

La proyección estereográfica... sicut in caelo et in terra

Juan Antonio García Cruz

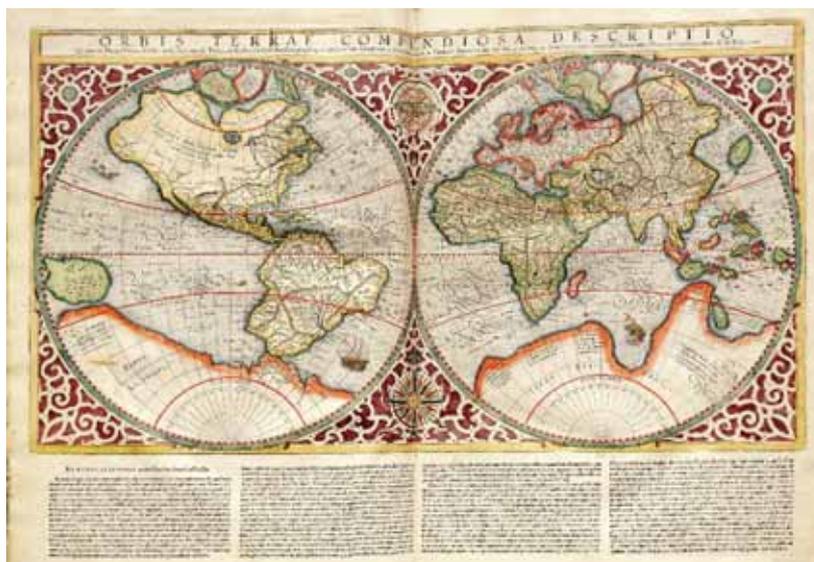
Resumen

Bien conocida desde la antigüedad, fue durante el Renacimiento cuando la proyección estereográfica adquirió su papel predominante como procedimiento matemático para la construcción de planisferios. Este artículo es una mezcla de historia de la cartografía y matemática elemental. Se abordan los modos polar y meridiana de la proyección estereográfica. Finalmente, se incluyen algunas demostraciones matemáticas relacionadas.

Abstract

Stereographic projection was well known from early times but it is during the Renaissance when plays a predominant role as a mathematical projections for the construction of planiglobes. This paper is a mix of history of cartography and elementary mathematics. It is mainly concerned with two modes of the stereographic projection: polar and meridional. Finally some related mathematic proofs are provided.

En 1595, un año después de la muerte de su padre, Rumold Mercator hijo y heredero de la tradición cartográfica de Gerard Mercator (1512-1594), publica la obra póstuma de su progenitor: *Atlantis Geographia Nova Totius Mundi*. Esta magna obra contiene un mapamundi en proyección estereográfica meridiana que inicia el camino triunfal, de esta proyección, hacia una de las más importantes en la historia de la cartografía y, sin duda, una de las más utilizadas, pues así lo fue durante los siglos XVII al XVIII.



(Fig. 1: *Orbis Terrae...*, R. Mercator, 1587)

Orbis Terrae Compendiosa Descriptio, cuyo autor es Rumold Mercator y tiene fecha de 1587, inaugura una forma novedosa de presentar los nuevos descubrimientos geográficos. Resaltando además la redondez de la Tierra, al mostrar una imagen compuesta por dos hemisferios circulares tangentes y surcados por arcos de circunferencia que representan los meridianos y paralelos terrestres. Debió parecerle tan diferente a lo utilizado habitualmente que, el mismo Rumold, se vio obligado a justificar la elección de esta proyección y añadió las siguientes palabras a su presentación: “Sciet lector nos eam complanandae sphaerae rationem secutos esse, quam Gemma Frisius in suo Planisphaerio adiuvenit, quae omnium longe optima est”¹. Como veremos hay mucho de razón en la afirmación de Rumold sobre la mejor forma de representar la esfera sobre un plano a través de la proyección estereográfica.

Superadas las limitaciones impuestas por la autoridad de Ptolomeo al uso de las proyecciones descritas en su *Geographia*, el siglo XVI vio el nacimiento y desarrollo de varias representaciones que enfatizaban, sobre todo, la redondez de la Tierra. Para que el lector adquiriera una perspectiva de la proyección estereográfica, hemos elegido tres proyecciones no estereográficas importantes durante el siglo XVI. Las dos últimas fueron publicadas en dos obras de amplia circulación debido al auge y desarrollo de la imprenta. Además, estas dos tienen a favor el sugerir la redondez de la Tierra, pero todas tienen en contra la distorsión tanto en la forma de los continentes, como en las distancias y en las posiciones relativas o ángulos entre los distintos puntos geográficos.



(Fig. 2: Segunda proyección de Ptolomeo. *Geographia*, varias ediciones siglo XV y XVI)

¹ Sabio lector, hemos aplanado la esfera según el razonamiento expuesto por Gemma Frisius en su Planisferio, que con mucho es el mejor.



(Fig. 3: Proyección Cordiforme. Orontius Finaeus Delphinus ca.1536)



(Fig. 4: Proyección Oval. Theatrum Orbis Terrarum. A. Ortelius. Leiden, 1570)

La *Geographia* de Claudio Ptolomeo fue la obra cartográfica más importante de la civilización greco-latina que ha llegado hasta nuestros días. Recuperada y reconstruida durante el siglo XV tuvo numerosas ediciones, que incorporaron información geográfica actualizada, y se publicó hasta bien entrado el siglo XVIII. El *Theatrum Orbis Terrarum* de Abraham Ortelius fue el primer atlas con el que el siglo

XVI se liberó de la autoridad de C. Ptolomeo e inauguró la nueva cartografía que va a ser dominante hasta la llegada del siglo de las luces y el nacimiento de la cartografía científica. La proyección cordiforme es una invención matemática del siglo XVI, debida a Johannes Stabius (muerto en 1522), profesor de matemáticas en Viena, y fue dada a conocer por primera vez por otro importante matemático y geógrafo del siglo XVI, Orontius Finæus (1494-1556).

