmenes de dos cuerpos semejantes es igual a la que existe entre los cubos de sus alturas respectivas. Por lo tanto, el modelo ha de ser 200 veces mas bajo que el original ya que $200^3 = 8000000$.

La altura de la torre es de 300 metros, luego la del modelo será:

$$300/200 = 1{,}5 \text{ metros}$$

es decir, un altura similar a la de un hombre.

¿Es sorprendente?

De igual forma podemos trabajar un sinnúmero de casos adicionales con los alumnos, así por ejemplo:

- Una familia está en armonía: el padre prácticamente el doble que el hijo mayor, que a su vez duplica a su hermano pequeño en todas sus dimensiones. Compran una docena de ovillos de lana y hacen un jersey para el padre con nueve de ellos. Con la lana sobrante ¿podrá vestir idénticamente a sus dos hijos?

Orientación: La variación de las estaturas ¿qué relación tiene con la superficie corporal?

- Sea un montón de espárragos de igual grueso y longitud. Se hacen manojos de 25 espárragos con una cuerda de 35 centímetros (no se considera el nudo), y se vende al precio de 500 ptas el manojo. Se decide hacer manojos con cuerdas de 14 centímetros (sin contar el nudo) ¿cuántos espárragos cabrán en cada manojo? ¿A cuanto se debe vender cada uno de estos manojos?

Orientación: el número de espárragos es proporcional al grosor de los mismos.

- ¿Por qué una astilla arde con mayor rapidez que el leño del cual se ha cortado?

Orientación: la velocidad de combustión depende de la superficie en contacto con el aire y del volumen del cuerpo que arde.

- En un día de frío, una persona mayor y un niño van igualmente vestidos ¿cual de los dos tiene mas frío?

Orientación: La generación de calor es proporcional al volumen y su pérdida a la superficie corporal

- En una ciudad se va a construir un pabellón deportivo de 40x40x20 metros. Se desea instalar un sistema de calefacción por placas radiantes. Para diseñar dicho sistema se estudia la distribución de placas en una habitación de 4x4x2 metros. Dado que el pabellón es 10 veces mayor en todas sus dimensiones, se decide que las placas, que en la habitación modelo eran de 1 m^2, sean también 10 veces mayores, con lo cual ocuparán una superficie de 100 m^2. ¿es acertada la decisión?

Este tipo de cálculo que podríamos llamar "geométricos" ha sido durante bastantes años la base de las teorías de modelos. El problema es que en muchos casos los factores que intervienen no sólo dependen de las medidas del sujeto, sino de parámetros no relacionados con ellos y, en muchos casos, ajenos al mismo sujeto. Una aproximación al tema muy sugerente nos la da el texto de Swift que encabeza la comunicación.

> "....Le será entregada diariamente una ración de comestibles y bebidas suficientes para alimentar a 1728 súbditos de Liliput..."

¿Es correcto el número?

Si atendemos a la pura geometría, es muy correcto. Gulliver es 12 veces mas alto que los liliputienses, pero también 12 veces mas ancho y 12 veces mas grueso; si, como parece razonable, la cantidad de alimentos ha de ser proporcional al volumen corporal, y dado que este ha aumentado en 12x12x12=1728, el aumento previsto en la cantidad de alimentos es muy lógico.

Pero vamos a profundizar un poco más, y la tabla 1 nos puede aclarar algún concepto

Peso (Kg.)	Calorías/kilo/día	Calorías/día
0,7	223	156,1
2	58	116
70	33	2310
600	22	13200
4000	13	52000
150000	1,7	155000

Tabla 1: Consumo metabólico de los mamíferos

Si Gulliver pesa unos 80 kilos, es claro que un liliputiense medio pesaría 1728 veces menos, ya que el peso es proporcional al volumen corporal. Es decir, su peso andaría alrededor de los 50 gramos.

Si consultamos la tabla, vemos que un liliputiense consume entonces alrededor de 1000 cal/día. Por tanto Gulliver, que consume unas 3000, sólo gasta 3 veces mas, no 1728 como habíamos supuesto.

