



Coordinado por
Agustín Carrillo de Albornoz

Las T.I.C. como herramienta educativa en matemáticas

Jesús Fernández Domínguez y José Muñoz Santonja

Resumen

Cada vez hay más personas que pueden acceder a las Tecnologías de la Información y Comunicación en todos los ámbitos sociales. En concreto en la enseñanza, la incorporación de esas tecnologías debe promover un cambio en la didáctica de muchas materias, por ejemplo de las Matemáticas. La modificación de métodos de cálculo, las posibilidades gráficas y dinámicas, el planteamiento de retos más creativos que la mera repetición de algoritmos se ven impulsados por la gran cantidad de programas interesantes que existen. En el artículo se presentan programas de utilización en clase (varios de acceso gratuito en Internet) junto con actividades concretas.

Resumo

Cada vez há mais pessoas que podem acceder às Tecnologias da Informação e Comunicação em todos os grupos sociais. No ensino, a incorporação de estas tecnologias tem de provocar uma mudança na didáctica de muitas matérias, por exemplo das Matemáticas. A modificação de métodos de cálculo, as possibilidades gráficas e dinâmicas, o planeamento de objectivos mais creativos que só a repetição de algoritmos são impulsados pela grande quantidade de programas interessantes que há. Neste trabalho vamos expor programas de utilização na sala de aula (alguns deles gratuitos na Internet) além de actividades concretas.

Abstract

Every time there are more and more people who can get the Technologies of Information and Communication in every social circle. Talking about education, these technologies must promote a change in the teaching of many subjects, for example, in Maths. The changes in calculi methods, the graphic and dynamic possibilities, the approach of more creative challenges than the simple repetition of algorithms... are improved by many interesting programs. In this article we present programs of usage of these technologies in the classroom (there are many of them free in Internet) as well as many activities.

Introducción

Las Tecnologías de la Información y de la Comunicación son parte cotidiana de nuestra vida. Cualquier avance tecnológico en esas materias es inmediatamente asimilado por la sociedad. Cada vez más personas acceden a ellas casi a diario:



cuando utilizamos un cajero bancario, para comunicarnos a través de nuestros teléfonos móviles, cuando recibimos la información que se produce al instante en cualquier parte del mundo a través de las antenas parabólicas, etc.

A pesar de lo inmovilista que suele ser el mundo educativo (en el que en muchos casos seguimos utilizando las herramientas y procedimientos didácticos que se utilizaban hace siglos), es indudable que las T.I.C. también están influyendo en modificar los métodos de la enseñanza. Somos de la opinión (y así queremos mostrarlo en este artículo) que esas tecnologías pueden servir para una mejor adquisición de contenidos por parte de los alumnos e, indudablemente, prepararlos de una forma satisfactoria para desenvolverse en una sociedad cada vez más tecnificada.

En otras materias del periplo educativo se vienen utilizando desde hace tiempo todos los medios audiovisuales que están a nuestro alcance: proyectores de diapositiva en Historia del Arte o en Educación Plástica y Visual, retroproyectores de transparencias, videos educativos en Ciencias Naturales, aparatos de audio en clase de idioma, etc. Pero la verdad es que esos mismos elementos, útiles en la enseñanza de la matemática (donde hay excelentes videos didácticos o son innumerables las posibilidades para las representaciones gráficas con un retroproyector), no han sido aprovechados en su totalidad. Esa utilidad se ha multiplicado exponencialmente con la llegada de las T.I.C., por lo que no debemos perder esta gran oportunidad de incorporarlas a nuestras clases. La disminución en el precio de las calculadoras gráficas y los ordenadores permite que cada vez más centros educativos puedan disponer de ellos como recurso educativo.

Es verdad que nosotros nos encontramos en una situación excepcional en comparación con la que tienen que sufrir muchos de nuestros lectores. Pertenece a un centro público de la Comunidad de Andalucía en España. Esta comunidad ha apostado fuertemente por no perder el tren de la revolución tecnológica y está dotando de ordenadores a los centros educativos seleccionados en una convocatoria que tiene lugar todos los años. Los centros seleccionados cada año reciben una dotación de ordenadores y redes intranet que pueden variar desde convertir todas las aulas en TIC, dotando de un ordenador para cada dos alumnos o simplemente dotando de ordenadores a los departamentos y otros estamentos como biblioteca, secretaría, asociación de padres de alumnos, etc. Nuestro centro está en un nivel intermedio ya que disponemos de tres aulas fijas TIC (cuya utilización ronda a veces el 80% del tiempo disponible) y dos aulas de portátiles para un centro de secundaria con unos 24 grupos de alumnos (desde 1º de E.S.O. hasta un módulo profesional de nivel superior). Nuestro centro en concreto ya tenía inquietudes en este sentido desde hace años. En la primera tanda de introducción de los ordenadores en la enseñanza, a mediados de la década de los ochenta del pasado siglo (el conocido como Plan Alhambra), ya conseguimos un aula de Informática, que pocos años después se completó con una de Multimedia, por lo que los profesores interesados llevamos varios años trabajando con el ordenador en



nuestras clases. Nuestra intención con este artículo es hablar un poco de nuestra experiencia en este campo, utilizando ejemplos concretos que nosotros llevamos a nuestras clases de matemáticas.