La proyección de la esfera sobre el plano

La representación sistemática de parte o toda la superficie de un sólido “redondo”, especialmente la Tierra, en un plano se llama proyección. Sin embargo, no es posible representar la superficie de la Tierra sobre un plano, sin que se produzca algún tipo de distorsión. Durante los últimos dos mil años se han producido más de cien tipos distintos de proyecciones. Cada proyección tiene sus características particulares y proporciona, en consecuencia, una imagen diferente de la Tierra. Todas muestran distorsión, pues todas deforman la imagen de los continentes. Todas también sesgan la distancia o la dirección entre dos lugares. Elegir una proyección no es una tarea simple, es cuestión de encontrar una, la que mejor encaje con el propósito del mapa.

Este trabajo no es una exposición sistemática de las diferentes proyecciones, ni siquiera un estudio exhaustivo de una en particular. Pretendemos introducir al lector en un campo interdisciplinar que aúna, entre otras, las disciplinas de Historia, Geografía y Matemáticas. Con ese fin, hemos elegido una de las más importantes proyecciones de todos los tiempos, la proyección azimutal estereográfica. Pues, aunque conocida en su versión estelar desde la lejana antigüedad, es en el Renacimiento y sobre todo a finales del siglo XVI y comienzos del XVII cuando se convierte en la proyección más utilizada para representar la imagen de la Tierra, y por ende de los descubrimientos geográficos que tiene lugar durante esa época, tan importante para la historia y expansión de la civilización occidental.

En la proyección acimutal estereográfica la esfera terrestre se proyecta sobre un plano tangente a la misma. El punto de tangencia determina el modo o aspecto de la proyección. Si el punto de tangencia es un polo se denomina *estereográfica polar*; si es un punto sobre el ecuador, se denomina *estereográfica meridiana* o *ecuatorial* y si es cualquier otro punto sobre la esfera distinto de los anteriores, se denomina *estereográfica horizontal* u *oblicua*. El término estéreo proviene del griego στερεο, cuyo significado es sólido. Calificar con el término sólido a una proyección tiene por principal objetivo, contraponer a la concepción plana de la superficie terrestre la solidez redonda. De hecho, esta proyección empezó a utilizarse ampliamente una vez establecida y aceptada, sin lugar a dudas, la esfericidad del planeta Tierra.



(Fig. 5: Proyecciones estereográficas polar, meridiana y horizontal)

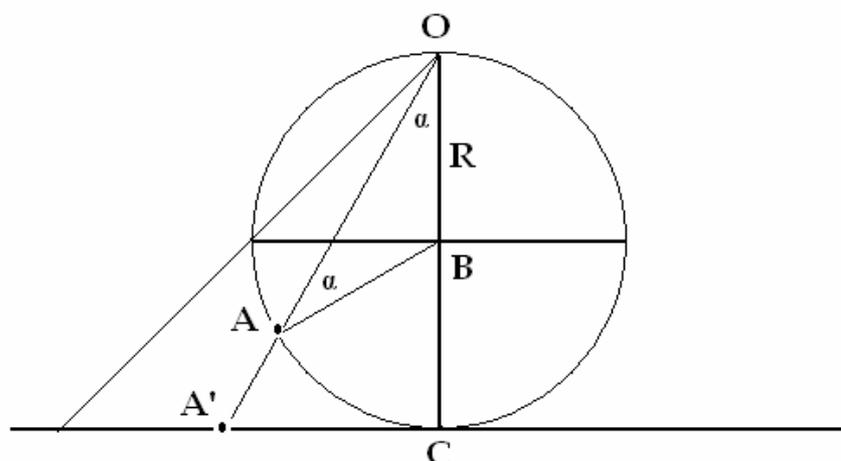
Propiedades matemáticas de la proyección estereográfica

Mediante la proyección estereográfica, cada punto sobre la esfera se proyecta en un plano tangente a la misma y diametralmente opuesto al punto del observador, llamado vértice de proyección. El punto sobre el plano resulta de la intersección de este plano con una recta que contiene al vértice de proyección y al punto sobre la esfera.

Veamos que la proyección estereográfica es una inversión.

Una inversión es una transformación en el espacio que hace corresponder a un punto A , otro punto A' , alineados ambos con un punto O llamado centro de inversión, tal que: $\overline{OA} \times \overline{OA'} = K$, donde K es un número real, que se conoce como potencia de inversión.

A continuación demostraremos que toda proyección estereográfica es una inversión.



(Fig. 6)

Sea O el punto del observador, vértice de la proyección, puede ser el polo o cualquier otro punto. Sea A' la proyección sobre el plano del punto A, situado sobre la esfera.

El triángulo ABO es isósceles.

Tenemos, $AB=OB=R$ (radio de la esfera) y $\frac{\overline{OA}}{\text{sen}(180^\circ-2\alpha)} = \frac{R}{\text{sen}\alpha}$.

De esta última relación tenemos que $\overline{OA} = 2R \cos \alpha$.

Por otro lado, en el triángulo OCA', tenemos que $\overline{OA'} = \frac{2R}{\cos \alpha}$.

De ambas expresiones se concluye que $\overline{OA} \times \overline{OA'} = (2R)^2$.

Esta última relación prueba que la proyección estereográfica es una inversión, de polo el vértice de la proyección y potencia el cuadrado del diámetro de la esfera proyectada.

Como inversión que es, la proyección estereográfica comparte las propiedades de esta transformación. Así, tenemos que:

La transformada de una circunferencia que pasa por el centro de inversión es una recta y la de una circunferencia que no pasa por el centro de inversión es otra circunferencia.

Estas dos propiedades nos confirman lo que vemos en los planisferios anteriores (Fig. 5) donde, en la proyección estereográfica meridiana, el ecuador terrestre y el meridiano que pasa por el vértice de la proyección se transforman en dos líneas rectas en el plano. También observamos que cada círculo máximo sobre la esfera terrestre, no ecuatorial, tiene como transformado una circunferencia sobre el plano.

Pero hay una propiedad matemática que es de capital importancia para la proyección estereográfica:

En toda inversión, el ángulo entre dos curvas es igual en valor absoluto al de sus inversas y de sentido contrario.

