UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Año XVI - Número 59. Agosto 2020
Páginas 204-226

http://www.fisem.org/www/index.php
https://union.fespm.es/index.php/UNION

Demonstrações matemáticas no Ensino Médio: o que pensam e sentem os estudantes

Jhone Caldeira Silva, Edson Donizeti Marra Junior

Fecha de recepción: 29/01/2019
Fecha de aceptación: 28/08/2020

Resumen	Este estudio analiza la aplicación de las demostraciones matemáticas en la práctica pedagógica durante la educación básica, particularmente investigando lo que piensan y sienten estudiantes del primer año de secundaria cuando las demostraciones son abordadas en el aula de clase. Los análisis sugieren que la secuencia lógica de las argumentaciones puede tener un papel esencial para el convencimiento, la justificación y la deducción de los resultados. La mayoría de los estudiantes dice apreciar las demostraciones y creer que ellas contribuyen a un entendimiento más profundo del contenido que se estudia, ya que permiten significaciones y reflexiones acerca de la veracidad de los resultados. **Palabras clave**: Demostraciones Matemáticas; Educación Básica; Didáctica de la Matemática.
Abstract	This study analyzes the use of mathematical proofs in pedagogical practice during basic education, investigating in particular what first year students of High School think and feel when proofs are addressed in the classroom. The discussions suggest that the logical chain of arguments can be used as an essential resource for convincing, justifying and deducing mathematical results. Many students report to appreciate the proofs and believe that they contribute to an effective understanding of the subject studied, since they allow for meaningful reflections on the veracity of the results. **Keywords**: Mathematical Proofs; Basic Education; Didactics of Mathematics.
Resumo	O presente estudo analisa o uso de demonstrações matemáticas na prática pedagógica durante a educação básica, investigando em particular o que pensam e sentem alunos do primeiro ano do Ensino Médio quando as demonstrações são abordadas em sala de aula. As análises sugerem que o encadeamento lógico dos argumentos pode se valer como recurso essencial para o convencimento, a justificativa e a dedução de resultados. Muitos estudantes apontam apreciar as demonstrações e acreditar que elas contribuem para um entendimento mais profundo acerca do conteúdo estudado, uma vez que permitem discussões para significações e reflexões da veracidade dos resultados. **Palavras-chave**: Demonstrações Matemáticas; Educação Básica; Didática da Matemática.

1. Introdução

O Ensino de Matemática na Educação Básica bem como a formação inicial do professor de Matemática tem sido fortemente refletido e discutido no Brasil, sobretudo com o fortalecimento da Educação Matemática como área do conhecimento e de investigação científica. Temos acompanhado a ampliação de pesquisas voltadas aos processos de ensino e aprendizagem buscando compreender a estrutura lógica da Matemática, seus princípios e algoritmos e a natureza das demonstrações de modo a promover abordagens sistemáticas para a resolução de problemas e a compreensão da Matemática presente no cotidiano. Os estudos de Balacheff (1988), Garnica (1995), Bicudo (2002), Bicudo & Garnica (2003), D'Ambrosio (2006) exemplificam movimentos que permitem entender a relevância e as dificuldades relacionadas à abordagem ou à ausência das demonstrações nos cenários da Educação Básica e da formação de professores.

Resultados de estudos como esses e de muitos outros têm sido amplamente socializados e discutidos. Investigações a respeito das práticas docentes, com relatos de experiências, estudos de casos de ensino e desenvolvimento de projetos de pesquisa, impulsionam espaços de comunicação científica como o Encontro Nacional do Ensino Médio (ENEM), o Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (SIPEM) e diversos eventos regionais abrigados nas principais universidades do Brasil. Esses movimentos têm contribuído fortemente na busca da melhoria da formação inicial dos professores de Matemática, consequentemente, impactando a Educação Básica.

Apesar de muitas experiências exitosas, ainda é atual e imprescindível a manutenção de projetos que visem investigar os processos de aprendizagem em torno da Educação Básica no Brasil, sobretudo o ensino de Matemática. Dados do Saeb 2017 (Sistema de Avaliação da Educação Básica) revelam que 71,67% dos alunos do Ensino Médio no Brasil têm nível insuficiente de aprendizado em Matemática para essa etapa de ensino.

Especificamente a respeito das demonstrações matemáticas, vemos que o Brasil precisa avançar quando comparado com outros países. Pietropaolo (2005) aponta que países como Alemanha, França, Inglaterra e Portugal apresentam melhor a exploração das demonstrações matemáticas em sala de aula em sua estrutura curricular para a formação básica dos estudantes. No Brasil, ainda que haja menção em documentos oficiais para o Ensino Fundamental (E. F.) e para o Ensino Médio (E. M.), as demonstrações estão mais restritas ao Ensino Superior.

Nesse contexto, a presente discussão origina-se com a hipótese de que a abordagem de demonstrações matemáticas em sala de aula na Educação Básica é importante viés de compreensão de propriedades e conexão de ideias entre os conceitos, suas definições e suas articulações na resolução de exercícios e problemas. Ainda que essa abordagem se concretize de modo diferente do uso formal das demonstrações nos cursos superiores, explorar caminhos de transposição didática para apresentá-las durante a Educação Básica permite romper com certo vício de passividade que envolve muitos de nossos estudantes.

Diante de análises de nossas experiências, não é raro ouvir em sala de aula que o "importante é saber a fórmula final e em que ela se aplica", evidenciando-se pouco interesse pelo desenvolvimento histórico, pela dedução ou construção, valorizando-se a manipulação dos conceitos de forma automática, sem discussões mais profundas. Nossos estudos foram especialmente motivados por indagações como essas na abordagem da fórmula de Bhaskara para equações de segundo grau e no tratamento das progressões aritméticas e geométricas, ambas no Ensino Médio.

Concordamos com Silva & Pires (2012) quando afirmam que, embora secundária, a importância das demonstrações no Ensino Médio se dá pela necessidade de que o estudante entenda que a Matemática é construída sobre uma lógica, mas fundamentalmente sobre o convencimento. Deve estar claro para o estudante de que a intuição é limitada e é primordial construir, comunicar, conjecturar, convencer ou ser convencido. O papel da demonstração na Educação Básica não pode se limitar a uma concepção de formalização e de averiguação técnica da validade de certas propriedades, indo além, implicando convencimento por meio de uma comunicação matemática adequada.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1998) apontam orientações relacionadas às demonstrações no ensino de Matemática na Educação Básica. Os documentos enfatizam a relevância das demonstrações e orienta para que haja, após a exposição de teoremas, demonstrações que instiguem os alunos a entenderem a construção do saber, privilegiando as deduções e as cabíveis relações do discurso teórico com a prática. Especificamente para o Ensino Médio (Brasil, 2006) afirmam que os livros didáticos de Matemática devem abordar as demonstrações de acordo com o nível de ensino. É recomendado para que haja, por parte dos discentes, um desenvolvimento das capacidades argumentativas dos mesmos, de modo que eles não se contentem apenas com a simples exposição de respostas e afirmações inquestionáveis que se dão por meio de fórmulas, senão assumam a postura crítica de sempre tentar justificá-las. Contudo, segundo D'Ambrosio (2006), há pesquisas indicando que a Matemática, no Ensino Médio, é apresentada para os alunos de maneira simplista, simbólica e abarrotada de "fórmulas mágicas", ou seja, fórmulas que não são explicadas ou justificadas.

De acordo com as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2006, p. 70),

> a forma de trabalhar os conteúdos deve sempre agregar um valor formativo no que diz respeito ao desenvolvimento do pensamento matemático. Isso significa colocar os alunos em um processo de aprendizagem que valorize o raciocínio matemático – nos aspectos de formular questões, perguntar-se sobre a existência de solução, estabelecer hipóteses e tirar conclusões, apresentar exemplos e contraexemplos, generalizar situações, abstrair regularidades, criar modelos, argumentar com fundamentação lógico-dedutiva. Também significa um processo de ensino que valorize tanto a apresentação de propriedades matemáticas acompanhadas de explicação quanto a de fórmulas acompanhadas de dedução, e que valorize o uso da Matemática para a resolução de problemas interessantes, quer sejam de aplicação ou de natureza simplesmente teórica.