Las TIC en la clase de matemáticas

Partiendo del supuesto de que tenemos equipos informáticos en el centro, vamos a hablar un poco de las formas de obtener rendimiento didáctico en nuestras clases de matemáticas con ellos. Si solo disponemos de un equipo cuya imagen puede proyectarse (a través de un cañón) podremos aprovechar las posibilidades de cálculo, pero sobretodo visuales que nos permiten afrontar aspectos gráficos y geométricos difícilmente reproducibles en la pizarra. Si además contamos con un aula dotada de ordenadores de forma que cada pareja de alumnos pueda disponer de un equipo entonces estamos en disposición de sacar realmente aprovechamiento de las herramientas informáticas. Si hay más de dos por ordenador suelen plantearse situaciones problemáticas que ponen en peligro la experiencia.

El ordenador tiene gran capacidad de atracción en los alumnos, aunque hay que procurar no abusar de esa herramienta, pues de lo contrario se corre el peligro de que pierda su gran atractivo. Hemos comprobado que alumnos que son pasivos e incluso disruptivos en clase, delante del ordenador cambian su actitud y al menos trabajan dentro de sus capacidades y actitudes. En años anteriores hemos podido comprobar que el material de matemáticas al que se puede acceder, por ejemplo en Internet, es muy útil para atender a la diversidad de nuestras aulas. Ya que cada alumno puede desenvolverse a su ritmo natural de trabajo y que muchas actividades pueden ajustarse a distintos niveles de dificultad, las herramientas de las que disponemos nos permiten tener trabajando a todos los alumnos, cada uno dentro de sus capacidades y aptitudes.

Como profesores siempre debe preocuparnos que los alumnos que trabajan con las TIC estén sacando verdaderamente aprovechamiento didáctico de esos elementos, pues a veces nos podemos encontrar con que los alumnos están entretenidos, pero no sacan nada en claro del trabajo que están realizando. Por ello se debe complementar el ordenador con otra serie de pruebas y actividades donde reflejen realmente los conocimientos adquiridos.

La metodología que solemos usar con nuestros alumnos es la siguiente: cuando vamos a tratar una parte específica de la materia en el ordenador, nosotros preparamos una hoja de actividades para realizar con el programa concreto con el que vayamos a trabajar. Esas actividades se realizan en el aula de informática y los resultados van pasando al cuaderno del alumno. En posteriores ocasiones realizan una serie de actividades de evaluación, unas veces directamente con el ordenador y en otras ocasiones con lápiz y papel, o bien en una puesta en común en clase. Para



nosotros es muy importante que el cuaderno de trabajo muestre las actividades, razonamientos y procesos seguidos, por lo que regularmente los recogemos y evaluamos.

Muchos compañeros de nuestro centro suelen utilizar el aula de informática como una puerta de acceso al gran banco de información, permanentemente actualizada, que es Internet, sin embargo en matemáticas existen posibilidades muy superiores al mero hecho de conseguir información en la red. Nosotros vamos a plantear aquí cómo es más provechoso utilizar programas de aplicación matemática (muchos de ellos encontrados gratuitamente en Internet) para explicar distintos contenidos, y como también es posible encontrar en Internet actividades interactivas con las que el alumno puede aprender o practicar paso a paso las actividades que queremos que realicen. Para no insistir más en las posibilidades de este recurso, vamos a pasar a poner ejemplos concretos de cómo trabajar con programas y actividades de ordenador.

¡Basta de hacer números!

Es indudable que la educación matemática ha cambiado en los últimos treinta años. Hoy en día a ningún profesor, en su sano juicio, se le ocurre explicar el algoritmo para calcular la raíz cuadrada, el manejo de las tablas trigonométricas o de logaritmos. De todos modos seguimos siendo remisos a desechar una serie de operaciones aritméticas (por ejemplo los clásicos “castillitos” de fracciones) que han quedado obsoletas¹. Actualmente nadie realiza operaciones a mano (aunque algunos alumnos son aficionados a contar con los dedos) y apenas mentales fuera del entorno educativo. Si vamos a cualquier comercio las operaciones la realizan los ordenadores o si es en comercios pequeños siempre se echa mano de la calculadora². Con la introducción de las calculadoras en la vida cotidiana, está claro que la enseñanza de los números debe cambiar, debemos potenciar por ejemplo la estimación mental de forma que cuando se obtenga un resultado disparatado con la calculadora (ya que cualquiera puede equivocarse al dar a una tecla) la persona sepa darse cuenta de que existe un error, asimismo hay que desarrollar el manejo correcto de los datos y saber qué operación es la que debemos realizar (cosa que no siempre saben nuestros alumnos).