Luego, la proyección estereográfica conserva los ángulos (proyección conforme). Esta es la razón por la que la proyección muestra sin distorsión los elementos infinitesimales, forma y ángulos, aunque en el caso de regiones mayores se muestre distorsión en la forma.

Esta propiedad fue notada, por primera vez, por el astrónomo y matemático Edmond Halley (1656-1742), quien en una memoria publicada en 1695-96 en las *Philosophical Transactions*, escribió:

“En la proyección estereográfica, los ángulos bajo los cuales los círculos se intersectan, los unos con los otros, son en todos los casos iguales a los ángulos esféricos que representan; lo cual es quizás una propiedad tan valiosa como la de que todos los círculos de la esfera parezcan círculos en ella (la proyección); pero esto, no siendo comúnmente conocido, no debe asumirse sin demostración”.

Esta propiedad es la que hizo de la proyección estereográfica una de las preferidas por los cartógrafos de los siglos XVI al XVIII, pues muestra la imagen de la Tierra con moderada distorsión, al conservar los ángulos.

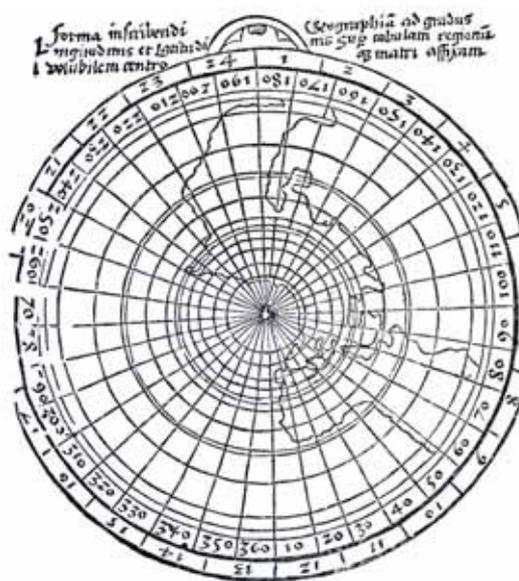
Proyección estereográfica polar

En su forma más simple, *proyección estereográfica polar*, fue conocida desde la antigüedad clásica. Ptolomeo le dedicó un tratado titulado *Sphaera a planetis projectio in planum*, texto cuyo original griego se ha perdido pero que ha llegado a nuestros días en su versión árabe. El hispano Maslama ben Ahmed al-Majriti (muerto en Córdoba en 1007 ó 1008) lo tradujo del griego al árabe y dicha traducción fue utilizada por Hermannus Secundus para realizar la versión latina en el siglo XII. Apareció por primera vez impresa como un apéndice a la *Geographia* de Ptolomeo publicada en Roma en 1507 y editada por Marcus Beneventanus, con el título *Planisphaerium Ptholemaei*. Fue utilizada por A. Dürer en uno de los primeros atlas estelares impresos, *Imagines coeli septentrionales cum duodecim imaginibus zodiaci* (Fig. 7), publicado en 1515.

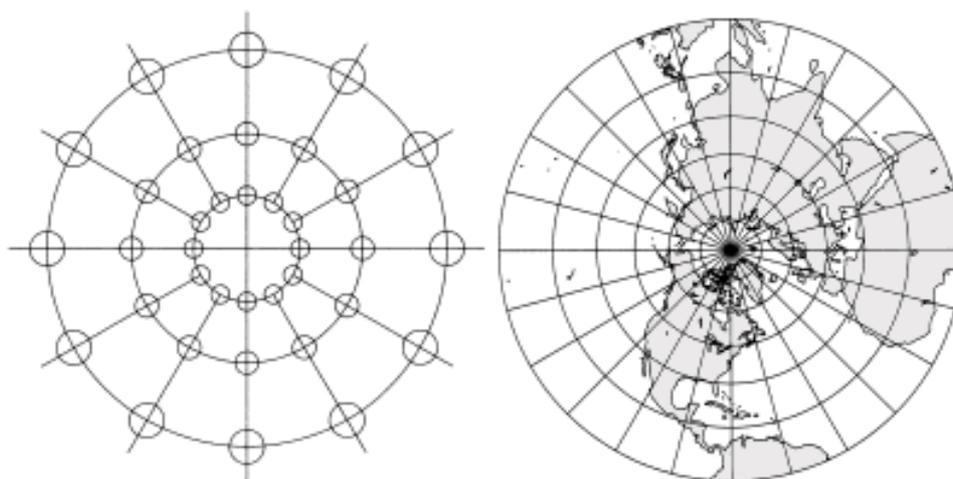


(Fig. 7)

También fue incorporada por Gregor Reisch (ca. 1470-1525) en su famosa enciclopedia de principios del siglo XVI, *Margarita Philosophica nova* (Estrasburgo, 1512). La Fig. 8 muestra los elementos básicos de este modo de la proyección estereográfica: Vértice de la proyección el Polo Sur, opuesto al centro del mapa que se sitúa en el Polo Norte; los meridianos son, al pasar por el vértice de la proyección, líneas rectas que irradian del Polo Norte; los paralelos son circunferencias concéntricas.



(Fig.8: Grabado de Margarita Philosophica nova)