No entanto, ainda observamos que as demonstrações geram inquietude e desconforto, não somente entre os estudantes da Educação Básica, mas também entre os alunos da Licenciatura em Matemática e, ainda, entre os próprios professores. Muitos estudantes relatam dificuldades pela pouca (ou quase nenhuma) experiência diante das demonstrações, e muitos professores associam suas dificuldades à formação que tiveram em seus cursos de graduação, sobretudo pela forma como as provas eram abordadas. Presenciamos situações em cursos de licenciatura em que as demonstrações são abordadas a partir de simplificações ou reformulações ou de forma ritualística como uma sequência de raciocínios lógicos sem tempo para significações e reflexões.

Assim como Pina Neves, Baccarin & Silva (2013), observamos as demonstrações mais associadas à produção do conhecimento matemático do que relacionada ao ensino e aprendizagem dos conceitos da Matemática. Com isso, muitos professores passam pelos cursos de graduação sem conseguir suprir alguns problemas provenientes de sua formação básica, eles próprios não compreenderem grande parte das demonstrações que lhes são apresentadas, gerando falta de motivação em utilizá-las e pouco convencimento de que elas são importantes no processo de ensino e aprendizagem. Portanto, sentem-se inseguros ou não preparados para explorar as demonstrações em sua prática docente.

Diante dos argumentos pontuados até aqui entendemos que as demonstrações são inerentes à Matemática e à produção de conhecimento matemático, que elas devem ser abordadas fundamentando a apropriação dos conceitos e de propriedades, além de compor um cenário que favoreça o entendimento. Nesse sentido, apresentamos alguns resultados de um estudo realizado com estudantes do 1º ano do Ensino Médio de um Centro de Ensino e Pesquisa Aplicada à Educação, localizado no Estado de Goiás, Brasil. Trazemos análises do que pensam e sentem os estudantes, explorando a visão e a opinião deles sobre o que entendem por demonstrações e como elas podem ou não favorecer os processos de aprendizagem.

2. O uso de demonstrações matemáticas no Ensino Médio

A experiência docente em Matemática tem nos ensinado que tratar a demonstração, em geral, é desafiador. Sobretudo na Educação Básica, percebemos muitas barreiras a serem rompidas, e em muitas situações detectamos uma aversão prévia diante de argumentações que visem a generalização. Encontramos relatos de dificuldades relacionadas a esse tipo de atividade, seja pelo fato dela exigir alta capacidade de argumentação e linguagem própria, seja porque ela tem sido pouco (raramente/nunca) empregada pelos professores em sala de aula.

A demonstração é a característica que diferencia a Matemática das outras ciências e a caracteriza como um conhecimento abstrato que supera os dados empíricos que dão sustentação às outras áreas do conhecimento como a Física, a Química e a Biologia (ABRIL, 2016). Thurston (1994), Garnica (1995) e Hanna & Jahnke (1996) apontam que as demonstrações são elementos essenciais se pretendemos compreender como funciona o discurso e a prática científica da Matemática. Ainda, Tarski (1991), Garnica (2002), De Villiers (2002), Fonseca (2004), Bicudo & Garnica (2003) e Garbi (2010) defendem que é por meio das demonstrações que há, de fato, a verificação da veracidade da Matemática.

Para Almouloud & Fusco (2006), a importância da demonstração vai além de se estabelecer uma verdade matemática, uma demonstração tem valor não só porque comprova um resultado, mas também porque pode apresentar novos métodos, ferramentas, estratégias e conceitos que tenham uma aplicabilidade mais ampla em matemática e aponta novas direções matemáticas. Entre as várias funções aludidas no tocante às demonstrações, as principais, segundo De Villiers (2002), são de: i) verificação - convencimento próprio e dos outros a respeito da veracidade de uma afirmação; ii) explicação - compreensão do por que uma afirmação é verdadeira; iii) descoberta - de novas teorias, conjecturas ou resultados a partir da tentativa de se demonstrar uma conjectura; iv) comunicação - negociação do significado de objetos matemáticos; v) desafio intelectual - satisfação pessoal pelo êxito na demonstração de um teorema; vi) sistematização - organização de resultados num sistema dedutivo de axiomas, conceitos e teoremas.

A literatura é vasta quando trata o conceito de *demonstração* e encontramos diferentes abordagens, indo desde demonstrações formais e provas rigorosas a cadeias de argumentações e explicações de um fato. Em função disso e da multiplicidade de termos, nem sempre sinônimos, adotamos o mesmo entendimento dado por Balacheff (1988), em que aponta uma demonstração como um conjunto de enunciados válidos organizados mediante determinadas regras, tendo em vista que os enunciados são tidos como verdadeiros ou são deduzidos e validados via argumentos da lógica. Em consonância, vemos uma demonstração como um processo do qual se parte de definições, conceitos primitivos e postulados, evidenciando-se a veracidade da afirmação por meio de uma sequência de inferências lógicas válidas (GARBI, 2010, p. 33). Essa é a mesma concepção apontada por Fetissov (1994), Lima (1999), Fonseca (2004) e Fossa (2009).

Diante de tudo isso, assumimos em nossos estudos que uma demonstração consiste em um encadeamento bem articulado de raciocínios lógicos, argumentos convincentes e rigorosos, a fim de validar uma tese, sendo tudo isso sustentado por um sistema axiomático. Convencidos de que as demonstrações são inerentes à Matemática e à produção de conhecimento matemático, somos levados a discutir o seu papel no Ensino Básico.

Segundo Garnica (2002), a demonstração no processo de ensino e aprendizagem é um meio de tornar esta aprendizagem mais sólida e consistente, pois sendo a matemática uma ciência do abstrato, o seu ensino não pode se eximir de certo equilíbrio em relação a esta prática. Pois esta permite: i) verificação, explicação, sistematização, descoberta e comunicação; ii) construção de uma teoria empírica, exploração do significado de uma definição ou das consequências de uma hipótese, absorvendo um fato novo em uma nova estrutura que permite uma nova percepção.

Em se tratando da matemática escolar, Moreira (2004), referindo-se à aprendizagem, aponta que há uma diferença significativa entre alinhar argumentos logicamente irrefutáveis que garantam a validade de um resultado e, por outro lado, promover entre os alunos o desenvolvimento de uma convicção profunda a respeito da validade deste mesmo resultado.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais enfatizam a relevância das demonstrações em Matemática, trazendo um documento repleno de instruções sobre como proceder com as demonstrações quando os estudantes estiverem estudando teoremas. O texto orienta para que haja, após a exposição do teorema, uma demonstração que instigue os alunos a entenderem a construção do mesmo, além disso, privilegiando as deduções e as relações cabíveis do discurso teórico com a prática. Ademais, afirmam que os livros didáticos de Matemática devem abordar as demonstrações de acordo com o nível de ensino.

Ante a tudo isso, defendemos que as demonstrações são necessárias para a construção do conhecimento matemático e ao serem inseridas no contexto da Educação Básica podem ser relevantes aos estudantes, desde que os mesmos consigam compreender todo o processo envolvido na demonstração. Para Lima (1999), um dos maiores méritos educativos da Matemática é o de ensinar aos jovens que toda conclusão se baseia em hipóteses.

Apossados desses entendimentos, exploramos o uso de demonstrações matemáticas em situações de sala de aula no Ensino Médio e investigamos quais são as concepções dos alunos ao se depararem com essas atividades. Isso é pertinente, uma vez que há poucas pesquisas com essa finalidade (PIETROPAOLO, 2005, p. 31). Além de que, esse mesmo autor pontua ter encontrado consenso entre pesquisadores em Educação Matemática e professores da área sobre a relevância da demonstração como recurso pedagógico nas aulas de Matemática.

3. Método

Para a realização desta pesquisa, houve uma etapa de ambientação com o intuito de conhecer a realidade escolar e o grupo de sujeitos envolvidos na investigação. Participou do estudo um grupo formado por 28 estudantes do 1º ano do Ensino Médio. Desse grupo, 18 (64,28%) eram do sexo feminino e 10 (35,72%) eram do sexo masculino, todos na faixa etária de 15 anos.

Foram realizadas atividades expositivas dialogadas envolvendo a fórmula de Bhaskara para equações algébricas de segundo grau e expressões sobre progressões aritméticas e geométricas. A dedução da fórmula de Bhaskara fora demonstrada de duas maneiras, a primeira por justificação algébrica e a segunda por justificação geométrica (apresentamos a estruturação dessas abordagens no Anexo I). Já para as progressões, foram adotadas demonstrações indutivas e dedutivas a fim de se deduzir o enésimo termo e a soma de *n* termos. Além disso, a introdução da soma de *n* termos de uma progressão aritmética contou uma contextualização histórica, o que muito chamou a atenção dos alunos.

