



“Interpretación matemática” con calculadora gráfica

Agustín Carrillo de Albornoz Torres

*En recuerdo de Franci Puerta,
entusiasta y defensor de la calculadora.*

No es fácil afrontar cambio en el mundo educativo sobre todo si afectan a aspectos relacionados con la metodología con la que los docentes trabajamos en el aula y, menos aún si los cambios requieren la incorporación de nuevos recursos que necesiten una formación previa para conocer sus aspectos técnicos.

En general, al profesorado no le basta con conocer las características de los nuevos recursos, necesitan un periodo no para adaptar el nuevo recurso sino para convencerse de que lo dominan y por tanto pueden incorporarlos al aula.

Incorporar un nuevo recurso, en nuestro caso relacionado con las denominadas “nuevas tecnologías” como es el caso de las calculadoras en su sentido más amplio, aunque en las actividades nos centraremos en las calculadoras gráficas, no supone un cambio automático en la metodología, no basta con adaptar lo que se hace en el aula a este nuevo elemento que en todo caso no debe sustituir a la pizarra sino complementarlo para aprovechar sus posibilidades.

Si estamos convencidos de las ventajas que aportan las calculadoras para la enseñanza de las matemáticas, como es mi caso, podemos preguntar a nuestros compañeros en el centro y comprobaremos que siempre encontraremos a alguien que pondrá una amplia relación de inconvenientes relacionados con su precio (las científicas son baratas), que son complicadas (algunos móviles también lo son), que hacen desaparecer el cálculo mental o que los alumnos con las calculadoras no necesitarán adquirir conocimientos y quizás algunas pegas más que en todo caso no resultará complicado rebatir.

Incorporar la calculadora, en nuestro caso la calculadora gráfica supone cambiar determinados aspectos en el desarrollo de los contenidos sin necesidad de suprimir aquellos que los alumnos deben adquirir, aunque requiere algunos cambios en la forma de trabajo en el aula tanto para el profesorado como para el alumnado.



Las características principales de este tipo de calculadoras están centradas en sus posibilidades gráficas tanto para la representación de funciones como para el estudio estadístico sin olvidar otros aspectos como son el cálculo matricial o la resolución de ecuaciones.

Una actividad habitual en el aula es el estudio y representación de funciones que tradicionalmente comenzamos con la determinación de los apartados correspondientes a dominio, puntos de corte, asíntotas, extremos, crecimiento, etc., hasta llegar a completar los elementos necesarios que nos permitan su representación gráfica; mientras que con ayuda de una calculadora gráfica el proceso cambia, lo primero que se obtiene es la gráfica de la función que facilita al alumno que realmente sabe matemáticas determinar los elementos y características que tiene que obtener de la función cuyo estudio está realizando.

Este cambio en la metodología de trabajo que requiere el uso de las calculadoras no es fácil de asumir y por tanto no resulta sencillo incorporar las calculadoras al aula.

Algo parecido ocurre con otras actividades que podemos denominar habituales en los distintos niveles educativos.

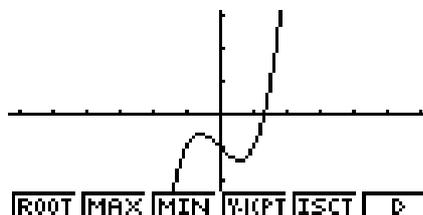
Por ejemplo si proponemos el cálculo de un límite de una función el alumno realizará mecánicamente los procedimientos aprendidos para determinar el valor del límite sin la seguridad de si ha cometido o no algún error y sobre todo, realiza los procesos sin relacionar los cálculos con el significado de lo que ha obtenido. Con la calculadora bastaría con representar la función aprovechando las posibilidades que la máquina le ofrece e interpretar el resultado para determinar o al menos tener una ligera idea de lo que debería obtener al aplicar los mecanismos de cálculo que conoce.

Podríamos citar más ejemplos en los que la utilización de la calculadora ayuda al alumno y por tanto, no evita que conozca procesos tradicionales de cálculo que previamente deberá estudiar y manejar.