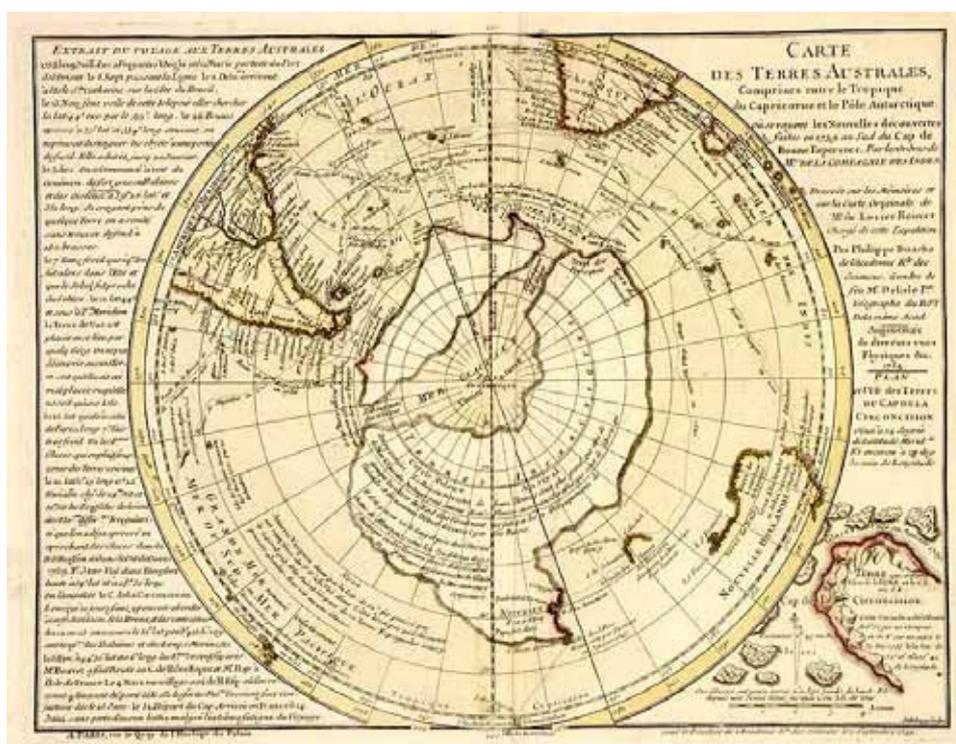


(Fig.9: Indicatrix de Tissot para la Proyección estereográfica polar)

Los meridianos se muestran como líneas rectas igualmente espaciadas que se cortan en el polo. Los ángulos entre ellos corresponden, en la proyección, con los valores reales sobre la esfera terrestre (proyección conforme). Los paralelos son círculos desigualmente espaciados centrados en el polo. El espaciado aumenta según nos alejamos del polo (Fig. 9), aumentando de esta forma la distorsión en la

forma y las distancias como muestra la indicatrix de Tissot² para esta proyección de 30° de espaciado reticular. El ecuador se muestra mediante la circunferencia más alejada del polo, frontera de la proyección. La distorsión es moderada hasta los 30 grados de latitud norte, a partir de ahí, aumenta esta hacia el ecuador. Debido al aumento de la distorsión con la lejanía del polo, no se suele proyectar más allá del ecuador para cada hemisferio.

Suele utilizarse para representar la imagen de los hemisferios centrada en los polos y, sobre todo, la imagen de las regiones polares. Cuando la representación se restringe a estas, se obtienen imágenes con muy moderada distorsión en forma y distancia. Philippe Bauche utilizó esta proyección (Fig. 10) para su famosa *Carte des Terres Australes* (1754), que representa la región austral comprendida entre el trópico de capricornio y el polo sur, región de moderada distorsión. Observamos la imagen de la Antártica como un continente dividido y el comienzo del trazado del continente Australiano todavía en fase de descubrimiento y exploración. Este mapa es una prueba del uso tan extendido que se hizo de esta proyección hasta bien entrado el siglo XVIII.

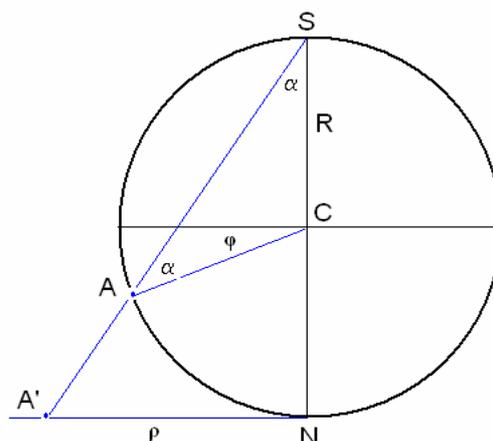


(Fig. 10: Carte des Terres Australes, P. Bauche, 1754)

² Esta herramienta fue desarrollada por Auguste Nicolas Tissot en un artículo publicado en 1859 en *Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences*. La indicatrix destaca propiedades de la proyección en un punto, mostrando como se distorsionan los atributos de ángulo, distancia y área. Emplea un código visual sencillo basado en círculos, elipses y segmentos rectilíneos. Cualquier círculo pequeño sobre la esfera o el elipsoide que representa a la Tierra, se transforma en un círculo o elipse plana centrada en el punto homólogo equivalente. Si se representan varios de estos círculos en diferentes localizaciones del mapa, utilizando el mismo radio para cada círculo correspondiente del globo terrestre, entonces la distorsión en cualquier punto del mapa se muestra por medio del tamaño y forma del círculo o elipse. Así, cuanto más próxima sea la imagen a un círculo corresponde menor distorsión en la forma y la distorsión en las distancias se indica por el aumento del tamaño del círculo o elipse en la representación.

Coordenadas de la proyección estereográfica polar

La proyección estereográfica polar transforma el punto A sobre la esfera de coordenadas (λ, φ) ³ en un punto sobre el plano A' de coordenadas (x, y) . Sea R el radio de la esfera.



(Fig. 11)

Dado que el triángulo ACS es isósceles, se tiene que $\alpha = \frac{90^\circ - \varphi}{2}$.

Todos los puntos sobre la esfera que comparten latitud con A están sobre una circunferencia, cuya proyección es otra circunferencia plana de radio ρ .

De la figura 10 se sigue que $\rho = 2R \operatorname{tg}\left(\frac{90^\circ - \varphi}{2}\right)$.

Una vez situados los puntos sobre el plano de proyección, las coordenadas de cada punto del mismo dependen del radio ρ y de la longitud λ , según las expresiones:

$$\begin{cases} x = 2R \operatorname{tg}\left(\frac{90^\circ - \varphi}{2}\right) \operatorname{sen} \lambda \\ y = -2R \operatorname{tg}\left(\frac{90^\circ - \varphi}{2}\right) \operatorname{cos} \lambda \end{cases}$$

Estas fórmulas nos indican que el radio del círculo de proyección depende de la latitud φ , y que además esa dependencia se verifica a través de la función $\operatorname{tg}\left(\frac{90^\circ - \varphi}{2}\right)$.

³ Logitud y latitud, respectivamente.