Ambos os temas estavam inseridos no planejamento curricular do ano letivo, sendo tratados em momento oportuno. Os instrumentos utilizados para coleta, registro e estudo dos dados foram: Diário de Bordo (para os pesquisadores), Folhas de Registros (para os alunos), Questionário I (Anexo II), Questionário II (Anexo III) e Entrevista Semiestruturada (o roteiro encontra-se no Anexo IV). Os questionários foram construídos com o propósito de investigar alguns aspectos das experiências dos alunos com o tema demonstração, além de buscar compreensões de como eles se sentem e o que conseguem aproveitar em situações envolvendo argumentações lógicas. Sua elaboração se deu de acordo com Ortigão (2011), apontando-se que: esse tipo de instrumento permite coletar informações que auxiliam, entre outros aspectos, traçar perfis de condições escolares, e a elaboração de questões e itens pressupõe que se busque uma aproximação daquilo que se deseja observar. Também consideramos Gil (1999), segundo o qual, apresentando questões por escrito às pessoas, de cunho empírico, somos capazes de conhecer opiniões, crenças, sentimentos, interesses, expectativas, situações vivenciadas, etc. A pesquisa foi norteada predominantemente por uma abordagem qualitativa, como sugere Bicudo (2004) e para a apresentação de alguns resultados usufruímos de descrições quantitativas, assim como explicitam Bogdan & Biklen (1994).

Em todas as etapas da pesquisa, o Diário de Bordo fora utilizado, contendo registros detalhados das observações a fim de se construir a memória narrativa da investigação. Num primeiro momento, utilizamos o Questionário I buscando respostas mais gerais acerca da relação e dos sentimentos dos alunos envolvidos com as demonstrações. Posteriormente utilizamos o Questionário II com o objetivo de buscar respostas mais específicas sobre as demonstrações envolvendo a fórmula de Bhaskara (o método de cálculo de raízes de equações de segundo grau) e expressões sobre progressões aritméticas e geométricas (dedução do termo geral e soma dos termos).

Durante todo o processo os alunos estavam de posse das Folhas de Registros, nas quais podiam descrever como se sentiam diante daquela experiência, indicando as suas sensações, apontando qual demonstração preferiam, além das argumentações que entendiam ou não, e as possíveis dificuldades. Esse registro foi importante para que os alunos também guardassem memória do processo, sobretudo quando responderam o Questionário II.

Além dos dois questionários, fora realizada uma entrevista semiestruturada com seis alunos da turma. Para a escolha dos alunos que contribuiriam à pesquisa por meio da entrevista, optou-se por aqueles que estavam classificados com conceitos diferentes no ano escolar, selecionados, ao acaso, dois alunos com conceitos baixos, dois regulares e dois com conceitos bons. A entrevista tinha o intuito de aprofundar o estudo dos dados coletados anteriormente com os questionários e os diários de bordo, pois como ressaltado por Lüdke & André (1986),

> A grande vantagem da entrevista sobre outras técnicas é que ela permite a captação imediata e corrente da informação desejada, praticamente com qualquer tipo de informante e sobre os mais variados tópicos. Uma entrevista bem-feita pode permitir o tratamento de assuntos de natureza complexa e de escolhas nitidamente individuais. Pode permitir o aprofundamento de pontos levantados por outras técnicas de coleta de alcance mais superficial, como o questionário. E pode também, o que a torna particularmente útil, atingir informantes que não poderiam ser atingidos por outros meios de investigação [...]. (LÜDKE; ANDRÉ, 1986, p. 34).

Foi realizada uma leitura reflexiva das respostas e dos registros dos alunos e os dados foram analisados como apontam Fávero & Trajano (1998) e Moro & Soares (2005).

4. Apresentação e discussão dos resultados

Iniciamos nossa descrição a partir do Questionário I, cuja análise revelou-se fundamental para conhecermos os sentimentos dos alunos no que se refere às demonstrações em sala de aula. Em alguns pontos, anotações das entrevistas semiestruturadas darão suporte às observações realizadas. Com a Pergunta 1, gostaríamos de saber o que os alunos entendiam por demonstração. Observamos que, dos 28 alunos envolvidos, 06 (21,43%) acreditam que demonstração é o ato de demonstrar algo, apresentar, explicar; 05 (17,86%) acreditam que são procedimentos (contas) que conduzem às equações; 08 (28,57%) disseram que é a comprovação de uma equação; 05 (17,86%) disseram que é uma maneira de mostrar de onde vêm as coisas. Ainda, 04 alunos (14,28% do total) expressaram entendimentos diferentes dos anteriores, deixando registros que se referiam às demonstrações como um conjunto de várias fórmulas ou fazendo menção às demonstrações de experimentos práticos (citando o laboratório de química).

A Pergunta 2 fazia referência à familiaridade do aluno com as demonstrações, no sentido de ter vivenciado com certa frequência situações que as envolvessem. As respostas revelaram que 16 (57,14%) sujeitos reconhecem ter participado com frequência de atividades envolvendo demonstrações, enquanto 12 (42,86%) apontaram serem raras as oportunidades como essas. Ainda, observamos que 08 (28,57%) alunos puderam observar esse tipo de atividade desde o 6º ano do Ensino Fundamental até o 1º ano do Ensino Médio, 02 (7,14%) disseram ter visto demonstrações do 7º ano do Fundamental ao 1º ano do Médio, 06 (21,43%) do 8º ano do Fundamental ao 1º ano do Médio, 08 (28,57%) do 9º ano do Fundamental ao 1º ano do Médio, e outros 04 (14,28%) afirmaram terem visto uma demonstração apenas no 1º ano do Ensino Médio.

A Tabela 1 a seguir mostra a relação da quantidade de alunos com a série em que eles afirmam ter tido o primeiro contato com uma demonstração e a Tabela 2 mostra a quantidade de alunos que vivenciaram as demonstrações em cada ano.

Ano	Número de alunos	Porcentagem
6º ano E.F.	08	28,57%
7º ano E.F.	02	7,14%
8º ano E.F.	06	21,43%
9º ano E.F.	08	28,57%
1º ano E.M.	04	14,28%

Tabela 1. Número de alunos que viram uma demonstração pela primeira vez em determinado ano escolar.

Ano	Número de alunos	Porcentagem
6º ano E.F.	08	28,57%
7º ano E.F.	08	28,57%
8º ano E.F.	15	53,57%
9º ano E.F.	24	85,71%
1º ano E.M.	28	100%

Tabela 2. Número de alunos que viram pelo menos uma demonstração em determinado ano escolar.

Observamos aqui que todos os alunos já viram pelo menos uma demonstração, no entanto, por meio da Tabela I, podemos perceber que ainda há alunos que chegam ao último ano do Ensino Fundamental e outros que ingressam no Ensino Médio sem ainda terem visto uma demonstração. A fim de entender se esses primeiros resultados refletem as orientações apontadas pelas diretrizes curriculares, realizamos uma pesquisa nos documentos oficiais e percebemos que eles abrangem as demonstrações de forma generalizada sem orientações sobre a frequência de sua utilização e de qual o momento mais oportuno para introduzi-las. Essas observações estão de acordo com Abril (2016), que aponta que os PCNEM abordam o ensino de demonstrações de forma precária.