Volviendo a la representación de funciones, cualquier calculadora gráfica a partir de la expresión de la función no solo devolverá la gráfica sino que ofrecerá distintas opciones para calcular sus elementos característicos, como podemos observar en las imágenes siguientes, en las que disponemos de un menú para determinar puntos de corte, extremos, intersecciones, etc.



```
Graph Func :Y=  
Y1|X^3-X-1 [---]  
Y2| [---]  
Y3| [---]  
Y4| [---]  
Y5| [---]  
Y6| [---]  
[SEL] [DEL] [TYPE] [STVL] [ZMEM] [DRAW]
```



Aunque resultará fácil obtener la gráfica y determinar los elementos de la gráfica y más aún si disponemos de una calculadora que disponga de cálculo simbólico hay que tener en cuenta algunas consideraciones que exponemos en las actividades que proponemos a continuación.

Actividad 1

A un agente comercial su empresa le propone las dos opciones siguientes para determinar su sueldo mensual.

- Una cantidad fija mensual de 1200 €.
- Una cantidad fija de 500 € mensuales más un 8% de las ventas que realice.

¿Qué opción le interesa más y en qué condiciones?

Este sencillo problema típico de las unidades en las que se estudia la función lineal se podrá resolver con ayuda de la calculadora gráfica, representando las dos funciones, analizando posteriormente las gráficas obtenidas.

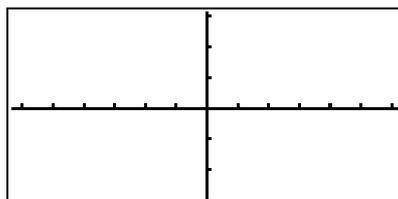
Es evidente que no tratamos de resolver en este trabajo paso a paso las actividades sino que pretendemos ofrecer algunas ideas sobre el uso de la calculadora y las posibilidades que ofrecen.

Una vez introducidas las expresiones de las dos funciones correspondientes a las opciones que la empresa ofrece al agente comercial los alumnos esperan obtener las gráficas para determinar la que más le interesa.

```
Graph Func :Y=  
Y1|1200 [---]  
Y2|500+0.08X [---]  
Y3| [---]  
Y4| [---]  
Y5| [---]  
Y6| [---]  
[SEL] [DEL] [TYPE] [STVL] [ZMEM] [DRAW]
```



Al pulsar la opción para dibujar la gráfica puede ocurrir una pequeña decepción ya que el resultado obtenido es el que aparece representado en la imagen siguiente:



¡No se obtiene nada!

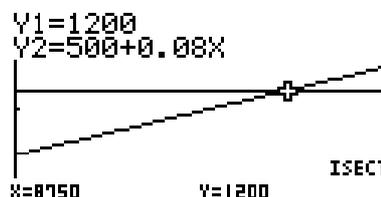
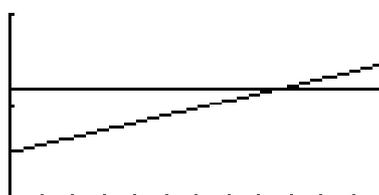
¿Para qué queremos la calculadora sino es capaz de dibujar dos rectas?

Quizás hemos olvidado algo. Hemos olvidado algo tan importante como interpretar el problema para ajustar la pantalla de la calculadora de manera que la representación sea la correcta.

Más que una queja sobre la máquina, ésta nos obliga a comenzar el problema analizando los datos que ofrece; paso que con los métodos tradicionales algunas veces obviamos.

Una vez interpretados los datos y ajustados los valores obtendríamos la representación correcta que no permite averiguar cuál es la opción que más interesa al agente comercial.

```
View Window
Xmin : -1
max : 12000
scale: 1000
dot : 95.2460317
Ymin : -1
max : 2000
[INIT] [TRIG] [STD] [STO] [RCL]
```



A continuación proponemos una nueva actividad en la que al alumno no le bastará con trasladar los resultados al papel, también tendrá que demostrar que conoce y domina el arte de la “interpretación matemática”

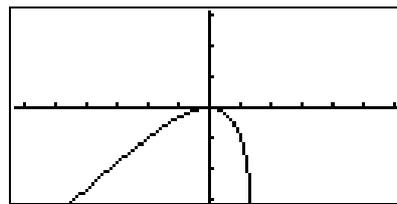
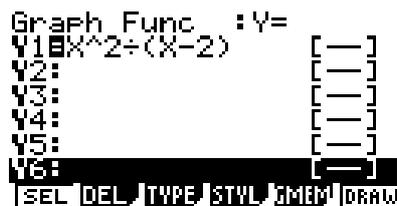


Actividad 2

Estudia y representa la función $f(x) = \frac{x^2}{x-2}$.

Como ya hemos indicado anteriormente, basta introducir la expresión de una función, pulsando a continuación la opción correspondiente para obtener la gráfica y con ayuda de las funciones que ofrece la calculadora determinar, en este caso, los elementos característicos de la función.

