UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2006, Número 8, páginas 113-117
ISSN: 1815-0640

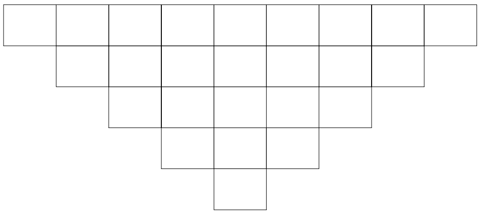
El rincón de los problemas

Uldarico Malaspina Jurado

Pontificia Universidad Católica del Perú
umalasp@pucp.edu.pe

Problema[1]

Considera un tablero de 25 casillas como el que se muestra en la figura.



En cada una de las casillas de la primera fila se escribe una letra A o una letra B y luego se completa escribiendo las mismas letras, de acuerdo con la siguiente regla: se eligen tres casillas consecutivas de la primera fila y se escribe debajo de la casilla del centro de éstas, en la segunda fila, la letra que aparece más veces en las 3 casillas escogidas. Así se completa la segunda fila y se continúa con las siguientes.

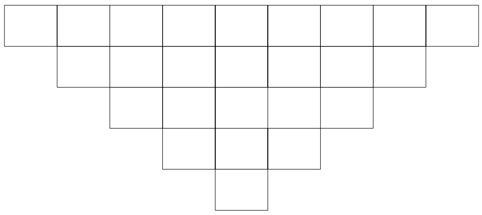
¿Cuál es la mínima cantidad de letras A que se debe escribir en la primera fila para asegurar que, en cualquier orden en que éstas se escriban, siempre se tenga una letra A en la casilla de la última fila?

Este es un problema de carácter lúdico, que es natural comenzar a resolverlo por ensayo y error. Ciertamente, es fundamental entender bien lo que se está pidiendo y puede usarse muy bien para aclarar algunos conceptos relacionados con la lógica y la formulación de un teorema. Una manera de explotar sus potencialidades es –como lo hicimos en un taller con profesores– presentándolo por partes, considerando actividades individuales y actividades grupales, como se muestra a continuación:

[1] Problema creado por Jorge Tipe, ex olímpico peruano, actualmente estudiante universitario. Se propuso en la fase final de la Olimpiada Nacional Escolar de Matemáticas del Perú, en noviembre del 2006.

Situación

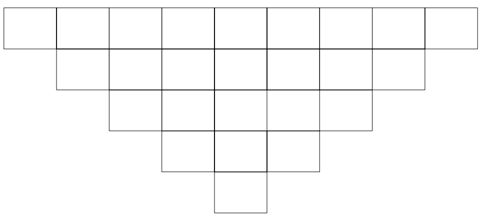
Se tiene un tablero de 25 casillas como el que se muestra en la figura.

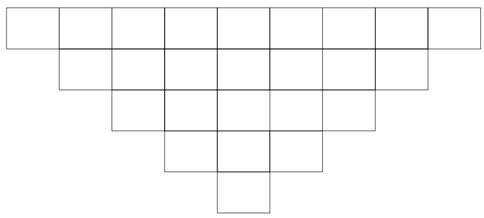


En cada una de las casillas de la primera fila se escribe una letra A o una letra B y luego se completa escribiendo las mismas letras, de acuerdo con la siguiente regla: se eligen tres casillas consecutivas de la primera fila y se escribe debajo de la casilla del centro de éstas, en la segunda fila, la letra que aparece más veces en las 3 casillas escogidas. Así se completa la segunda fila y se continúa con las siguientes.

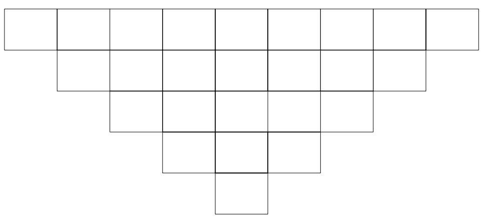
Para trabajo individual

a. Muestra dos posibles formas de completar el tablero.





b. Escribe la letra A en siete casillas cualesquiera de la primera fila y completa el tablero[2].



[2] El lector queda invitado a desarrollar las actividades pedidas, e imaginándose varios participantes trabajando individualmente, hacer la actividad *b* de varias formas

Para trabajo grupal (grupos de dos o tres participantes)

a. Escribiendo la letra A en siete casillas de la primera fila, ¿se puede **asegurar** que se obtendrá una letra A en la casilla de la última fila?

b. ¿Cuál es la mínima cantidad de casillas de la primera fila en las que debe escribirse la letra A para **asegurar** que, en cualquier orden en que éstas se escriban, siempre se tenga una letra A en la casilla de la última fila?

c. Con base en el análisis hecho para responder la pregunta planteada en *b*, formular y demostrar un teorema, relacionado con la situación planteada.

Comentarios

La actividad *c* se planteará según el nivel de los participantes. Es muy interesante plantearla en talleres con profesores.