As Perguntas 03 e 04 foram analisadas simultaneamente. Na Pergunta 03, foi indagado ao aluno se ele gosta de ver os processos argumentativos que embasam as demonstrações e pedido que justifique a resposta, enquanto na Pergunta 04 gostaríamos de saber se, de acordo com a experiência do aluno, ele entende todo o processo argumentativo em uma demonstração. De um modo geral, quase todas as respostas à Pergunta 03 foram: "*normalmente sim*" e "*normalmente não*", ambas ancoradas em alguma justificativa. Para a Pergunta 04, as respostas foram, em maioria, "*sim*" e "*não*", também com justificativas. Organizamos os resultados nas seguintes categorias:

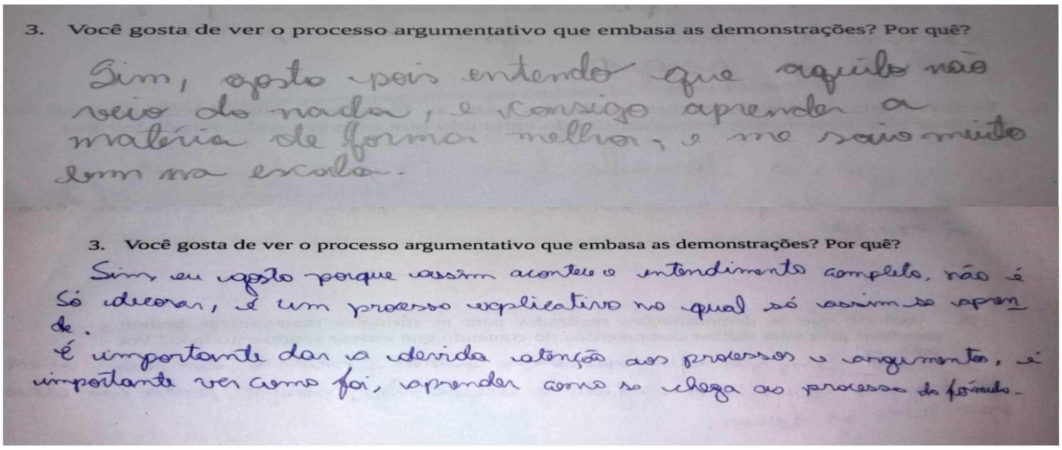
A1. Entendem bem e gostam de ver os processos argumentativos que embasam as demonstrações (07 alunos (25 %));

A2. Não entendem bem, mas acreditam que os processos argumentativos sejam importantes e, por isso, afirmam gostar de vê-los (13 alunos (46,43%));

A3. Não entendem bem e não gostam de ver os processos argumentativos que embasam as demonstrações (06 alunos (21,43%)).

A4. Outras respostas (02 alunos (7,14%)).

Vemos que todos os alunos que entendem bem os processos de demonstrações gostam de ver os processos argumentativos que as embasam. Neste grupo de alunos percebemos uma forte compreensão da importância de se entender as deduções e o encadeamento das ideias que permitem estabelecer resultados e propriedades matemáticas. As notações a seguir exemplificam isso.


3. Você gosta de ver o processo argumentativo que embasa as demonstrações? Por quê?

Sim, gosto pois entendo que aquilo não veio do nada, e consigo aprender a matéria de forma melhor, e me saio muito bem na escola.

3. Você gosta de ver o processo argumentativo que embasa as demonstrações? Por quê?

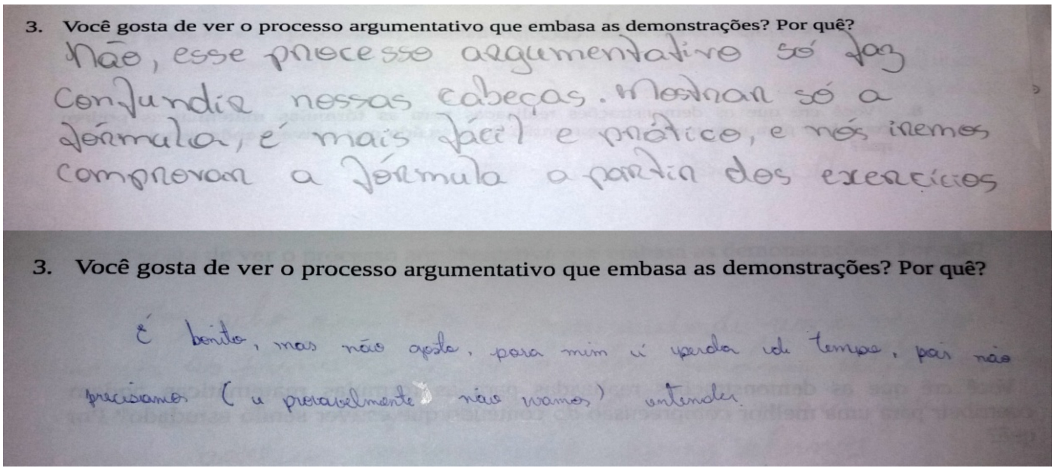
Sim eu gosto porque assim acontece o entendimento completo, não é só decorar, é um processo explicativo no qual só assim se aprende.
É importante dar a devida atenção aos processos e argumentos, é importante ver como foi, aprender como se chega ao processo da fórmula.

Figura 1. Notações produzidas por alunos, Categoria A1.
Fonte: Relatório de Pesquisa.

A Figura 1 traz informações relevantes evidenciadas pelos dados coletados, em que há a expressão clara por parte dos estudantes do Ensino Médio do desejo de bem compreender a origem de expressões/fórmulas, vivenciando um "entendimento completo" de um "processo explicativo", não apenas as aceitando como algo pronto para fins de mera aplicação na obtenção de resultados.

Nas respostas da maioria dos alunos que afirmam não entender bem os processos utilizados nas demonstrações, mas que, no entanto, gostam de ver o processo argumentativo, também vemos apontamentos de que esse processo os ajuda a obter uma melhor compreensão do conteúdo estudado. Assim, a partir da análise dos resultados dos alunos das Categorias A1 e A2, encontramos elementos concordantes com os nossos referenciais no que diz respeito à importância das demonstrações para o desenvolvimento cognitivo dos discentes. Alguns desses alunos também registraram que os processos argumentativos são divertidos e desafiantes, o que está de acordo com os registros encontrados nas respostas à Pergunta 5.

Ainda, uma parte não negligenciável de alunos não entende bem os processos que dão legitimidade às demonstrações e, os mesmos, não gostam de ver os argumentos que embasam essas demonstrações, contudo, em determinadas análises, pudemos perceber que havia uma relação entre aqueles que não gostavam porque não entendiam, porém, essa associação não foi percebida em todos os casos. Nas respostas dos alunos da Categoria A3 vemos apontamentos de falta de interesse em compreender as demonstrações e a não percepção de que os processos argumentativos sejam importantes à aprendizagem, sobretudo indicam uma pré-concepção de que esses processos são difíceis de entender. A Figura 2 apresenta algumas situações.


3. Você gosta de ver o processo argumentativo que embasa as demonstrações? Por quê?

Não, esse processo argumentativo só faz confundir nossas cabeças. Mostrar só a fórmula, é mais fácil e prático, e nós iremos comprovar a fórmula a partir dos exercícios

3. Você gosta de ver o processo argumentativo que embasa as demonstrações? Por quê?

É bonito, mas não gosto, para mim é perda de tempo, pois não precisamos (e provavelmente não vamos) entender

Figura 2. Notações produzidas por alunos, Categoria A3.
Fonte: Relatório de Pesquisa.

Vemos aqui respostas condizentes com o que aponta Crespo (2004): para os matemáticos, que são habituados com os estudos da Matemática, os obstáculos encontrados na produção de conhecimento, como as demonstrações, por exemplo, são normais e até mesmo de fácil compreensão, entretanto, o mesmo não ocorre para os discentes. Muitos alunos acham as demonstrações difíceis, artificiais e até mesmo inúteis, pois não vêem a necessidade de efetuar as verificações matemáticas, bastando simplesmente aceitar a veracidade de uma propriedade ou resultado.

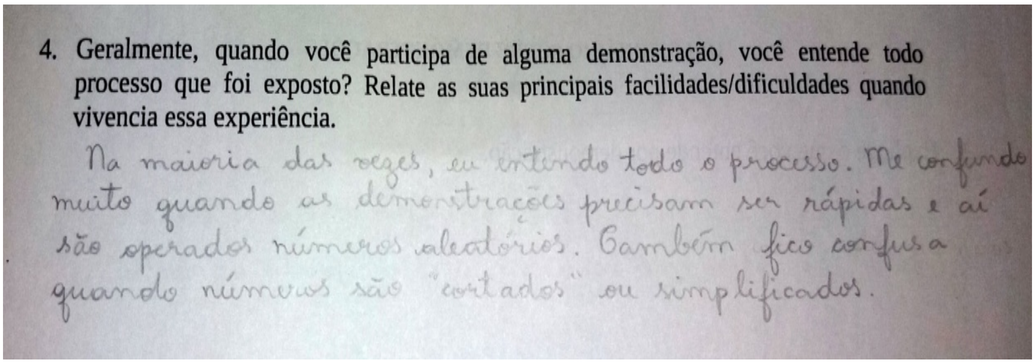
Ainda referente à Figura 2, encontramos um aluno que expõe uma preocupação no sentido de se gastar o tempo com algo que ele pode não entender. Para Almouloud & Fusco (2006) situações como essa estão relacionadas a uma síndrome do imediatismo, onde tudo aquilo que os alunos fazem devem produzir um fruto, e ainda mais, esse fruto deve ser útil, palpável e imediato.