Este hecho lo utilizaremos en el siguiente apartado para justificar matemáticamente la representación de la proyección estereográfica polar, según un procedimiento muy extendido durante el siglo XVII.

Construcción de la proyección estereográfica polar

Bernadus Varenius (1621-1650), aunque de origen alemán, está considerado como uno de los más importantes científicos holandeses del siglo XVII. Estudió en Leyden donde se licenció en Medicina en 1648. También estudió matemáticas bajo la supervisión de Willebrord Snellius que fue discípulo de Simon Stevin. En su obra *Geographia Generalis* muestra su inclinación hacia la ciencia moderna, cosmología de Copérnico, y hacia una precisa formulación matemática de los problemas geográficos. Consideró a la Geografía como parte de la Matemática: *Geographia dicitur scientia Matematica mixta*⁴.... Esta concepción fundamentalmente cuantitativa y teórica de la Geografía, exposición sistemática de los conceptos y propiedades mediante el canón euclídeo de definiciones y proposiciones, sea quizás lo que atrajo la atención de Isaac Newton quien consideró a la obra de Varenius como la más importante obra geográfica de su tiempo y realizó una nueva edición latina en Cambridge, en 1672, a la que añadió nuevos datos. Destacamos que esta fue la primera publicación de Isaac Newton. De los ocho métodos para trazar *las cartas geográficas universales*, que presenta la obra original de Varenius en el capítulo XXXII, los dos primeros corresponden a la proyección estereográfica en sus versiones polar y meridiana, dedicando el último a la versión horizontal de la misma proyección.

A continuación transcribo el método expuesto⁵ por Bernadus Varenius para el trazado de la proyección estereográfica polar.

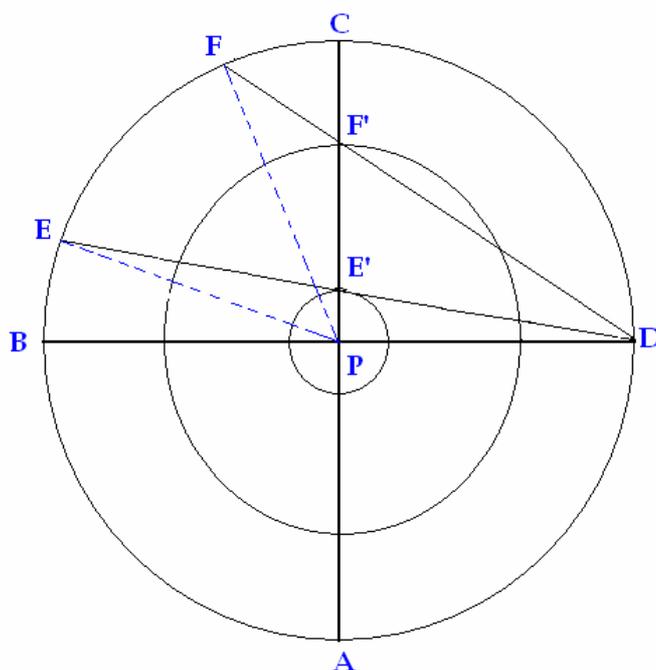
“En cualquier pieza plana o papel, tómesese el punto P por el Polo, y con él como *Centre*, trácese la *Periphery* (circunferencia) grande o pequeña que corresponderá con el *Æquator*. Estos dos se pueden tomar a gusto, mientras que los otros puntos y *Peripheries* han de hallarse a partir de estos. Dividamos el *Æquator* en 360 *grados* y tracemos líneas rectas desde el *Centre* a cualquiera de estos *grados*, estos serán los Meridianos, de los que aquel trazado al comienzo del primer *grado* de los 360, será tomado como el primero, así el resto de las líneas mostrarán el resto de los Meridianos y *Longitudes* de la Tierra a partir del primer Meridiano. Ahora trazaremos los Paralelos de *Latitud*. Tenemos cuatro *Quadrantes*, o cuartos de *Æquator*, el primero 0, 90; el segundo 90, 180; el tercero 180, 270; y el cuarto 270, 0. Denotemos cada uno de ellos por medio del par de letras AB, BC, CD, DA, y tomemos uno de esos, por ejemplo el BC, de cada uno de sus *grados* y también de los 23 *grados*. 30

⁴ La Geografía es una ciencia Matemática mixta...

⁵ He traducido el procedimiento, de la versión inglesa publicada por Isaac Newton, que aparece íntegramente en Snyder (1993), respetando el estilo de la exposición que mezcla términos latinos y griegos latinizados, con vocablos de la lengua inglesa, en nuestro caso del castellano. Lo hemos hecho así, pues esto es una muestra de una época, no tan lejana, en la que el inglés no era todavía lengua científica y pedía prestado del latín y de otras lenguas, como el griego, los términos de vocabulario científico que necesitaba.

minutos y los 66 grados. 30 minutos, tracemos rectas hasta el punto D, (término del *Diámetro* BD) apliquemos la regla sólo a D y llevémosla a cada *grado* del *Quadrante* BC: y denotemos cada punto en los que esas rectas cortan al *Semidiámetro* PC, y con P como *Centre* describamos las *Peripheries* que pasan por cada uno de esos puntos sobre PC. Tales *Peripheries* serán los Paralelos de *Latitud* en los que situaremos números desde el *Æquator* hasta el punto P, en sucesión 1, 2, 3,... 90; tanto en el primer Meridiano AP como en su opuesto CP”.

Analicemos la construcción anterior mediante el dibujo de la Fig.12.



(Fig. 12)

He utilizado las mismas letras que en la explicación de Varenius, pero añadiendo cuatro puntos (E, F, E' y F') y dos líneas de puntos auxiliares. Recordemos que ABCD corresponde con el ecuador y P con el Polo. Sean los ángulos BPE y BPF complementarios. La unión de E con D determina sobre CP el punto E' por el que se traza el círculo con centro en P que pasa por E'. De la misma forma la unión de F con D determina sobre CP el punto F' por el que se traza el círculo con centro en P que pasa por F'. Si $BPE = (90^\circ - \varphi)$, entonces el paralelo que pasa por E' está a la latitud φ . Recordemos que la numeración, asignación de latitud a los paralelos, se hace desde C a P (corresponde a la marca C la latitud 0° y a la P la latitud 90°).