Por supuesto, el tipo de actividades debe cambiar al trabajar con un ordenador o calculadora (al menos científica). Ya no tiene sentido realizar cierto tipo de

¹ Un grupo de profesores canarios ha elaborado un manifiesto a favor de la abolición de los algoritmos de lápiz y papel. En la siguiente dirección puede encontrarse información sobre este tema dentro de los documentos de lectura. http://nti.educa.rcanaria.es/cep_laguna/recursos/Capicua_2002/Recursos.html

² En todo momento nos estamos refiriendo a lo que sucede en España y Portugal pues es lo que nosotros conocemos, ya sabemos que en muchos países iberoamericanos el panorama es diferente y es mucho más difícil acceder a las nuevas tecnologías.



cálculos (que lo hace la propia máquina), y lo importante es que el alumno comprenda el procedimiento y sepa qué significa y qué es lo que hay que realizar. Por ejemplo no tiene mucho sentido plantear el simplificar la fracción $117/175$, ya que una sola tecla realiza la operación, pero la cosa cambia si le pedimos una fracción equivalente a $117/175$ cuyo numerador sea 42, ya que en este segundo caso la calculadora no hace la operación si el alumno no tiene claro qué significa ser equivalente y cómo hay que hacer para calcularlo.

Del mismo modo, no tiene mucho sentido pedirle que calcule el máximo común divisor de 24 y de 18, que cualquier programa de cálculo realiza en décimas de segundo, pero es distinto pedirle cuál es la mayor medida que deben tener unos azulejos cuadrados con los que se pueda recubrir un mural de 2.40 m. por 1.80 m., también aquí si el alumno no tiene claro el concepto de máximo común divisor, será incapaz, por muy buena herramienta informática que tenga, de resolver el problema.

El ordenador nos puede servir para llamar la atención sobre la importancia de la jerarquía de operaciones y la necesidad de paréntesis. Un alumno que no tenga claro este concepto, se equivocará al calcular con la calculadora la división $\frac{2}{3} : \frac{4}{9}$

pues lo normal es que escriba $2:3:4:9$ que es en realidad $\frac{2}{3 \cdot 4 \cdot 9}$. Para obtener lo que se quiere, debe escribir $2:3:(4:9)$.

Otro ejemplo sería encontrar un número natural mayor que 500 cuya raíz cúbica esté comprendida entre 7 y 8. El alumno se puede ayudar de la calculadora para hacer las operaciones, pero desde luego ésta no le va a resolver el problema si él no tiene claro la potenciación y radicación.

Otro ejemplo sería calcular el periodo de un número decimal. El alumno debe saber que cualquier fracción lleva asociada una expresión decimal exacta o periódica y qué representa el periodo. También que para saber cuál es el periodo a veces necesitamos conocer más cifras decimales de las estándar que nos da la máquina. Por ejemplo, si preguntamos cuántas cifras tiene el periodo de la fracción $\frac{45}{127}$ necesitamos sacar más decimales de los clásicos 10 para encontrar la solución. Podemos ver un ejemplo en la imagen de la figura 1.

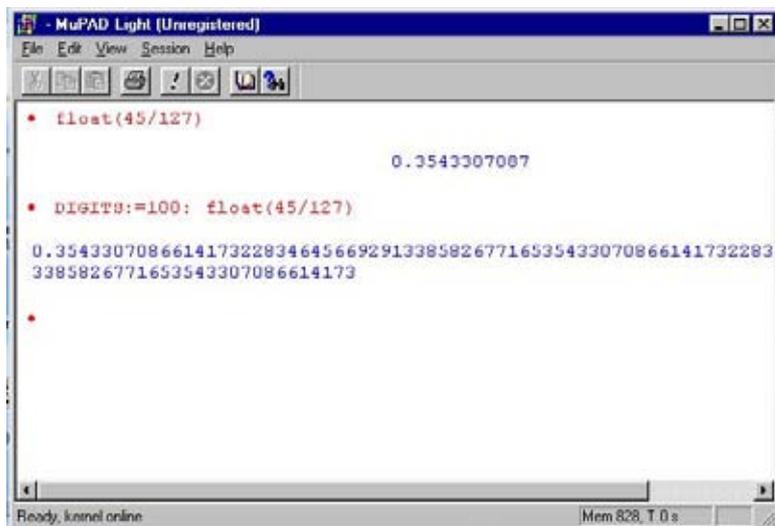


Figura 1

Vamos a hablar un poco de los programas que se pueden utilizar en esta parte. Existen multitud de programas que realizan operaciones aritméticas aunque la gran mayoría de ellos tienen muchas más aplicaciones al ser muy potentes. Quizás el más conocido y para el que hay más material es el programa Derive³, tiene el inconveniente de no ser un programa gratuito, aunque es posible encontrar una licencia gratuita por treinta días en muchos lugares (cualquier buscador los encuentra con facilidad), a continuación te proponemos algunos de ellos:

<http://derive.uptodown.com/>

http://www.geomundos.com/descargas/derive_p1347.html

<http://www.matematicas.net/paraiso/softwin.php>

Otro programa que se puede encontrar en Internet es el MUPAD, del cual existe una versión para Windows y también para Linux. Este programa es el que hemos utilizado en la figura 1. No es gratuito (al menos la versión para Windows), pero es posible encontrar una versión MUPAD Light que tiene licencia gratuita para la enseñanza. Podéis encontrarlo por ejemplo (junto con otro programa llamado Maxima) en la dirección:

<http://pcmap.unizar.es/~pilar/mupad.html>

Por último, queremos hacer referencia a un programa llamado Calculadora Wiris que tiene un gran potencial tanto en el tema de aritmética como en álgebra,