Na Categoria A4, observamos respostas que não nos permitiram inferir se os alunos entendem ou não, gostam ou não de ver os processos argumentativos. Há indícios de que tais sujeitos não entenderam bem as perguntas.

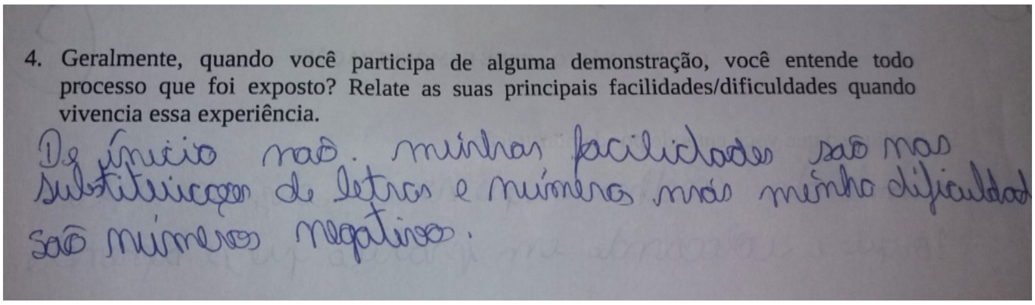
Como vimos, a maioria dos alunos, compondo as Categorias A1 e A2, se manifestam positivamente à importância dos processos argumentativos que embasam as demonstrações. E isso se confirma diante das manifestações às opções da Pergunta 5, cujas respostas predominantes apontam curiosidade, interesse, motivação e o sentimento de estar sendo desafiado.

Nas entrevistas semiestruturadas, nas quais fizemos suposições de que os entrevistados estavam vivenciando processos envolvendo demonstrações, identificamos que a grande maioria dos alunos se sentiriam contentes caso conseguissem compreender todos os argumentos envolvidos. Assim, inferimos que um bom entendimento de um processo demonstrativo faz com que os alunos se sintam bem, contentes, curiosos e motivados a estudar/aprender matemática.

De outro lado, não podemos subtrair alguns elementos que atrapalham ao aluno alcançar um bom e pleno entendimento dos processos demonstrativos. Também encontramos, em categorias diferentes, outros indicadores que nos ajudam a entender os sentimentos dos alunos diante dos processos argumentativos de demonstrações. Esses indícios podem nos ajudar a pensar em situações que possam influenciar na formação das concepções dos discentes sobre as demonstrações e, com isso, ampliar e aprofundar as nossas investigações: alguns alunos não entendem e não gostam dos processos de demonstração porque esses os deixam confusos; há alunos que denunciam que o tempo destinado às demonstrações é pouco; outros apresentam dificuldades com conceitos matemáticos envolvidos, como conjuntos numéricos, arbitrariedade de elementos em conjuntos, simplificações algébricas, o uso da aritmética e da álgebra. As notações a seguir trazem exemplos.


4. Geralmente, quando você participa de alguma demonstração, você entende todo processo que foi exposto? Relate as suas principais facilidades/dificuldades quando vivencia essa experiência.

Na maioria das vezes, eu entendo todo o processo. Me confundo muito quando as demonstrações precisam ser rápidas e aí são operados números aleatórios. Também fico confusa quando números são "cortados" ou simplificados.



4. Geralmente, quando você participa de alguma demonstração, você entende todo processo que foi exposto? Relate as suas principais facilidades/dificuldades quando vivencia essa experiência.

De início não. minhas facilidades são nas substituições de letras e números mas minha dificuldade são números negativos.

Figura 3. Notações produzidas por alunos.
Fonte: Relatório de Pesquisa.

A partir das notações da Figura 3 e de outros relatos semelhantes, inferimos que a demonstração em si pode não ser o elemento central gerador de dificuldades à compreensão, estando presentes outros entraves corriqueiros na apresentação dos conteúdos. Vencidas algumas barreiras conceituais e procedimentais, muitas delas componentes de etapas anteriores da formação escolar, alguns alunos poderiam melhor compreender as argumentações com raciocínios lógicos e se sentirem melhor inseridos em processos dessa natureza. Isso possibilitaria apresentarem melhor desenvolvimento diante de atividades que requerem a apresentação de encadeamento de ideias, estabelecendo melhores estratégias de resolução de problemas e construindo melhor suas próprias argumentações.

Alguns alunos também manifestaram na Pergunta 5 que se sentem confusos e desinteressados. Com as entrevistas, pudemos identificar que não compreender bem as argumentações pode influenciar diretamente os sentimentos desses alunos. Encontramos relatos apontando dificuldades com a linguagem empregada pelo professor e novamente denunciando que o tempo dedicado à construção das argumentações muitas vezes é insuficiente, que as argumentações são rápidas e até muito diretas.

Todos esses elementos nos levam a avaliar os processos de formação de professor, como apontam Pina Neves, Baccarin & Silva (2013), quando relatam que neles as demonstrações não têm sido empregadas para o ensino e aprendizagem dos conceitos da matemática e sim como mera transmissão de conhecimento técnico.

É imprescindível não ignorar entraves como esses relatados pelos alunos sob o risco de não se valer das demonstrações como instrumentos que permitem apresentar novos métodos ou estratégias e apontar novas direções, como valorizam Almouloud & Fusco (2006).

Finalizamos o Questionário 1 com as Perguntas 7 e 8, também analisadas em conjunto. A Pergunta 7 indagava se é importante empregar as demonstrações nas aulas de matemática e a Pergunta 8 se eles acreditavam que as demonstrações poderiam contribuir para uma melhor compreensão dos conteúdos. Categorizamos os resultados da seguinte forma:

B1. Apontam que é importante conhecer demonstrações e acreditam que as demonstrações podem contribuir para melhor compreensão do conteúdo (18 alunos (64,28%));

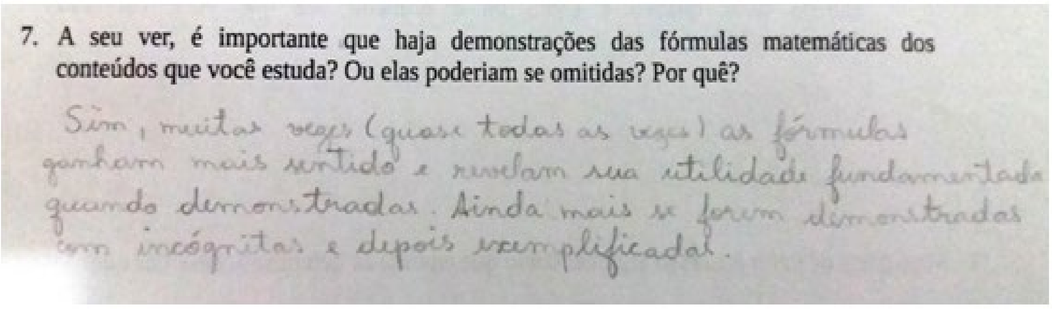
B2. Apontam que não é importante conhecer demonstrações, mas acreditam que as demonstrações podem contribuir para melhor compreensão do conteúdo (02 alunos (7,14%));

B3. Apontam que não é importante conhecer demonstrações e não acreditam que as demonstrações podem contribuir para melhor compreensão do conteúdo (06 alunos (21,43%));

B4. Outras respostas (02 alunos (7,14%)). Aqui identificamos uma resposta em branco e outra em que o sujeito aponta que as demonstrações podem ser usadas a seu favor ou não. Tratam-se exatamente dos dois sujeitos encontrados na Categoria A4.

Observamos na análise das respostas que todos os alunos que disseram que é importante ver as demonstrações também acreditam que as mesmas possam contribuir para uma melhor compreensão do conteúdo. Encontramos neles o sentimento de que as demonstrações produzem novas visões matemáticas, novas ligações contextualizadas, e novos métodos para resolver problemas, dando a elas um valor muito além de comprovar a veracidade de proposições, conforme apontam Almouloud & Fusco (2006). Para eles as demonstrações são indispensáveis para a ampliação de conhecimento matemático, pois o simples ato de planejar uma prova contribui para o desenvolvimento do raciocínio matemático. Nesse sentido, ilustramos no Anexo V um exercício cuja solução pode ser utilizada como motivação a uma experiência de resolução de problemas sem necessariamente partir para a aplicação direta de fórmulas prontas, mas que permite aos estudantes exercitar o raciocínio lógico.