Las actividades individuales familiarizan al participante con la situación planteada y dan elementos para responder las preguntas planteadas en las actividades grupales. La experiencia muestra que en los grupos descubren fácilmente que escribiendo la letra A en siete casillas de la primera fila, **no** se puede asegurar que se obtendrá una letra A en la última fila. Es una excelente oportunidad para hablar de lo que es un *contraejemplo*, pues si alguien afirma que escribiendo la letra A en siete casillas de la primera fila se asegura obtener la letra A en la última, para demostrar que tal afirmación es falsa, basta mostrar un caso cualquiera en el que se escriba la letra A en siete casillas de la primera fila y se obtenga la letra B en la última fila. Es oportuno conversar con los participantes, replanteando la primera pregunta grupal usando la expresión "*es suficiente*". Las experiencias llevan a concluir que **no es suficiente** tener siete casillas con la letra A en la primera fila para obtener A en la última fila. Según el nivel de los participantes, puede ser oportuno hacer comentarios relacionados con las proposiciones compuestas de la forma "*si p entonces q*", que se simbolizan $p \rightarrow q$, en las cuales "*p* es condición suficiente para *q*" y "*q* es condición necesaria si se cumple *p*"

Análogamente, pensando en responder la segunda pregunta grupal, es claro que escribiendo la letra A en las nueve casillas de la primera fila, siempre se obtendrá la letra A en la última fila; o dicho de otra manera, **es suficiente** tener la letra A en las nueve casillas de la primera fila para asegurar tener una A en la última; también se podría enunciar en una forma más usual ("*si… entonces…*"):

"si en todas las casillas de la primera fila se escribe la letra A entonces en la casilla de la última fila obtendremos una A"

Sin embargo esto es similar a decir que es suficiente que un paralelogramo tenga cuatro ángulos interiores rectos para que sea un rectángulo; o. en la forma "*si … entonces …*":

"si un paralelogramo tiene sus cuatro ángulos interiores rectos entonces el paralelogramo es un rectángulo"

La similitud está en que ambas proposiciones son verdaderas pero no son útiles o interesantes por ser muy evidentes. Los teoremas de la forma "*si… entonces…*" son proposiciones verdaderas que establecen una o más condiciones suficientes, y son más útiles o interesantes en la medida que la afirmación no sea tan evidente; por ejemplo,

"si un paralelogramo tiene un ángulo interior recto entonces el paralelogramo es un rectángulo"

La pregunta planteada en *b* lleva a buscar una relación lógica que vaya "más allá de lo evidente". Si las casillas de la primera fila las numeramos del 1 al 9, de izquierda a derecha, al escribir la letra A en las casillas 4 y 5 ó en las casillas 5 y 6, se puede ver fácilmente que aunque en las siete casillas restantes se haya escrito la letra B, siempre se obtendrá A en la última fila Podría pensarse entonces que dos es la mínima cantidad de casillas de la primera fila en las que debe escribirse la letra A, pero leyendo con cuidado la pregunta *b*, se encuentra que es acerca del número mínimo de casillas en las que se escriba la letra A, **en cualquier orden**, por lo cual, dos casillas no es la respuesta correcta, ya que se estaría exigiendo que se escriba en las casillas 4 y 5 ó 5 y 6, con lo cual ya el orden no es cualquiera. Por otra parte, fácilmente se puede construir un contraejemplo, pues basta escribir A sólo en las casillas 1 y 9 (y obviamente B en las siete casillas restantes) para obtener B en la última fila.

Como ya se vio que con siete letras A en la primera fila no se puede asegurar la obtención de A en la última fila, la respuesta a la pregunta *b* no puede ser siete. Más aún, no puede ser siete ni menor que siete, pues en tales casos en la primera fila habría por lo menos dos casillas con la letra B y bastaría que tales casillas sean la 4 y la 5 ó la 5 y la 6 para que inevitablemente se tenga B en la última fila.

En consecuencia, sólo resta analizar qué pasa al escribir la letra A en ocho casillas de la primera fila. En tal caso sólo se escribirá B en una casilla y en todo trío de casillas consecutivas siempre aparecerá más veces la letra A, por lo cual es imposible que en la segunda fila haya alguna casilla con la letra B y como resultado final, en la última fila se tendrá siempre la letra A.

Finalmente, podemos dar una presentación "matematizada" de lo analizado respecto a la situación planteada:

***Lema 1*: ** Si se escribe la letra A en ocho casillas cualesquiera de la primera fila entonces se obtendrá la letra A en la última fila

***Lema 2*: ** Si se escribe la letra A en siete o menos casillas cualesquiera de la primera fila, no se puede asegurar que en la última fila se tendrá la letra A.

***Teorema*: ** El mínimo número de casillas de la primera fila en las que debe escribirse la letra A, en cualquier orden, para asegurar que se obtendrá A en la última fila, es ocho.

La demostración de los lemas se ha hecho con detalle, y la del teorema es consecuencia de ambos lemas. El lema 1 garantiza que con la A en ocho casillas cualesquiera de la primera fila se asegura la A en la última, y el lema 2 garantiza que ocho es el número mínimo.

El lector queda invitado a pensar en una situación similar generalizando la idea, con *n* casillas en la primera fila. ¿Cómo serían los lemas y teorema correspondientes, y sus respectivas demostraciones?