³ Durante un par de años, profesores de nuestro centro hemos participado en un proyecto de investigación organizado entre la Universidad Autónoma de Madrid y el Centro de Profesorado de Sevilla sobre la utilización de las TIC en el aula de matemáticas. Se trabajaba básicamente con tres programas Derive, Cabri y Excel. Quién esté interesado en la experiencia puede consultar la página www.infoymate.net donde además existen muchos otros recursos educativos interesantes.



análisis, representación gráfica en 2 y 3 dimensiones, etc. En la figura 2 podéis observar la presentación de esta herramienta:



Figura 2

La misma está a disposición de todo el que lo desee en algunos lugares correspondientes a distintas comunidades autónomas españolas (existen por ejemplo una versión en catalán) y aunque en algunos es necesario darse de alta como usuario, en otros está de libre acceso como por ejemplo en la Comunidad de Madrid, que es de donde hemos tomado la imagen anterior, donde existe una clara documentación para aprender a utilizarla así como actividades concretas creadas para realizarlas con la calculadora e incluso un apartado dedicado a Primaria. Tiene el inconveniente de que es necesario estar conectado a Internet para trabajar con ella, pero tiene la ventaja de que es rápida de aprender a usar y muy potente. En la siguiente dirección se puede encontrar.

<http://herramientas.educa.madrid.org/wiris/>

En el archivo que aparece en el Anexo hay un ejemplo de una actividad realizada con los alumnos⁴. Después de trabajar en la pizarra tres días de la semana, el cuarto íbamos a los ordenadores, se les entregaba unas hojas como la del ejemplo y durante esa sección se trabajaba actividades como las de la clase, pero con el ordenador. La única diferencia es que nosotros trabajamos con Derive y que en la hoja del ejemplo lo adaptamos a la Calculadora Wiris, para que todos puedan conectarse y probarla.

Los programas de los que hemos hablado antes, permiten también trabajar todos los aspectos de álgebra a un nivel no universitario. Podemos resolver ecuaciones y sistemas, realizar operaciones con matrices y determinantes e incluso trabajar con inecuaciones y representar recintos.

⁴ Corresponde a nuestro trabajo en la investigación de la que hablamos antes y que se desarrolla en la línea que puedes encontrar desarrollada en la página de infoymate.



Como antes comentamos, eso nos obliga al trabajar con los ordenadores y a modificar las actividades que realizamos. Es absurdo quedarnos en resolver un sistema de ecuaciones que cualquier de los programas tarda menos de un segundo en encontrar la solución, pero sí es importante saber interpretar el resultado y qué quiere decir que un sistema no tenga solución o tenga infinitas, y cuál es la relación entre sus ecuaciones.

Los programas de cálculo simbólico de los que hemos hablado suelen incluir posibilidades gráficas. Por ejemplo en la figura 3 podemos ver la representación en el espacio de las tres ecuaciones lineales de un sistema, por lo que es posible observar la posición relativa de los planos que la forman.

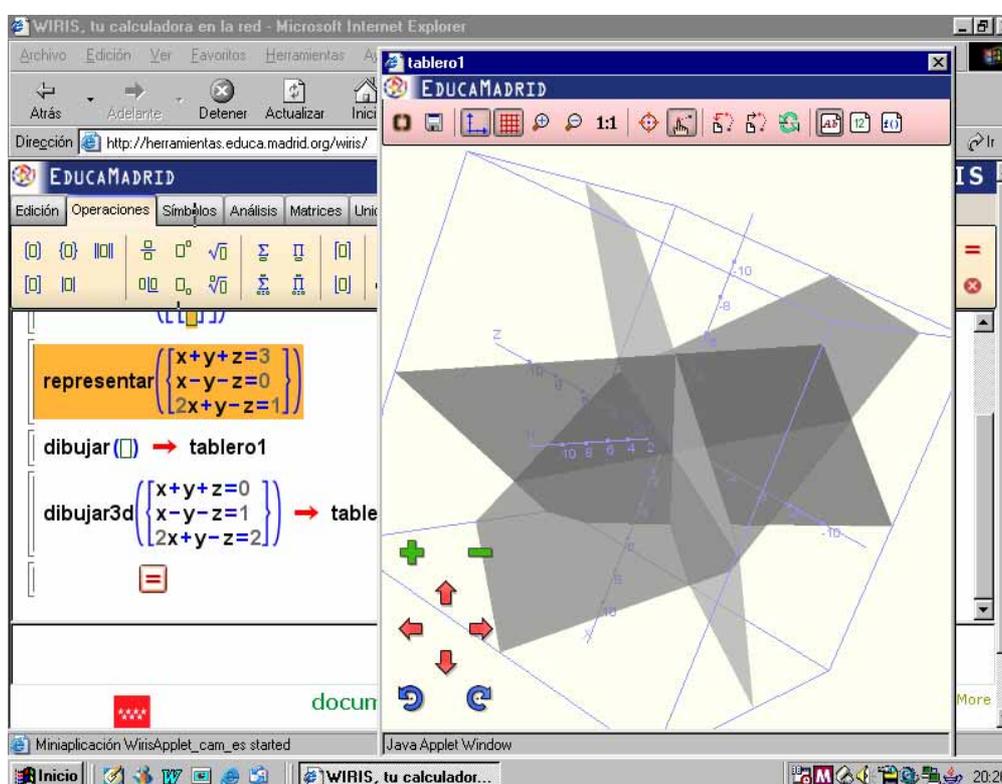


Figura 3

Ejemplo de actividades donde el alumno no tiene que hacer las operaciones pero sí tiene que tener clara la teoría que sustenta la parte en la que trabajamos son:

1. Halla un polinomio que al dividirlo entre $12x^3+5x^2-20x+9$ se obtenga de cociente $3x^2-6x+3$ y de resto $x-6$.
2. Escribe un polinomio con coeficientes enteros que tenga las siguientes raíces: $x_1 = 4/3$; $x_2 = 5/2$ y $x_3 = -1$.
3. Escribe un polinomio de grado cinco que sólo tenga una raíz real $x=6$ y que su valor numérico para $x=1$ sea 60.



4. Halla una fracción, con un polinomio de grado 5 en el numerador, equivalente a $\frac{x^3 - 3x^2 + 5}{x^2 + 3}$

En la figura 4 vemos cómo es posible resolver la inecuación $\frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 4} \geq 0$ y representar gráficamente la zona solución junto con la propia fracción algebraica. En este caso hemos utilizado el programa Derive.

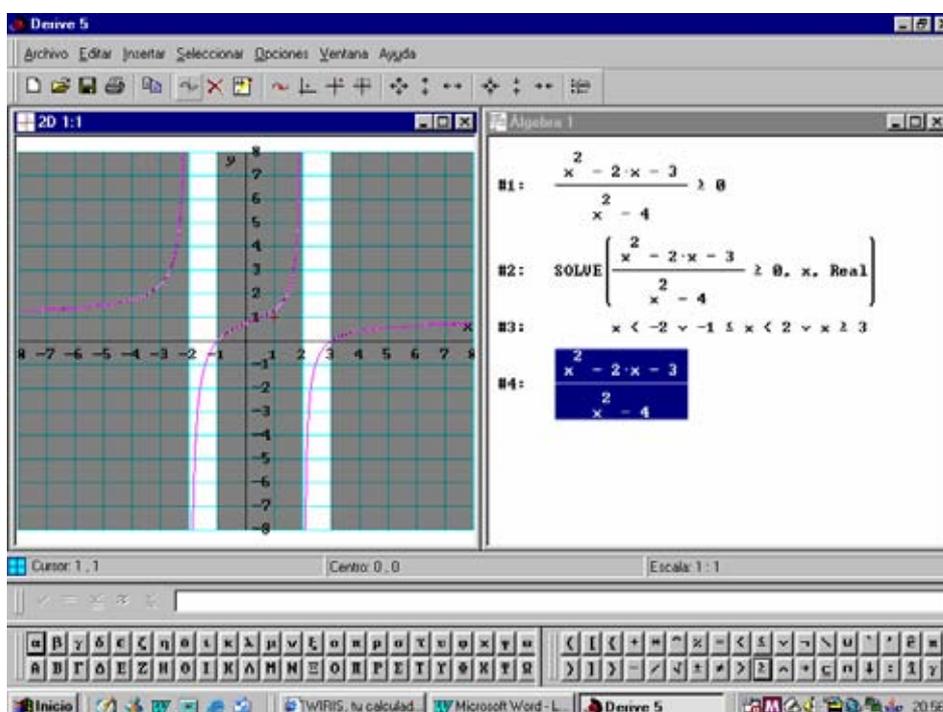


Figura 4

Geometría: ... y sin embargo se mueve

Posiblemente sea la parte de Geometría donde más interés tenga la utilización del ordenador como recurso didáctico. Las posibilidades de los programas de geometría dinámica hacen que aspectos visuales de la geometría se puedan ver en movimiento y comprobar propiedades en múltiples casos, algo impensable en la pizarra. Por ejemplo, podemos dibujar en un triángulo cualquiera sus tres bisectrices, y comprobar que siempre se cortan en un mismo punto: el incentro. Incluso dibujar la circunferencia inscrita de forma muy fácil. La ventaja es que una vez dibujado podemos tomar un vértice y modificar el triángulo, mientras observamos que el incentro sigue siendo el centro de la circunferencia circunscrita.



Dentro de los programas de geometría dinámica, seguro que el más conocido es el Cabri Geometre. Este programa no es gratuito, pero pueden encontrarse en Internet licencias gratuitas por un mes, por ejemplo en la siguiente dirección.

http://www.cabri.com/v2/pages/es/downloads_cabri2plus.php

Lo importante es qué posibilidades nos da el programa⁵. Veamos un ejemplo que hemos hecho en clase. A los alumnos se les entregan unas hojas de ejercicios donde se les van proponiendo una serie de actividades en las que tienen que abrir unos ficheros Cabri (previamente realizados por nosotros), con los que se pretende que los alumnos trabajen el Teorema de Thales. En la imagen vemos una de las actividades donde aparece la pantalla que se abre al utilizar el archivo de Cabri indicado.

ACTIVIDAD THALES 2

Abre el fichero Thales2.fig

Ahora, en vez de un árbol se tienen dos torres cuyas alturas vienen determinadas por dos puntos A y B respectivamente. Y dos sombras definidas por otros dos puntos A' y B'.