Ainda sobre a Categoria B1, encontramos uma situação em que o aluno disse que gostava de ver os processos argumentativos que fundamentam as equações, pois, ele tem uma visão meio cética para as coisas. Essa observação é bastante interessante, uma vez que o posicionamento do aluno é contrário às questões de passividade que diagnosticamos entre os alunos e que motivaram nossa investigação. Outros alunos disseram que as demonstrações os fazem perceber que as equações não surgiram do "nada". A figura a seguir apresenta uma das respostas encontradas na Categoria B1.

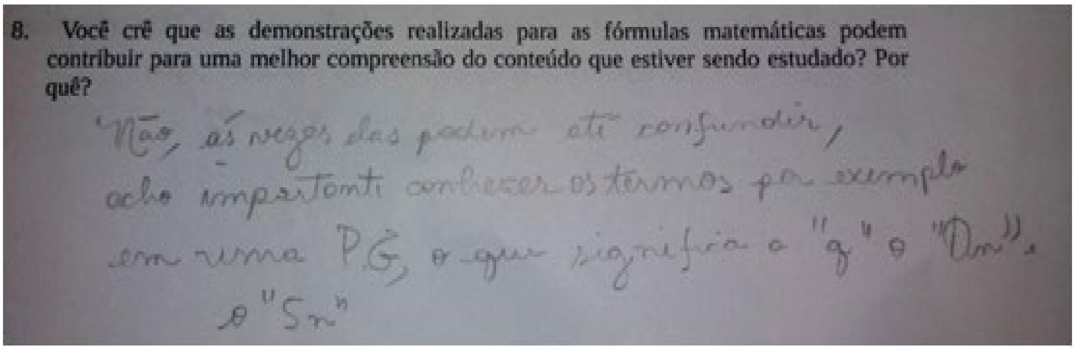

7. A seu ver, é importante que haja demonstrações das fórmulas matemáticas dos conteúdos que você estuda? Ou elas poderiam se omitidas? Por quê?

Sim, muitas vezes (quase todas as vezes) as fórmulas ganham mais sentido e revelam sua utilidade fundamentada quando demonstradas. Ainda mais se forem demonstradas com incógnitas e depois exemplificadas.

Figura 4. Notação produzida por aluno, Categoria B1.
Fonte: Relatório de Pesquisa.

Curiosamente, dois dos sujeitos, apesar de afirmarem que não é importante ver as demonstrações, têm o sentimento de que elas podem favorecer a compreensão

(Categoria B2). Ainda, vemos que um grupo de seis alunos não pensam que as demonstrações sejam importantes e tampouco que elas possam contribuir com a aprendizagem (Categoria B3). Em seus relatos, vemos justificativas como: “uma demonstração pode confundir o raciocínio” e “o importante é saber a fórmula”. Sobre isso, é pertinente ressaltar o que Pietropaolo (2005) pontua, segundo ele, foi percebido um consenso entre pesquisadores da Educação Matemática e professores de Matemática da Educação Básica sobre a importância da *prova* como um conteúdo e como recurso pedagógico nas aulas de Matemática. A seguir, trazemos uma notação produzida por aluno, referindo-se particularmente às progressões geométricas.


8. Você crê que as demonstrações realizadas para as fórmulas matemáticas podem contribuir para uma melhor compreensão do conteúdo que estiver sendo estudado? Por quê?

Não, ás vezes elas podem até confundir, acho importanti conhecer os termos por exemplo em uma P.G, o que significa o "q" e "an", e "Sn"

Figura 5. Notação produzida por aluno, Categoria B3.
Fonte: Relatório de Pesquisa.

Com o Questionário II, ao comparar a visão dos alunos acerca das distintas demonstrações apresentadas para a fórmula de Bhaskara, encontramos: i) segundo eles, a demonstração pelo método algébrico não é difícil, mas envolve alguns “truques”; ii) a demonstração pelo método geométrico, apesar de se apresentar bem mais complexa, permitiu a eles entenderem de onde as informações vinham. Com os dados, observamos uma preferência dos alunos por participar de uma demonstração mais difícil, que seja compreensível, do que de uma demonstração mais simples, mas que eles não entendem bem. Encontramos aproximadamente 71% dos alunos preferindo a demonstração geométrica, classificada como complexa, e 29% dos alunos preferindo a demonstração algébrica, considerada mais simples.

Referindo-se à soma dos *n* termos de uma progressão aritmética, também foram apresentadas duas argumentações, uma contou com uma etapa de contextualização, enquanto que a outra não. A contextualização constituiu da história de Gauss e a expressão correspondente foi deduzida a partir de números envolvidos no problema. O outro caminho foi puramente algébrico. Um número significativo de alunos, 24, isto é, aproximadamente 86%, preferiu a demonstração introduzida pela contextualização. Com as entrevistas semiestruturadas encontramos afirmações de que a contextualização histórica fora fundamental para o envolvimento dos alunos naquela situação, que se sentiram motivados a entender o processo argumentativo. Sobre a contextualização histórica, Lorenzato pontua:

> Outro modo de melhorar as aulas de matemática tornando-as mais compreensíveis aos alunos é utilizar a própria história da matemática; esta mostra que a matemática surgiu aos poucos, com aproximações, ensaios e erros, não de forma adivinhatória, nem completa ou inteira. [...] É interessante,

> principalmente para nós professores, observar que aquilo que os matemáticos demoraram em descobrir, inventar ou aceitar, são os mesmos pontos em que os nossos alunos apresentam dificuldade de aprendizagem. (LORENZATO, 2008, p. 107).

Na abordagem das progressões geométricas também adotamos duas estratégias, envolvendo argumentações indutivas e dedutivas. Com isso, os alunos poderiam vivenciar abordagens distintas que levassem aos mesmos resultados.

Finalmente, no Questionário II, havia questões (Perguntas 6, 13 e 18) indagando sobre o interesse dos alunos caso houvesse mais uma demonstração possível, além daquelas apresentadas. Cerca de 64% dos alunos responderam que se interessariam em ver outras demonstrações e os outros disseram que não. Assim, inferimos que há um potencial importante a ser explorado via processos argumentativos que permitam abordar as demonstrações matemáticas em sala de aula na Educação Básica. Entendemos que discussões como essas podem concretizar um instrumento que viabilize a compreensão de propriedades e conexão de ideias entre os conceitos, suas definições e suas articulações na resolução de exercícios e problemas.

5. Considerações Finais

Essa pequena amostra que embasou a análise que apresentamos no presente artigo revelou-nos apontamentos no sentido de que é possível envolver as demonstrações matemáticas nas abordagens pedagógicas na Educação Básica. A Matemática conta com o recurso (essencial) das demonstrações. As duas são inerentes e não há dúvidas acerca dos benefícios que as demonstrações proporcionam à expansão do conhecimento humano. Elas atuam, principalmente, nos pensamentos abstratos.

Ainda que alguns alunos envolvidos apresentaram dificuldades em entender o encadeamento lógico dos argumentos ou que uma parte deles não esteja convencida da importância do uso das demonstrações, encontramos resultados que nos permitem avaliar que a maioria dos alunos acredita que é importante conhecer justificativas e deduções de resultados.

Percebemos que muitos estudantes valorizam que se desenvolva uma postura crítica, por professores e alunos, diante dos conceitos e propriedades apresentados, permitindo tempo de discussões para significações e reflexões de modo a promover a verificação da veracidade dos resultados. Isso está de acordo com o que apontam Garnica (2002), Fonseca (2004) e Bicudo & Garnica (2003). Esses alunos também apontaram apreciar as demonstrações e acreditar que elas contribuem para um entendimento mais profundo acerca do conteúdo que estiver sendo estudado.

Com tudo o que aqui fora relatado, nos perguntamos como as demonstrações estão presentes na prática pedagógica em Matemática. Os alunos da Educação Básica têm vivenciado situações de provas? Em geral, o que pensam a respeito das demonstrações? O que sentem? Como os professores têm selecionado e organizado os conteúdos dos programas curriculares a fim de trabalhar as demonstrações? Como criar situações de aprendizagem envolvendo as demonstrações? Como interpretar os pensamentos, sentimentos e opiniões de seus estudantes a esse respeito? Tais questionamentos elucidam a necessidade de expandir e aprofundar pesquisas como esta.

Esperamos que o presente estudo venha somar-se a outros que apontem aos professores da Educação Básica uma reflexão e análise crítica de sua prática pedagógica. Em contraponto ao observado por Pina Neves, Baccarin & Silva (2013), desejamos que as demonstrações não mais sejam associadas predominantemente à produção do conhecimento matemático nos cursos superiores, mas que de fato sejam empregadas no ensino. Que haja uma real aplicabilidade dos recursos concernentes às demonstrações nos processos de ensino e aprendizagem da Matemática e que os professores possam romper com possíveis problemas e dificuldades provenientes de sua formação, que muitas vezes os levam a abandonar os argumentos demonstrativos.

