UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2006, Número 7, páginas 89-93
ISSN: 1815-0640

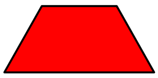
El rincón de los problemas

Uldarico Malaspina Jurado
Pontificia Universidad Católica del Perú
umalasp@pucp.edu.pe

Problema[1]

Determinar la función que establece el perímetro del polígono convexo formado con **n** trapecios, siendo los trapecios tomados de los “bloques de Cuisenaire”.

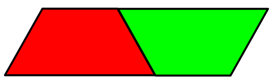
Para examinar este problema, familiaricémonos con el material de trabajo: un trapecio de estos (o mejor, un bloque o ficha con forma de trapecio) es isósceles, con lados no paralelos de la misma longitud que la base menor, y con la base mayor de longitud el doble de la longitud de la base menor:

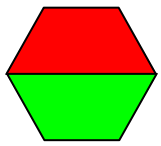


Para facilitar el análisis, podemos asumir que la base menor y los lados no paralelos miden una unidad y que en consecuencia el perímetro de este trapecio es 5. Cuando en este artículo hagamos mención a un trapecio, será a uno de estas características, que podemos llamarlo “trapecio básico”.

Tal como está planteado, el problema no tiene solución, pues existen valores de n para los cuales hay varios polígonos convexos que se pueden construir con n de estos trapecios básicos, y con diferentes perímetros. Por ejemplo,

$n = 2$





Podemos ver que estos dos polígonos convexos, construidos con dos trapecios, tienen perímetros diferentes: 8 y 6, respectivamente. Algo similar ocurre para otros valores de n, lo cual es incompatible con el concepto de función y en consecuencia no se puede construir una función cuyo dominio sea el número de trapecios y cuyo rango sea el perímetro del polígono convexo construido. Es un

[1] Este problema me lo propuso Guillermo Liu, ex alumno de la maestría en enseñanza de la matemática de la PUCP.

interesante problema lúdico-matemático, verificar que algo similar ocurre para otros valores de n (¿Para todos?)

Así, proponemos el siguiente **rompecabezas**:

*Construir con 10 trapecios, tres polígonos convexos que tengan perímetros dif*erentes

Una solución, dada por Guillermo Liu, la encontrarán al final del artículo y queda como problema adicional examinar si tal solución es la única.

Una primera solución al problema original

Debemos establecer algunas restricciones en la construcción para de esa manera construir un polígono convexo único con n trapecios y en consecuencia poder definir una función.

Una posibilidad es la que llamaremos “construcción trivial”: colocar los n trapecios en una sola fila, como lo mostramos para n = 2 (El paralelogramo de perímetro 8). Así obtendremos un paralelogramo cuando n es par y un trapecio cuando n es impar, y podemos construir una tabla que nos muestre los perímetros que corresponden al número de trapecios básicos usados en la construcción del polígono convexo (paralelogramo o trapecio), para algunos valores de n:

Número de trapecios (*n*)	1	2	3	4	5	6	7
Perímetro P(*n*)	5	8	11	14	17	20	23

Para obtener una expresión general de P(n), podemos hacerlo algebraicamente, partiendo de la observación de los 7 primeros términos de la sucesión:

$$P(n) = 5 + 3(n-1)$$

Y en consecuencia

$$\mathbf{P(n) = 3n + 2}$$

Pero es aún más interesante, obtener la expresión general como consecuencia de las observaciones al construir los polígonos convexos:

Teniendo en cuenta que cada trapecio básico tiene perímetro 5, al añadir uno de estos a un polígono convexo ya formado, se están añadiendo 5 unidades a tal polígono, pero se deben restar 2 unidades por ser las que “se pegan” y ya no quedan en el borde del nuevo polígono convexo. En consecuencia, sólo se añaden 3 unidades y se tiene la siguiente expresión recursiva de la sucesión de perímetros:

$$P(1) = 5; \qquad P(n) = P(n-1) + 3, \qquad \text{para } n > 1$$

Si se explicitan los primeros términos de esta sucesión, obtendremos los mismos valores que los de la tabla, pero ahora hay un razonamiento algebraico-geométrico que lo fundamenta. Para ser rigurosos en la obtención de la expresión general de P(n) puede resolverse la ecuación en diferencias de primer orden, dada en la expresión recursiva. Así obtendremos también:

$$\mathbf{P(n) = 3n + 2}$$

Veamos ahora cómo obtener esta expresión continuando el razonamiento algebraico-geométrico al hacer las construcciones:

Si usamos n trapecios básicos, tendremos **5n** lados, pero el perímetro del polígono convexo que construyamos tendrá como perímetro **5n** menos los lados que “se pegan” y dejan de estar en el borde. Como al usar **n** trapecios se hacen **n – 1** “pegados”, a **5n** debemos restar **2(n – 1)** y en consecuencia:

$$P(n) = 5n - 2\,(n - 1)$$

O sea

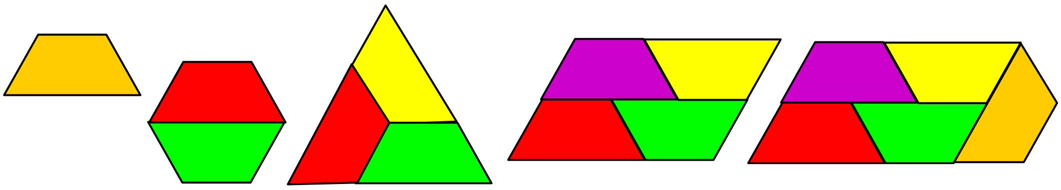
$$\mathbf{P(n) = 3n + 2}$$

Una solución no trivial

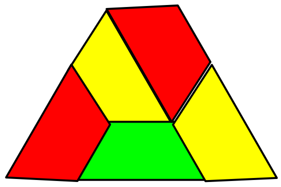
Resulta más interesante aún encontrar una solución “no trivial” para obtener la función perímetro, teniendo como variable independiente el número de trapecios básicos empleado en la construcción, y con ese propósito establecemos las siguientes restricciones para la colocación de los trapecios básicos al construir los polígonos convexos:

1. No deben estar ubicados todos en una sola fila, salvo el caso n = 1 (descartamos la solución trivial, para n > 1).
2. Deben estar ubicados a lo más en dos filas.
3. Para n > 4 todos los polígonos convexos deben tener como una parte incluida uno o más paralelogramos similares al correspondiente a n = 4
(Para n = 4, el polígono convexo es un paralelogramo de perímetro 10)

Así se va obteniendo una sucesión de polígonos convexos, cuyos 5 primeros términos son:



Observemos que con 5 trapecios también se puede formar el polígono convexo que se muestra, pero éste no contiene el paralelogramo formado con 4 trapecios (incumple la regla 3). Más adelante, al relacionar estas construcciones con el concepto de función y la aritmética módulo 4 se verá la importancia de esta restricción.



Al registrar los perímetros P(n) de los polígonos convexos que se construyen con n trapecios básicos con las reglas establecidas, tenemos una tabla como la siguiente:

Número de trapecios (*n*)	1	2	3	4	5	6
Perímetro P(*n*)	5	6	9	10	11	12

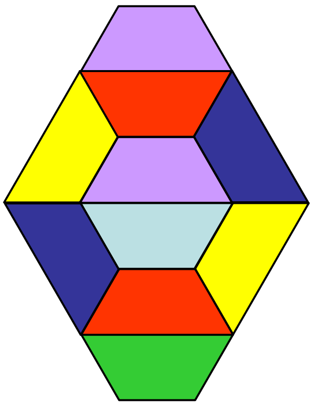
Es interesante obtener experimentalmente P(n), primero para valores de n como 7, 8, 15 y luego para valores más grandes de n (35, 58, 321). Esto lleva a pasar de una fase meramente manipulativa y concreta a la búsqueda de regularidad y generalizaciones.

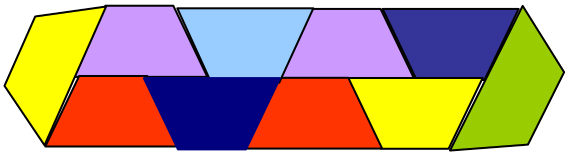
Encontrar una expresión general de P(n) lleva a examinar las secuencias que se forman, relacionando mucho pensamiento geométrico y algebraico, en especial con la aritmética módulo 4. Es un ejercicio interesante para los lectores verificar que la función buscada es la siguiente

$$P(n)=\begin{cases}\dfrac{3n+8}{2} & si \quad n=4k \qquad \text{k=1,2,3,...}\\[2mm] \dfrac{3\text{n}+7}{2} & si \quad n=4k+1 \quad k=0,1,2,3,...\\[2mm] \dfrac{3n+6}{2} & si \quad n=4k+2 \quad k=0,1,2,3,...\\[2mm] n+6 & \text{si} \quad n=4k+3 \quad k=0,1,2,3,...\end{cases}$$

La situación lúdica con los trapecios, permite plantear numerosos e interesantes problemas, antes y después de haber llegado a este nivel de formalización.

Una solución del rompecabezas:





El tercer polígono convexo, se obtiene haciendo la construcción trivial: un paralelogramo de 10 trapecios básicos, todos en una sola fila.