UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2006, Número 5, páginas 117-120
ISSN: 1815-0640

El rincón de los problemas

Uldarico Malaspina Jurado

Pontificia Universidad Católica del Perú
umalasp@pucp.edu.pe

Problema

¿Cuál es el punto de una parábola que se encuentra más cercano a un punto determinado, en el mismo plano de la parábola?

Para resolver de manera general este interesante problema, pueden usarse los métodos conocidos del cálculo diferencial o los métodos del cálculo de variaciones; sin embargo, considerar casos particulares y no usar herramientas muy fuertes, brinda excelentes oportunidades de aprendizaje, inclusive en el nivel de educación secundaria, manejando criterios de minimización usando desigualdades, y relacionando razonamiento algebraico con observaciones geométricas.

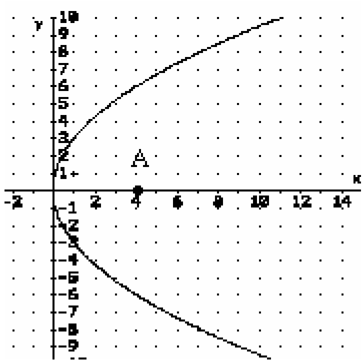
Actividades individuales considerando un caso particular y sin usar derivadas.

1. Hallar el punto de la parábola $y^2 = 9x$ que se encuentra más cercano al punto A de coordenadas (4, 0).

2. Expresar de manera general la distancia más corta de la parábola $y^2 = 9x$ a un punto B de coordenadas (a, 0), siendo a un número real.

Una manera de desarrollar la actividad 1 es la siguiente:

- Esbozar un gráfico de la parábola:



- Calcular el cuadrado de la distancia del punto A(4, 0) a un punto genérico de la parábola P(x, y), teniendo en cuenta que si algún valor de x minimiza d^2, también minimizará d

$$d^2 = (x-4)^2 + (y-0)^2$$
$$= x^2 - 8x + 16 + 9x$$
$$= x^2 + x + 16$$
$$= (x + \tfrac{1}{2})^2 + \frac{63}{4}.$$

En consecuencia, d^2 es siempre mayor o igual que 63/4, y su valor mínimo lo alcanza cuando la expresión $(x + \frac{1}{2})^2$ toma el menor valor posible; es decir, cuando $x = 0$, pues $x \geq 0$.

Así, el valor mínimo de d^2 es 1/ 4 + 63/4 = 16 y por tanto el valor mínimo de la distancia es d = 4.

En conclusión, el punto de la parábola más cercano al punto A(4, 0) es el punto de abscisa x = 0, que es el vértice de la parábola, y la distancia correspondiente es 4.

Pensando la actividad 2

Teniendo en cuenta lo obtenido en la actividad 1, ¿podemos concluir que el punto más cercano de la parábola $y^2 = 9x$ al punto B(a, 0) es su vértice, y que la distancia es a?

El lector está invitado a dar una respuesta a la pregunta, antes de continuar.

- Examinemos otro caso particular:

Distancia de $y^2 = 9x$ al punto Q (10, 0)

$$d^2 = (x-10)^2 + (y-0)^2$$
$$= x^2 - 20x + 100 + 9x$$
$$= x^2 - 11x + 100$$
$$= (x - 11/2)^2 + 279/4$$

Por consiguiente d^2 es mínimo cuando la expresión $(x – 11/2)^2$ toma el menor valor posible; es decir, cuando **$x = 11/2$.**

Así, $d^2 = 279/4$ y entonces $d \approx 8,35$

Vemos así que el punto más cercano de la parábola $y^2 = 9x$ al punto Q(10, 0) **no** es su vértice y la distancia **no** es 10

Es muy importante acompañar esta conclusión algebraica con la observación en el gráfico de la parábola. Tener en cuenta que en el gráfico de este texto, las escalas en los ejes no son las mismas, lo cual crea distorsiones, pero se puede percibir que el punto más cercano de la parábola a un punto del eje de abscisas, no siempre es su vértice.

- Desarrollemos la actividad 2: Haciendo operaciones algebraicas similares a las hechas, considerando el punto B (a, 0), obtenemos

  $d^2 = (x + (9-2\,a)/2)^2 + 9(a – 9/4)$.

Por consiguiente d^2 es mínimo cuando $x = - (9 – 2\,a)/2$;

o sea cuando **$x = a – 9/2$.** El valor mínimo es $d^2 = 9(a – 9/4)$

Como $x \geq 0$, esto se cumple **para $a \geq 9/2$** y entonces, para este caso, la distancia mínima es

$$d = 3\sqrt{a - \frac{9}{4}}\,.$$

Observemos que siendo $x = a – 9/2$, y la ecuación de la parábola $y^2 = 9x$, cuando **$a = 9/2$** se tiene **$x = 0$** y en consecuencia el punto de la parábola que se encuentra a la distancia hallada del punto B(a, 0), es (0, 0), que es el vértice de la parábola. En este caso la distancia hallada es

$$d = 3\sqrt{\frac{9}{2} - \frac{9}{4}} = \frac{9}{2} = a\,.$$

Cuando **$a > 9/2$**, se tiene **$x > 0$** y en consecuencia hay dos valores correspondientes de y, o sea dos puntos de la parábola que están a la distancia d hallada, del punto B(a, 0). Esta conclusión algebraica, es totalmente coherente con la ubicación del punto B(a, 0) en el eje de simetría de la parábola:

- ¿Cómo es la situación si $a < 9/2$?

En tal caso $9 – 2\,a > 0$ y observamos que

$$d^2 = (x - a)^2 + (y - 0)^2$$
$$= x^2 - 2\,a\,x + a^2 + 9x$$
$$= x^2 + (9 - 2\,a)\,x + a^2.$$

Así, d^2 es siempre mayor o igual que a^2 y es mínimo cuando x toma el menor valor posible; es decir cuando **x = 0.** Resulta entonces que el valor mínimo de d^2 es a^2 y en consecuencia el valor mínimo de d es $d = |\,a\,|$.

Observemos también que el valor absoluto tiene pleno sentido geométrico, pues cuando $a < 0$ el punto B(a, 0) se encuentra siempre en la recta que es el eje de simetría de la parábola, pero a la izquierda de la parábola (está en el exterior de la región parabólica) y se percibe fácilmente que el punto más cercano de la parábola es el vértice; en consecuencia la distancia es la longitud del segmento que une B con el origen de coordenadas, que es $|\,a\,|$.

- Resumamos los casos:

- Cuando $a \leq 9/2$, el punto de $y^2 = 9x$ cuya distancia al punto B(a, 0) es mínima es (0, 0) y tal distancia es $d = |\,a\,|$.
- Cuando $a > 9/2$, hay dos puntos de la parábola $y^2 = 9x$ cuya distancia al punto B(a, 0) es mínima:

$$\left(a - 9/2,\ 3\sqrt{a - \frac{9}{2}}\right) \quad \text{y} \quad \left(a - 9/2,\ -\,3\sqrt{a - \frac{9}{2}}\right),$$

y tal distancia es $d = 3\sqrt{a - \frac{9}{4}}$.

Dejamos el caso B(a, b) para entretenimiento de nuestros lectores. Nos encantará considerar sus comentarios o sugerencias en el próximo número.