Bibliografia

Abril, R. H. (2016). *Demonstração de equações matemáticas no ensino médio.* 167 f. Dissertação, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (Profmat), Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba.

Almouloud, S. A., Fusco, C. A. S. (2006). *Discutindo algumas dificuldades de professores dos ensinos Fundamental e Médio a respeito do conceito de demonstração* - Anais do III SIPEM.

Balacheff, N. (1988). *A study of students' proving processes at the junior high school level*. Second UCSMP International Conference on Mathematics Education, Chicago.

Bicudo, I. (2002). *Demonstração em Matemática*. *Bolema*, ano 15, n. 18, 79-90.

Bicudo, M. A. V. (2004). *Pesquisa Qualitativa e Pesquisa Qualitativa Segundo a Abordagem Fenomenológica*. In: Borba, M. C., Araújo, J. L. (Org.) *Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica.

Bicudo, M. A. V., Garnica, A. V. M. (2003). *Filosofia da Educação Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica.

Bogdan, R. C., Biklen, S. K. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação Matemática: uma introdução à teoria e aos métodos*. Lisboa: Porto Editora.

Brasil. (2006). *Orientações Curriculares para o Ensino Médio.* Brasília: Ministério da Educação, Secretaria da Educação Básica.

Brasil. (1998). Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática.* Brasília, DF.

Crespo, C. (2004). *Argumentar matemáticamente: su importancia en el aula.* In: II Congreso Virtual de Enseñanza de la Matemática, Guadalajara, México.

D'Ambrosio, U. (2006). *Formação de professores de matemática: professor-pesquisador. Atos de pesquisa em Educação.* PPGE/ME – FURB. vol. 1, n. 1, 75-85.

De Villiers, M. (2002). Para uma compreensão dos diferentes papéis da demonstração no ensino em geometria dinâmica. Lisboa: APM, Actas do Profmat 2002, 65-72.

Fávero, M. H., Trajano, A. A. (1998). *A leitura do adolescente: mediação semiótica e compreensão textual*. Psicologia: Teoria e Pesquisa, n. 1, 131-136.

Fetissov. A. I. (1994). *A demonstração em geometria.* 1. ed. São Paulo: Atual Editora (Coleção Matemática: Aprendendo e Ensinando).
Fonseca, L. (2004). *Formação Inicial de Professores de Matemática: A Demonstração em Geometria.* Aveiro: Universidade de Aveiro.
Fossa, J. A. (2009). *Introdução às técnicas de demonstração na Matemática.* 2 ed. São Paulo, SP: Livraria da Física, v. 1., 150p.
Garnica, A. V. M. (1995). *Fascínio da Técnica, Declínio da Crítica: um estudo sobre a prova rigorosa na formação do professor de Matemática.* Tese (Doutorado em Educação Matemática). Rio Claro: IGCE-UNESP.
Garnica, A. V. M. (2002). *As Demonstrações em Educação Matemática: um ensaio*. *Bolema*, ano 15, n. 18, 91-99.
Garbi, G. G. (2010). *C. Q. D. Explicações e demonstrações sobre conceitos, teoremas e fórmulas essenciais da geometria.* São Paulo: Editora Livraria da Física.
Gil, A. C. (1999). *Métodos e técnicas de pesquisa social*. 5. ed. São Paulo: Atlas.
Hanna, G.; Jahnke, N. (1996). *Proof and Proving*. In: Bishop, A. et al. (Ed.). *International Handbook of Mathematics Education***.** Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 877-908.
Lima, E. L. (1999). *Meu professor de Matemática.* Sociedade Brasileira de Matemática, IMPA, RJ. (Coleção do Professor de Matemática).
Lorenzato, S. (2008). *Para aprender matemática*. 2. ed., Campinas, SP: Autores Associados.
Lüdke, M., André, M. (1986). *Pesquisa em Educação: abordagens qualitativas*. São Paulo: EPU.
Moreira, P. C. (2004). *O conhecimento matemático do Professor:* formação na Licenciatura e prática docente na escola básica. Tese (Doutorado em Conhecimento e Inclusão Social). Faculdade de Educação, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte.
Moro, M. L. F., Soares, M. T. C. (2005). *Desenhos, palavras e números: as marcas da matemática na escola*. Curitiba: Ed. da UFPR.
Ortigão, M. I. R. (2011). Análise das práticas de professores de matemática da educação básica. *Estudos em Avaliação Educacional*, São Paulo, v. 22, n. 48, 29-52.
Pietropaolo, R. C. (2005). *"(Re) significar a demonstração nos currículos da educação básica e da formação de professores de Matemática".* Tese (Doutorado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.
Pina Neves, R. S., Baccarin, S. A. O., Silva, J. C. (2013). A formação geométrica de licenciandos em matemática: uma análise a partir da replicação de questões do exame nacional de desempenho de estudantes (ENADE). Sección: Ideas para enseñar. *UNIÓN* [en línea], 34. Recuperado el 15 de agosto de 2018, de http://www.fisem.org/www/union/revistas/2013/34/archivo15.pdf
Silva, M. A., Pires, C. M. C. (2012). Quais os objetivos para o ensino de Matemática? Algumas reflexões sobre os pontos de vista de professores. *UNIÓN* [en línea], 31. Recuperado el 10 de marzo de 2018, de http://www.fisem.org/www/union/revistas/2012/31/archivo_6_devolumen_31.pdf
Tarski, A. (1991). Verdade e demonstração. Tradução de Jesus de Paula de Assis. *Cadernos de História e Filosofia da Ciência*, Campinas: Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência – Unicamp, série 3, 91-123.

Thurston, W. P. (1994). *On proof and progress in mathematics.* Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 30, n. 2, 161-177.

Caldeira Silva, Jhone. Bacharel e Licenciado em Matemática (Universidade Federal de Viçosa), Mestre e Doutor em Matemática (Universidade de Brasília, com Doutorado Sandwich na Universidad Autónoma de Madrid). Atualmente é Professor Associado da Universidade Federal de Goiás, Goiânia. Autor de livros e de artigos direcionados à Licenciatura em Matemática, como a coleção *Estruturas Algébricas para Licenciatura*.
E-mail: jhone@ufg.br

Marra Junior, Edson Donizeti. Licenciado em Matemática pela Universidade Federal de Goiás e licenciado em Música pelo Centro Universitário Claretiano. Possui experiência no ensino de Matemática para a Educação Básica, estando atualmente vinculado à Secretaria da Educação do Estado de Goiás como professor dessa disciplina. Ademais, é regente titular da *Associação Cultural Coral Ad Gloriam*.
E-mail: edsonmarra96@gmail.com

Anexo I

Demonstrações para a Fórmula de Bhaskara

Etapa 1. Apresentação dialogada a respeito da importância das representações algébricas de equações, da formulação e obtenção de equações, de suas soluções, e seu papel no desenvolvimento da linguagem matemática.

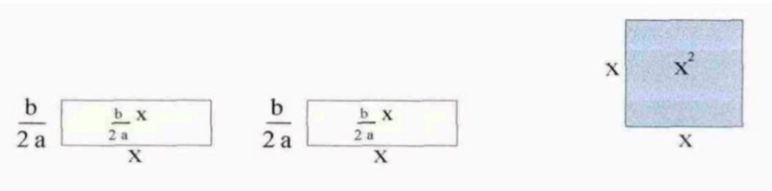
Etapa 2. Demonstração I – Evidenciação do tratamento algébrico e da linguagem simbólica, mediante argumentação dialogada.

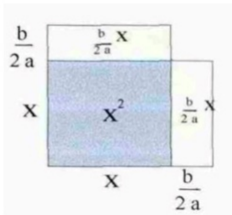
$$
\begin{array}{ll}
ax^2 + bx + c = 0 & (multiplicando\ por\ 4a) \\
4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0 & (manipulando\ termos) \\
4a^2x^2 + 4abx = -\,4ac & (adicionando\ b^2) \\
4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac & (explorando\ o\ produto\ notável) \\
(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac & (extraindo\ a\ raiz\ quadrada\text{: } \sqrt{\ \ }\ ) \\
\sqrt{(2ax + b)^2} = \sqrt{b^2 - 4ac} & (aplicando\ propriedade\ de\ potenciação/radiciação) \\
2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac} & (manipulando\ termos) \\
2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac} & (dividindo\ por\ 2a) \\
x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} &
\end{array}
$$

Etapa 3. Demonstração II – Associação da linguagem algébrica com a interpretação geométrica.