El ángulo BPE es igual a dos veces el ángulo BDE, pues el primero es un ángulo central y el segundo es un ángulo inscrito en la circunferencia y ambos abarcan el mismo arco BE.

Luego el ángulo $BDE = (90^\circ - \varphi)/2$.

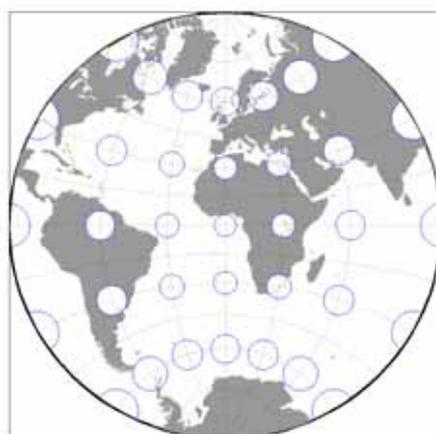
Se tiene que $PE' = tg \frac{90^\circ - \varphi}{2}$.

Concluimos que el punto E' está sobre el círculo de centro P y radio $tg \frac{90^\circ - \varphi}{2}$.

Con esto demostramos que el dibujo de Varenius corresponde con la proyección estereográfica polar.

Proyección estereográfica meridiana

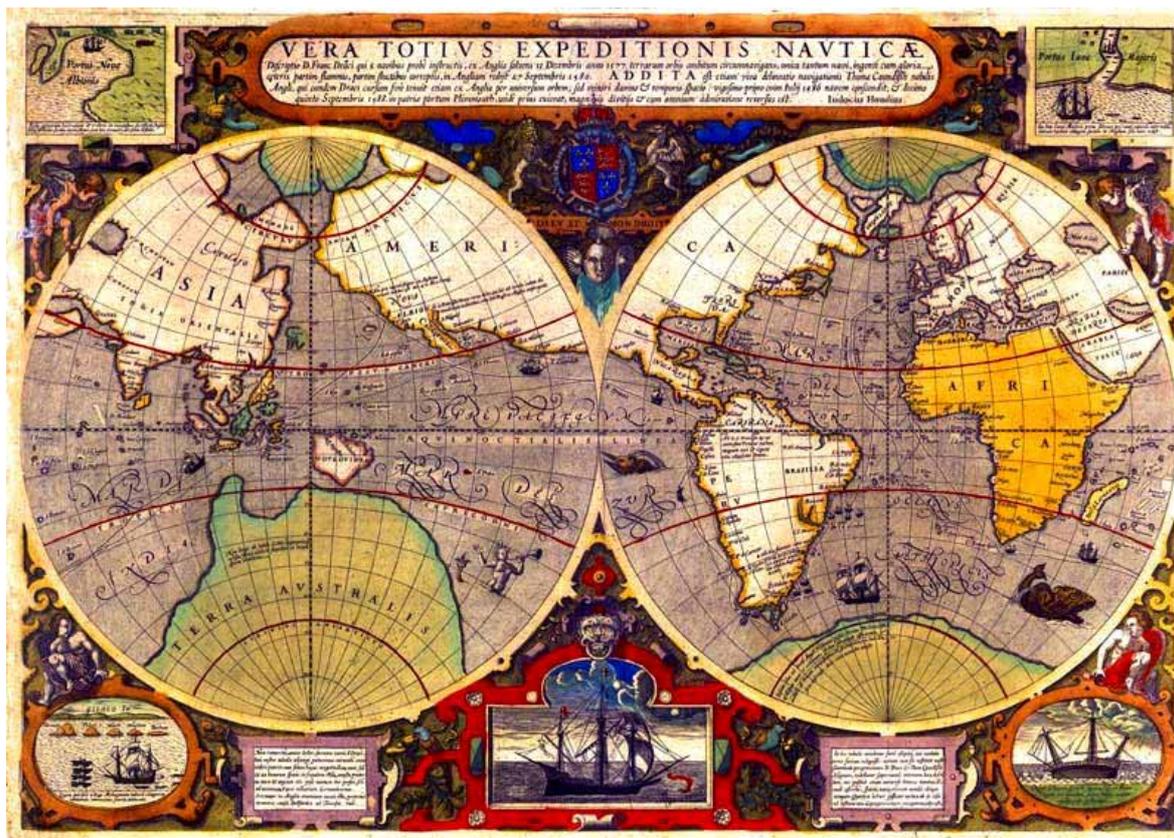
Una proyección estereográfica se denomina meridiana o proyección en el plano de un meridiano, cuando la circunferencia frontera representa un meridiano y los polos norte y sur aparecen, respectivamente, en lo alto y bajo del mapa. Tanto el meridiano central como el ecuador son dos líneas rectas y forman los diámetros perpendiculares de la circunferencia frontera. Los otros meridianos son arcos de circunferencia desigualmente espaciados que se intersecan en cada polo. El espaciado aumenta según la lejanía respecto del meridiano central. Como hemos dicho, el ecuador es una línea recta. Los otros paralelos son arcos de circunferencia desigualmente espaciados y cóncavos hacia el polo más próximo. El espaciado aumenta gradualmente, a lo largo del meridiano central, con la lejanía respecto del ecuador, pero es igual en el meridiano frontera, a 90° respecto del meridiano central. La distorsión, como muestra la figura, es moderada en las cercanías del centro del círculo y aumenta radialmente con el alejamiento hacia la circunferencia frontera, donde se da la mayor distorsión en forma y distancias.