Copia las siguientes preguntas y respóndelas en tu cuaderno.

Ejercicio 1: ¿Cómo son los triángulos OAA' y OBB'? ¿por qué tienen esa propiedad? ¿cómo puedes comprobarlo por los valores de la pantalla?

Mueve el SOL lentamente a lo largo del arco y mira con detenimiento cómo cambian los valores de las alturas de las torres, de las longitudes de ambas sombras y de los cocientes entre las medidas de las alturas y los valores de las sombras.

Ejercicio 2: ¿Qué ocurre con las medidas anteriores cuando mueves el Sol? ¿A qué crees que es debido?

Ejercicio 3: ¿Qué ocurre con la medida de la sombra cuando el Sol "se pone", es decir, llega a la línea horizontal?

La actividad consta de tres ficheros Cabri, que de forma gráfica, manipulable y con ejemplos relacionados con la vida real, intentan introducir y presentar el citado teorema de Thales a los alumnos⁶.

Otro método para trabajar el mismo contenido y con idéntica intencionalidad didáctica, consiste en transformar los ficheros Cabri a CabriWeb, y a continuación

⁵ En la página personal de Jose Manuel Arranz San Jose pueden encontrarse muchos archivos en Cabri para utilizar en clase. La dirección es <http://roble.pntic.mec.es/jarran2/>.

⁶ Como se puede apreciar no es nuestro interés que el alumno aprenda a utilizar el programa Cabri, sino que lo utilice para aprender matemáticas. Esta será nuestra norma en todos los casos de programas que utilizamos.



crear un documento Html donde se combinan los ejercicios planteados en la hojas que se entrega a los alumnos y los ficheros Cabri, que aparecerán como escenas manipulables. Ésta presentación siempre resulta más atractiva a los alumnos, y también más cómoda de utilizar en el aula de informática.

Veamos cómo se plantea la actividad de la imagen superior con este segundo método.

The screenshot shows a web browser window titled "Escena de Tales - Packard Bell". The address bar shows the URL: "C:\Documents and Settings\Jesus\Mis documentos\Instituto\Curso 2004-05\EjerciciosCabri\CABRI\ThalesconCabri.htm". The main content area contains text instructions for an exercise and a diagram. The diagram shows a sun (SOL) casting shadows on two poles, A and B. Pole A is 5.98 cm tall and its shadow is 5.82 cm long. Pole B is 3.36 cm tall and its shadow is 3.27 cm long. The sun is positioned to the left of the poles.

Mira con detenimiento la siguiente escena. Está creada con un programa que se llama Cabri. En ella se ve el Sol que produce sombra a dos palos, uno de altura A y otro de altura B. Si quieres puede mover el Sol, o modificar la altura de los palos. Para ello acerca el puntero del ratón a uno de estos objetos hasta que aparezca el mensaje *This point*, haz clic con el botón izquierdo -el puntero se convierte en una mano- y arrástralo suavemente. Observa cómo cambian los valores en la escena: las alturas de los palos o la longitud de las sombras. Repite el proceso dos o tres veces. Si quieres volver a la escena inicial, haz clic en el botón *Actualizar* en la barra de tu explorador de Internet.

Ejercicio 2

Deja el sol fijo y copia el dibujo en tu cuaderno de trabajo

Divide la longitud de la sombra para el palo A (OA') entre la altura del palo (OA). Es decir calcula el cociente OA'/OA . Anótalo en tu cuaderno.

No muevas el Sol. Haz la misma operación para el palo B y su sombra. Es decir, halla el cociente OB'/OB . ¿Qué ocurre? Escribe el resultado en tu cuaderno.

Mueve alguno de los palos y repite el cociente para la nueva altura y la longitud de su sombra. ¿Cuánto da? Escribe tus consideraciones en tu cuaderno. ¿Te atreves a enunciar una propiedad?

Ahora, mueve el Sol. No vuelvas a copiar el dibujo, pero repite los cálculos de más arriba. Recuerda, halla OA'/OA y OB'/OB para los nuevos valores. Se cumple ahora también la propiedad que enunciaste más arriba.

En ambos casos se les pide a los alumnos que escriban en sus cuadernos de trabajo las operaciones necesarias para realizar las actividades, y las conclusiones que de ellas se deduzcan.

Otro programa que nos gusta para esta parte es el Geogebra, también de Geometría dinámica pero mucho más, como veremos en el siguiente apartado. Geogebra es un programa muy potente, software libre (y por tanto de descarga gratuita), que funciona tanto en Windows como Linux. Su entorno de trabajo es de fácil aprendizaje por parte del profesorado, y permite la creación de actividades muy interesantes por su interactividad para el alumnado de Secundaria y Bachillerato. Los contenidos que se pueden trabajar son, preferentemente, geometría y funciones.

El creador de GeoGebra es Markus Hohenwarter, y se puede bajar en la dirección www.geogebra.at. En esta página se puede encontrar información sobre el programa, foros de intercambio de actividades y tutoriales.



A continuación, veamos un ejemplo de utilización de GeoGebra. En este caso para trabajar las relaciones entre los ángulos de un triángulo en 2º ó 3º de ESO.