Seja a equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, com a não nulo. Dividimos a equação por a, obtendo: $\frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0$. Em seguida, isolamos o termo independente: $x^2 + \frac{bx}{a} = -\frac{c}{a}$.

Formaremos agora um quadrado com estas figuras, acrescentando a figura que for necessária:

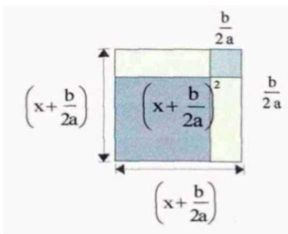




Área: $\frac{b}{2a}.x + \frac{b}{2a}.x + x^2 \rightarrow x^2 + 2.\frac{b}{2a}.x \rightarrow x^2 + \frac{bx}{a}$.

Sabemos que $x^2 + \frac{bx}{a} = -\frac{c}{a}$.

Adicionando $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$, no lado esquerdo da igualdade surge um trinômio quadrado perfeito:



$x^2 + \frac{bx}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \rightarrow x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$

$\rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2} \rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right) = \pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$.

Assim: $x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \rightarrow x = \frac{\left(-b \pm \sqrt{b^2-4ac}\right)}{2a}$.

Anexo II

QUESTIONÁRIO I

1. Explique o que você entende por demonstração.

2. Em seus anos escolares, você já presenciou muitas demonstrações de fórmulas matemáticas?
   - Saberia dizer quantas aproximadamente?
   - Saberia dizer em quais anos escolares você passou por essa experiência?
   - Saberia dizer quando e como foi a primeira vez que você viu uma demonstração?

3. Você gosta de ver o processo argumentativo que embasa as demonstrações? Por quê?

4. Geralmente, quando você participa de alguma demonstração, você entende todo processo que foi exposto? Relate as suas principais facilidades/dificuldades quando vivencia essa experiência.

5. Sobre a questão anterior, como você se sente perante as demonstrações? É permitido marcar mais de uma alternativa.

   ( ) Contente ( ) Bem ( ) Mal ( ) Indiferente

   ( ) Motivado ( ) Desmotivado ( ) Desafiado ( ) Incomodado

   ( ) Curioso ( ) Interessado ( ) Desinteressado

   ( ) Outro. Descreva:

6. Sobre as Questões 5 e 6, você gostaria de escrever a sua opinião sobre tal experiência? Se sim, use esse espaço.

7. A seu ver, é importante que haja demonstrações das fórmulas matemáticas dos conteúdos que você estuda? Ou elas poderiam ser omitidas? Por quê?

8. Você acredita que as demonstrações realizadas para as fórmulas matemáticas podem contribuir para uma melhor compreensão do conteúdo que estiver sendo estudado? Por quê?

Anexo III

QUESTIONÁRIO II

Sobre as demonstrações da fórmula de Bhaskara apresentadas, responda:

1. Você entendeu todos os processos das duas demonstrações?
2. Teve algum momento (durante as demonstrações) que você não entendeu o que foi feito? Qual?
3. Você achou interessante ver como se demonstra essa fórmula? Por quê?
4. A partir da demonstração da fórmula, você se sentiu mais motivado a estudar o conteúdo? Por quê?
5. Qual método apresentado você preferiu? Por quê?
6. Além dos métodos apresentados, se houver algum outro que demonstre a fórmula, você se interessaria em aprendê-lo? Por quê?
7. Você crê que a partir das demonstrações realizadas, o conteúdo estudado pode ser mais bem compreendido?

Sobre as demonstrações da fórmula da soma de *n* termos de uma progressão aritmética responda:

8. Você entendeu todo o processo da demonstração?
9. Teve algum momento (durante as demonstrações) que você não entendeu que foi feito? Qual?
10. Você achou interessante ver como se demonstra essa fórmula? Por quê?
11. A partir da demonstração da fórmula, você se sentiu mais motivado a estudar o conteúdo? Por quê?
12. Qual método apresentado para demonstrar você preferiu? Por quê?
13. Além dos métodos apresentados, se houver algum outro que demonstre a fórmula, você se interessaria em aprendê-lo? Por quê?

Sobre as demonstrações das fórmulas que se referem às progressões geométricas, responda:

14. Você entendeu todo o processo da demonstração?
15. Teve algum momento na demonstração que você não entendeu o que foi feito? Qual?
16. Você achou interessante ver como se demonstra essas fórmulas? Por quê?
17. A partir da demonstração da fórmula, você se sentiu mais motivado a estudar o conteúdo? Por quê?
18. Além dos métodos apresentados, se houver algum outro que demonstre a fórmula, você se interessaria em aprendê-lo? Por quê?

Anexo IV

Roteiro da Entrevista Semiestruturada

- Já foi escrito, mas gostaríamos de saber com as suas palavras, o que você entende por demonstração.

- Você se recorda de ter participado, em seus anos escolares anteriores, de demonstrações matemáticas nas aulas?

- Lembra-se, mais ou menos, de quantas foram?

- Você se lembra em que anos escolares essas experiências ocorreram?

- Você gosta de ver o processo argumentativo que embasa as demonstrações? Por quê?

- Quando você participa de alguma demonstração, você entende todo o processo?

- Quando você entende todo o processo da demonstração, como você se sente?

- Quando você não entende todo o processo da demonstração, como você se sente?

- Quando você vê que o professor irá começar uma demonstração, e, que ele começa a utilizar elementos mais abstratos, como letras, ou conceitos mais formais, qual a sensação que você tem? Se sente assustado (a)? Nervoso (a)? Desinteressado (a)? Interessado (a)? Curioso (a)? Motivado (a)? Fale-nos um pouco das sensações que você costuma sentir.

- Você crê que seja importante mostrar as demonstrações das equações matemáticas na sala de aula? Ou a seu ver, elas poderiam ser omitidas? Por quê?

- Você acredita que a exposição das demonstrações das equações matemáticas contribui para uma melhor compreensão do conteúdo que estiver sendo estudado? Por quê?

Anexo V

Exemplo de Exercício

Como motivação pode-se propor aos alunos um exercício, sem que seja necessário conhecer uma fórmula para solucioná-lo, em que na resolução do mesmo os alunos tenham a oportunidade de vivenciar uma situação de argumentar com raciocínio lógico. Nesse caso, a solução segue de perto a demonstração do caso geral.

Problema:

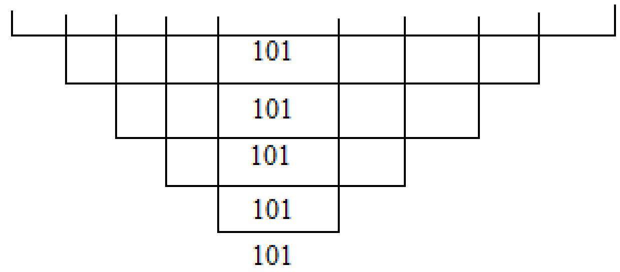
Qual é o resultado da soma dos números naturais de 01 a 100? Ou seja, qual o valor numérico da soma a seguir?

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots + 96 + 97 + 98 + 99 + 100$$

Ideia da Solução:

Somamos o primeiro termo com o último; em seguida o segundo termo com o penúltimo, o terceiro com o antepenúltimo, e procedemos analogamente para os outros termos, percorrendo a lista no sentido do início para o fim e do fim para o início, formando pares de números a serem somados. Assim, teremos:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots + 96 + 97 + 98 + 99 + 100$$



$$\vdots$$

No final desse processo, haverá 50 parcelas iguais a 101, de modo que a soma dos termos da PA correspondente será igual a: $50 \times 101 = 5.050$.

Comentários:

i) O procedimento adotado no exercício segue de perto aquele presente na demonstração clássica de obtenção de uma fórmula geral que fornece a soma dos *n* primeiros termos de uma PA sendo conhecido o último e o primeiro termo da progressão.

ii) A soma dos *n* primeiros termos de uma PA, sendo conhecido o último e o primeiro termo da progressão, é dada por $S_n = \frac{n \times (a_1 + a_n)}{2}$. No caso particular apresentado pelo exercício, escrevemos $S_n = \frac{100 \times (1+100)}{2} = \frac{100 \times 101}{2} = 5.050$.