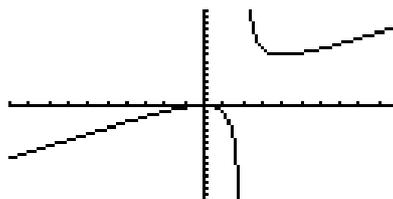
Los dos primeros pasos aparecen en las imágenes siguientes:



De nuevo algo ocurre en la gráfica obtenida que es necesario determinar o al menos averiguar.

Un alumno con conocimientos matemáticos pensará que el dominio de la función es $\mathbb{R} - \{2\}$ y que la recta $x=2$ es una asíntota; por lo que deducirá que le falta un trozo de función, justo la que falta a la derecha de la asíntota vertical.

Por tanto, con sus dotes de “interpretación matemática” deducirá que de nuevo tiene que ajustar los valores de la ventana para que la función se represente de manera correcta como ocurre en la siguiente figura:



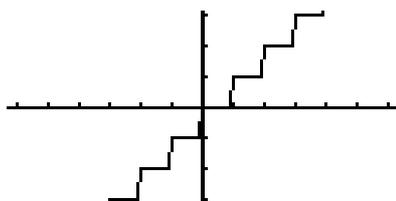


Por último, proponemos dos actividades que ayudarán al desarrollo de la “interpretación matemática” con ayuda de la calculadora en conceptos como la continuidad y la derivabilidad de una función.

Actividad 3.

Estudia y representa la función $f(x) = [x]$.

Ya sabemos representar funciones, por lo que fácilmente obtendremos la imagen siguiente:



No es un error de la calculadora ya que las tareas de representación se realizan por aproximación al igual que lo hacen otros programas de cálculo simbólico.

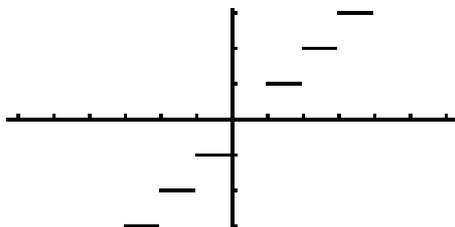
De nuevo, es necesario interpretar y determinar que esta función no es continua y por tanto, algo hay que cambiar como paso previo a su representación.

Modificando la opción de representación para evitar que conecte los puntos

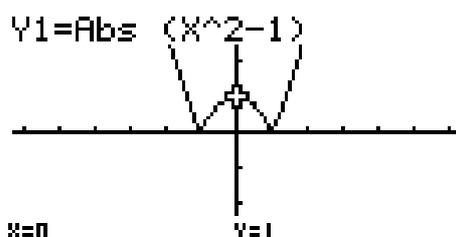
```
Draw Type :Connect
Graph Func :On
Dual Screen :Off
Simul Graph :Off
Derivative :Off
Background :None
Sketch Line :Norm ↓
[Con] [Plot]
```

```
Draw Type :Plot
Graph Func :On
Dual Screen :Off
Simul Graph :Off
Derivative :Off
Background :None
Sketch Line :Norm ↓
[Con] [Plot]
```

obtendremos la representación correcta para estudiar la función *parte entera*.



Cuando el alumno domine la “interpretación matemática” será capaz, sin realizar los cálculos necesarios, de determinar puntos de discontinuidad o puntos en lo que una función no es derivable como ocurre en la gráfica que aparece a continuación:



Para terminar, destacar que lo único que hemos pretendido con estas sencillas actividades ha sido destacar que la calculadora no sustituye a ningún otro recurso sino que sirve como complemento a la enseñanza que estamos habituados a realizar, merece la pena su uso en el aula y sobre todo sería un error que no aprovecháremos las posibilidades que ofrece.

Recomiendo la lectura de la declaración a favor de las calculadoras en los distintos niveles educativos realizada por la National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) cuyos “**Estándares y principios para la educación matemática**” han sido traducidos al castellano y editados por la SAEM THALES.

<http://www.eduteka.org/DeclaracionCalculadoras.php>

Por último indicar que hemos utilizado una calculadora gráfica **CASIO FX9860G** que no dispone de cálculo simbólico aunque incluye otras aplicaciones como la de geometría dinámica que aumentan aún más las posibilidades que ofrece.

Agustín Carrillo de Albornoz Torres, IES Jándula de Andujar. Jaén. España