Esta claro que Gulliver cogería una enorme indigestión. Igualmente interesante podría ser calcular si esta proporción se mantiene para los habitantes de Brobdignag, donde el pequeño es Gulliver. El resultado es sorprendente.

En estos cálculos intervienen obviamente parámetros que no son los puramente geométricos, puesto que los factores metabólicos no están en relación directa con la geometría del individuo.

No son sólo factores metabólicos los que pueden intervenir en consideraciones de este tipo. Pensemos por ejemplo en algo tan común como los ojos. Los habitantes de Liliput ¿verían mejor o peor que Gulliver? ¿y los de Borbdignag?

Vamos a fijarnos en estos últimos. Aparentemente, al ser 12 veces más altos que Gulliver, sus ojos también lo sería, y por lo tanto, habrían de ser 1728 veces más voluminosos. ¿Verían igual? Para discutirlo recordemos algunos principios sencillos de anatomía y óptica.

Un ojo posee en su retina un conjunto de células (conos y bastones), que son las que, al ser excitadas por la luz, permiten la visión. Además para que dos puntos distintos sean reconocidos como tales por el ojo, sus imágenes han de reflejarse en células diferentes.

Si el gigante crece 12 veces mas, sus células son 12 veces mas gruesas, con lo cual, los puntos distintos, para poder ser reflejados en células diferentes, habrán de estar separados 12 veces mas que antes, luego el gigante vería "12 veces peor". Conviene recordar que, en la vida real, los elefantes y las ballenas no tienen unos ojos tan grandes como cabría suponer.

También es interesante el cálculo para los liliputienses, pero tengamos entonces en cuenta que la longitud de un cono o de un bastón es aproximadamente igual a la longitud de onda media del espectro de luz visible (para nosotros)

Al disminuir el tamaño celular y la distancia intercelular 12 veces, los liliputienses verían en el espectro ultravioleta, su realidad no sería entonces la de Gulliver.

Casos como estos son quizás los más útiles para trabajar sobre problemas de magnitud, teniendo en cuanta que en ellos intervienen disciplinas que pueden estar aparentemente desligadas de las matemáticas.

Vamos a dar algunos ejemplos más, junto con orientaciones para su resolución.

- ¿Tendría un liliputiense problemas para salir del agua si se mojase?

Orientación: Un cuerpo sumergido en agua, al ser extraído de la misma, lleva sobre él una capa de líquido cuyo grosor es prácticamente igual sea cual sea el cuerpo. Un ser humano lleva una capa de unos 500 gr. de peso.

- Si un gigante se cae ¿Se hace más o menos daño que un hombre?

Orientación: El impacto de la caída es directamente proporcional a la masa y a la velocidad, e inversamente proporcional al área de contacto.

- Al aumentar el tamaño (o al disminuir) ¿varía la capacidad cerebral?

Orientación: La capacidad cerebral depende del número de neuronas y del número de terminaciones de estas en la superficie del cerebro.

- Los pulmones del gigante, aumentando como hemos visto ¿le permitirían respirar?

Orientación: La capacidad pulmonar depende directamente de la superficie de intercambio de los pulmones.

¿Podrían existir hormigas del tamaño de locomotoras?

Orientación: La respiración de las hormigas es traqueal, no pulmonar.

- Si una pulga creciese al tamaño de un hombre, ¿sería capaz de dar saltos fantásticos?

Orientación: El trabajo para saltar es proporcional a la masa del individuo y a la altura del salto, mientras que la potencia para el salto lo es a la masa.

Para acabar hagamos una reflexión. Si un sujeto varia de tamaño, puede deberse a dos causas, a saber:

a) Variación en la cantidad de átomos en su cuerpo
b) Variación en el tamaño de los átomos de su cuerpo.

¿Cuál es la viable? En la primera conviene pensar en las variaciones en complejidad que eso conlleva. En la segunda, las leyes de la mecánica cuántica tienen algo que decir.

Agustín Martínez Menéndez, es Doctor en Ciencias Físicas; Profesor de Matemáticas del CES Covadonga de Madrid; Profesor Asociado de Física en la Universidad Antonio de Nebrija de Madrid y miembro de la Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas, "Emma Castelnuovo"
E-mail: amartinez@ccovad.fuhem.es