(Fig. 13: Proyección estereográfica meridiana con indicatrix de Tissot)

Si se representa un solo hemisferio, se obtiene una imagen no muy distorsionada en la forma y nada en los ángulos, al ser una proyección conforme. Este hecho hizo que se utilizara tanto a partir de finales del siglo XV. También se conoce con el nombre de proyección ecuatorial. Michael Coignet en su *Introductio mathematica* al *Speculum Orbis Terrarum* de G. de Jode (Amsterdam, 1578) la

denomina *Figura hemispherii Arzahelis*, haciendo honor al origen árabe de este modo de la proyección estereográfica. La versatilidad de este modo de proyección se pone de manifiesto en el mapa (Fig. 14) debido a Jodocus Hondius (1563-1612), quien a comienzos del siglo XVII fue el editor de Mercator, e incluso añadió producción propia a la empresa y de esta forma, el nuevo atlas, paso a conocerse con el nombre de Atlas de Mercator-Hondius. El mapa fue elaborado por Hondius para mostrar los viajes de descubrimiento realizados al Océano Pacífico y a las regiones australes por los ingleses Drake y Cavendish a fines del siglo XVI.



(Fig. 14: Vera Totius Expeditiones Nauticae, J. Hondius, ca 1595)

Al mover el vértice de la proyección sobre el Ecuador se obtiene otra visión del Mundo en dos hemisferios, la imagen pone de manifiesto otra importante ventaja de la proyección estereográfica meridiana. También se da la posibilidad de combinar la proyección estereográfica polar y meridiana en una representación muy completa del globo terrestre, como así ocurre con *Nieuwe Werelt Kaert* de Peter Goos (Fig. 15) publicada en Ámsterdam en 1666. Los hemisferios occidental y oriental se representan en estereográfica meridiana, surcados por la proyección del círculo de la eclíptica, mientras que para las regiones polares se elige una más adecuada representación mediante la estereográfica polar.



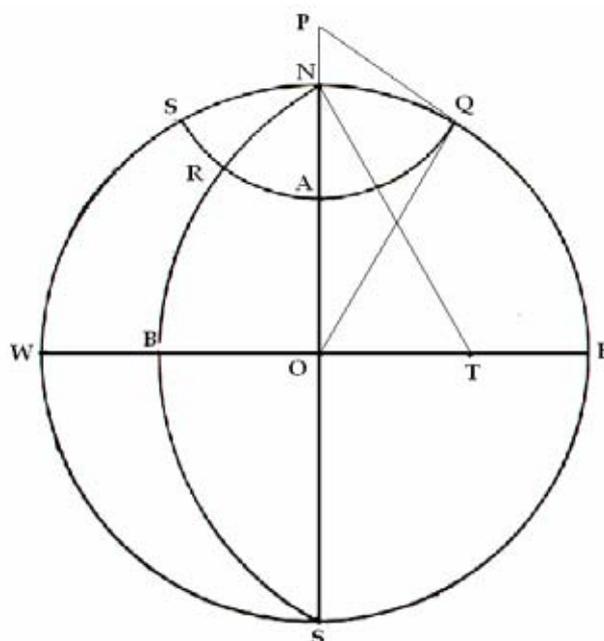
(Fig. 15: Nieuwe Werelt Kaert, Peter Goos, 1666)

Construcción de la proyección estereográfica meridiana⁶

Trácese el círculo base y los dos diámetros perpendiculares, NS y EW (Fig. 16).

Sea el arco EQ que mide φ grados. Trácese por Q la tangente a la circunferencia que corta al diámetro NS en el punto P. Con centro en P trácese el arco circular QRS. Este arco representa el paralelo de latitud φ . Sobre el diámetro EW llévase la longitud PQ igual a OT. Con T como centro y radio TN trácese el arco circular NRS. Dicho arco representa el meridiano de longitud φ .

⁶ Esta construcción se expone en la obra de Deetz y Adams citada en la bibliografía sin que se justifique matemáticamente su correspondencia con las fórmulas de la proyección estereográfica meridiana. Así, los libros modernos sobre cartografía siguen la tradición histórica de obviar la justificación matemática de sus procedimientos de trazado, relegando a la simple visión de la construcción la suficiente justificación: La explicación de esto depende de la doctrina de las secciones cónicas, y se comprende mejor por la vista que por el razonamiento (Varenus, Geographie Générale, pag 111).



(Fig. 16)

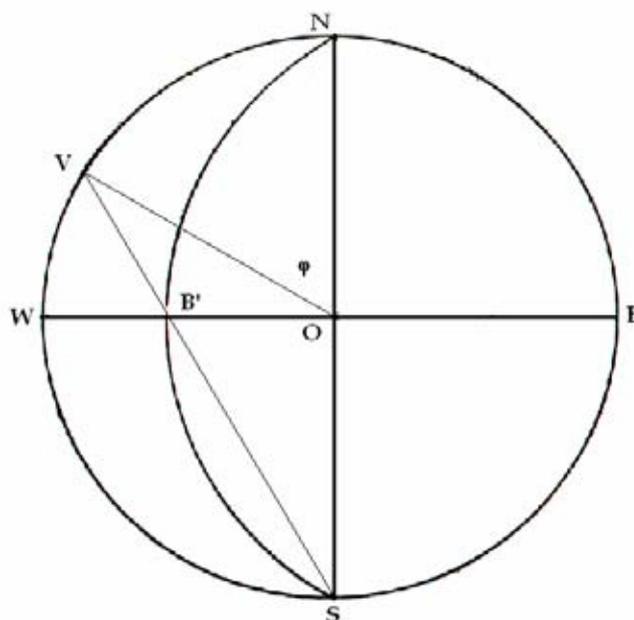
Dado que $PQ=OT=PA$ y $OQ=ON$, los triángulos OQP y NOT son iguales y tenemos que $OP=NT$.

$NT=BT$ y $BO=NT-OT=OP-PA=OA$. Luego el meridiano NBS está en longitud hacia el oeste lo que el paralelo QAS se aparta en latitud hacia el norte.

De esta forma se trazan los meridianos y paralelos necesarios, sin más que dividir el arco EN , en el número de grados que se requiera, siendo el arco EN igual a 90° . Por simetría se completan los meridianos y paralelos en los semicírculos restantes.

Varenius en su *Geographia Generalis* describe un procedimiento para el trazado del mapa en proyección estereográfica meridiana cuyo resumen transcribimos a continuación: Se traza una circunferencia que representa el meridiano exterior de uno de los hemisferios de la proyección. Luego dos diámetros perpendiculares, correspondientes al ecuador y el meridiano central. Se divide cada uno de los cuadrantes nortes del meridiano externo en 90 partes iguales, cada parte es un grado. Se trazan líneas rectas desde estas marcas hasta el polo sur, tales líneas determinan un punto sobre el ecuador. Por cada uno de esos puntos y los dos polos se traza un arco circular que corresponde con cada uno de los meridianos de la proyección.