Como ya se ha hecho en otras ocasiones, al alumno se le entrega una hoja donde se les indica qué archivo GeoGebra tiene que abrir, se explica con brevedad las acciones que puede realizar en él, y seguidamente se le plantean unas actividades que debe contestar en su cuaderno de trabajo.

En la imagen siguiente se puede ver con claridad lo expuesto anteriormente.

ACTIVIDAD 1

Abre el documento Geogebra **Triángulos1**. Su aspecto es parecido al de la figura siguiente: Mueves los distintos objetos y observa cómo influyen en el triángulo los cambios. Al final, deja la figura como estaba al principio. Utiliza **Triángulos1** para contestar las siguientes cuestiones.

a) Completa la tabla siguiente si α , β y γ son los tres ángulos de un triángulo.

Ángulos	Triángulo 1	Triángulo 2	Triángulo 3	Triángulo 4	Triángulo 5
α	41°	35°	120°	132°	90°
β	82°	75°			
γ					

b) ¿Cuánto vale la suma de los tres ángulos de cualquier triángulo?

c) Define triángulo acutángulo. Y triángulo obtusángulo.

d) ¿Qué es un triángulo rectángulo? ¿Cuánto vale la suma de los dos ángulos no rectos de un triángulo rectángulo?

e) Completa esta otra tabla donde A, B y C son los ángulos y a, b y c son los lados del triángulo.

	A	B	C	a	b	c
Triángulo 1	23°	132°		9		10
Triángulo 2		50°	100°	5		10
Triángulo 3	132°	25°		19		10
Triángulo 4	80°					10

f) ¿Encuentras alguna relación entre el tamaño de los lados y la amplitud del ángulo opuesto? Piensa y descríbela.

g) Dos triángulos con los mismos ángulos (aunque en orden diferente), ¿le corresponden los mismos lados?

h) Construye un triángulo con los tres ángulos iguales, ¿cómo son sus lados? ¿cuál es el nombre de estos triángulos?

i) Construye un triángulo con dos ángulos iguales, ¿cómo son sus lados? ¿cuál es el nombre de estos triángulos?



ACTIVIDAD 2

Con la ayuda de **Triángulos1** dibuja, en las casillas en que sea posible, un triángulo con las características que se indica. Escribe en cada caso:

- Las relaciones de igualdad o desigualdad que existen entre los lados y los ángulos.
- El tipo de ángulos que tiene cada triángulo y su valor.
- La longitud de sus lados.
- Si en alguna casilla no es posible dibujar ningún triángulo, explica la razón.

Triángulos		Según sus lados		
		Equilátero	Isósceles	Escaleno
Según sus ángulos	Rectángulo			
	Acutángulo			
	Obtusángulo			

Existen otros muchos programas de geometría en Internet de acceso libre. Entre ellos recomendamos uno llamado Regla y Compás, o el Geonext, aunque también se pueden encontrar el Kgeo o el DrGenius.

Funcionar como un reloj

La parte de gráficas y funciones es otra que permite muchas actividades y muy interesantes, ya que la facilidad de representación gráfica y del estudio de elementos de la gráfica de una función hacen muy visual y claro el estudio de esta parte de la matemática.

Varios de los programas de los que hemos hablado anteriormente permiten actividades de funciones y gráficas. Por ejemplo, un programa potente puede ser Derive, o la calculadora Wiris de la que hablamos antes. Pero veamos otros programas, por ejemplo la siguiente actividad con Geogebra.



Como en ocasiones anteriores, se entregan a los alumnos unas hojas de actividades donde se les pide que abran un archivo GeoGebra. Al principio de esta hoja se explica de forma breve el funcionamiento del fichero (intentamos que éste sea siempre lo más sencillo posible). Posteriormente, se desarrollan las actividades encaminadas en este caso a trabajar los dos parámetros asociados a la función línea: pendiente y ordenada en el origen. Se intenta que su estudio sea intuitivo, y que sea el alumno quien saque sus propias conclusiones a la vista de los cambios que se producen en la gráfica de la función lineal, al modificar estos parámetros en la expresión analítica de ella.

En esta primera página se trabajan las funciones de proporcionalidad directa.

Abre el fichero `funcionlineal1`, inmediatamente aparecerá un documento GeoGebra con el aspecto siguiente:

Annotations in the image:

- Haz clic en este botón y selecciona desplaza para mover los puntos A y B
- Haz clic en este botón y selecciona desplaza la zona gráfica para mover todo el rango visible
- Haz clic en este botón para deshacer una acción no deseada
- Aquí aparece la expresión analítica de la recta
- En esta ventana debes introducir los valores de m, por ejemplo m=3
- Altura del triángulo
- Base del triángulo
- Los puntos A y B que puedes mover

Fíjate con detenimiento en cada uno de los elementos que se describen en la figura superior. Si quieres mover un punto, o cualquier otro objeto, debes seleccionar la opción `desplaza` del primer botón por la izquierda de la barra de herramientas. Si lo que deseas es mover la cuadrícula, disminuir o aumentar su rango, debes elegir la opción correspondiente en el último botón de la citada barra. En la ventana de `Entrada` o `Ingresar` deberás escribir el valor de la pendiente de la recta que quieres dibujar. Por ejemplo, si la recta es $y = 3x$ debes escribir $m = 3$.