Varenius añade que, en grandes mapas y para no incurrir en grandes errores, es conveniente disponer de una tabla de tangentes, para señalar estas intersecciones, que sean proporcionales a las tangentes de la mitad de los ángulos trazados desde el centro.



(Fig. 17)

Veamos que mediante matemática elemental -trigonometría y geometría analítica- podemos establecer la equivalencia entre el procedimiento de Varenius y el de Deetz y Adams.

Nuestro esquema de demostración será el siguiente: probaremos que los puntos B y B' (Fig. 16 y Fig. 17) tienen las mismas coordenadas y, al ser única la circunferencia que pasa por tres puntos, daremos por demostrada la igualdad de ambos procedimientos.

En primer lugar, determinemos las coordenadas del punto B en la figura 16.

Sea R el radio de la circunferencia ENWS.

$$OB = TB - TO.$$

$TB = TN = R/\text{sen}\varphi$. Pues $TN=PO$ y basta con relacionar ángulos y lados en el triángulo rectángulo OQP.

Por otro lado, se tiene que $TO = PQ = R \text{tg}(90^\circ - \varphi)$. Por relaciones trigonométricas en el triángulo OQP [Sea el ángulo QOE igual a φ . También es el ángulo QPO igual a φ].

$$\text{Se tiene que } OB = R/\text{sen}\varphi - R \text{tg}(90^\circ - \varphi).$$

Simplificando tenemos que $R(1-\text{cos}\varphi)/\text{sen}\varphi$.

Por lo tanto tenemos que el punto B tiene por coordenadas $(-R(1-\text{cos}\varphi)/\text{sen}\varphi, 0)$.

Ahora, determinaremos las coordenadas del punto B' de la figura 17. Lo haremos mediante la determinación del punto de intersección de la recta que pasa por los puntos V y S con la recta WE (eje OX).

Tenemos V $(-R\text{sen}\varphi, R\text{cos}\varphi)$; S $(0, -R)$.

La recta que pasa por V y S es: $y = -((1+\text{cos}\varphi)/\text{sen}\varphi) x - R$.

Su intersección con el eje OX, $y=0$, determina que $x = -R \text{sen}\varphi/(1+\text{cos}\varphi)$.

Luego el punto B' tiene por coordenadas $(-R \text{sen}\varphi/(1+\text{cos}\varphi), 0)$.

Una simple operación algebraica determina que $(1-\text{cos}\varphi)/\text{sen}\varphi = \text{sen}\varphi/(1+\text{cos}\varphi)$ con lo que queda demostrado que $B=B'$.

Y por lo tanto los procedimientos son equivalentes. Fin de la demostración.

La proyección estereográfica ha sido, durante estos últimos quinientos años, una de las más utilizadas. La propiedad matemática de ser una representación conforme la situó durante mucho tiempo como la proyección estrella para representar la imagen, la menos distorsionada posible, del planeta Tierra. Quizás también ayudó a su popularización el que B. Varenius le dedicara un lugar preeminente en su *Geographia generalis* y que I. Newton reeditara la obra de Varenius, situándola en un lugar privilegiado dentro del mundo científico del siglo XVII.



(Fig. 18: Orbis Terrarvm Tipvs, Petro Plancio, 1594)

Desde su recuperación en el siglo XV se recordó su origen estelar, pues ya Petrus Plancius en su *Orbis Terrarum Typus* mostró, en un doble folio, la imagen de la tierra y del cielo de forma conjunta. Sin temor a equivocarnos podemos afirmar que no existe otra proyección que permita representar, con las mismas propiedades matemáticas, tanto el Cielo como la Tierra.

Bibliografía

- Deetz C.H. y O.S. Adams. *Elements of Map Projections with Applications to Map and Chart Construction*. Washington: U.S. Department of Commerce, 1944.
- Keuning, J. "The history of geographical map projections until 1600". *Imago Mundi* XII (1955): 1-24.
- Lee, L.P. "The Nomenclature and Classification of Map projections". *Empire Survey Review*, 51, VII (1944): 190-200.
- Nordenskiöld, A.E. *Facsimile-Atlas to the Early History of Cartography with reproductions of the most important maps printed in the xv and xvi centuries*. New York: Dover Publications Inc, 1973.
- Snyder, J.P. *Flattening the Earth: Two Thousand Years of Map Projections*. Chicago: The University of Chicago Press, 1993.
- Snyder, J.P. *An Album of Map Projections*. U.S. Geological Survey. Professional Paper 1453. Washington: Department of the Interior, 1994.
- Varenius, B. *Geographie Générale, composé en Latin par B. Varenius, Revue par Isaac Newton, augmenté par Jacques Jurin, traduite en Anglois d'après les Editios Latines données par ces Auteurs, avec des Additions sur les nouvelles Découvertes & présentement traite de l'Anglois en Francois avec des Figures en taille-douce*. A Paris, Chez Vincent, rue S. Severin, á l'Ange; Chez Lottin, rue S. Jacques, au Coq. 4 vol, 1755. (Edición francesa de la obra de Varenius traducida del inglés, y editada en cuatro volúmenes en octavo. Ejemplar perteneciente al fondo antiguo de la Universidad de La Laguna).

Juan Antonio García Cruz, es profesor titular de la Universidad de La Laguna, Tenerife, España, y catedrático de Bachillerato en excedencia. Es miembro de la Comisión de Educación del Comité Español de Matemáticas en representación de la Federación Española de Profesores de Matemáticas. Fue director de la revista *Números* editada por la Sociedad Canaria Isaac Newton de Profesores de Matemáticas de la que fue Vicepresidente. Ha publicado libros y artículos en torno a la educación matemática y participado en numerosos congresos nacionales e internacionales. Además de la educación matemática se interesa por la historia de las Matemáticas y de la Cartografía.