ACTIVIDAD 1

La recta que aparece en la gráfica es $y = x$, es de proporcionalidad directa con pendiente $m = 1$. Junto a la recta aparece un triángulo que te ayudará a entender el concepto de pendiente de una función lineal.

Mueve los puntos A y B, y observa cómo cambia el triángulo, pero la relación entre la altura y la base de él siempre es la misma: 1. Es decir, puedes calcular la pendiente de una recta formado estos triángulos y dividiendo la altura entre la base. Recuerda que si la recta es creciente la pendiente es positiva, y si la recta es decreciente la pendiente es negativa.

ACTIVIDAD 2

- Dibuja con Geogebra la función de proporcionalidad directa $y = 3x$. Para ello da el valor $m = 3$. Observa como en el triángulo que se dibuja se cumple lo explicado en la actividad anterior. Es decir, al dividir la altura entre la base del triángulo el resultado es 3. Si mueves A y B se continuará manteniendo la proporción anterior. Dibuja en tu cuaderno de trabajo la recta con su ecuación y el triángulo.
- Repite el apartado anterior para las rectas $y = -2x$, $y = 0.5x$, $y = -3x$, $y = (2/3)x$.



En la segunda hoja, se estudian las funciones lineales en general.

En las actividades de la hoja anterior estudiaste la pendiente de las funciones de proporcionalidad directa. En esta hoja vas a trabajar la **ordenada en el origen** de las funciones lineales.

Vuelve a abrir el fichero funcionlineal1. Recuerda, la función que aparece representada es $y = x$. Su pendiente es 1 y como corta al eje Y en el 0, la ordenada en el origen es 0.

ACTIVIDAD 4

Escribe en la entrada $n = 2$. Contesta las siguientes preguntas en tu cuaderno de trabajo.

- ¿Ha cambiado la gráfica de la recta? ¿Cómo ha cambiado?
- ¿En qué punto corta ahora la recta al eje Y?
- ¿Cuál es la expresión analítica de la recta? ¿Cuál es la ordenada en el origen?
- ¿Ha cambiado la pendiente respecto de $y = x$?
- Representa la recta, señalando con claridad cual es su ordenada en el origen.

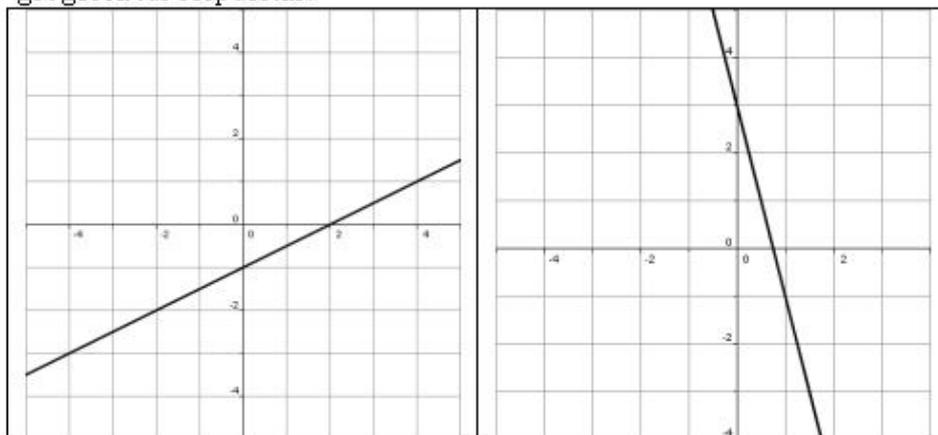
ACTIVIDAD 5

Vuelve a contestar las cuestiones de la actividad anterior para los siguientes valores de m y n :

- a) $n=4$, b) $n=-3$, c) $m=-3$ y $n=1$, d) $m=2$ y $n=-2$

ACTIVIDAD 6

Halla las ecuaciones de las siguientes funciones lineales. Comprueba con geogebra tus respuestas:



Otro programa que puede utilizarse para las funciones es una hoja de cálculo. Aunque en el apartado siguiente hablaremos más detenidamente de estas herramientas, vamos a ver aquí un ejemplo donde hemos utilizado la hoja de cálculo Excel que pertenece al programa Microsoft Office.



En concreto, esta actividad está diseñada para alumnos de 3º de ESO. Se desean trabajar los parámetros que intervienen en la función lineal: la pendiente y la ordenada en el origen.

En la imagen inferior aparece parte del contenido de la hoja que se le entrega al alumno. Éste debe trabajar con un archivo Excel que nosotros hemos creado previamente y donde están las celdas protegidas de forma que sólo puedan modificar aquellos aspectos que nos interesan, en concreto la pendiente y la ordenada en el origen.

ACTIVIDAD 1

En el disco C: de tu ordenador existe un fichero de nombre **FunciónLinealconExcel**, ábrelo. Aparece un documento de la hoja de cálculo Excel que tiene el siguiente aspecto.

Sólo puedes cambiar el valor de **m** y **n**

Función lineal y afin.

Elige la pendiente **m**

Elige la ordenada en el origen **n**

La gráfica de la derecha es la de la función

$y = 2.0x + 3.0$

Su tabla de valores es:

x	y
-7	-11
-6	-9
-5	-7
-4	-5
-3	-3
-2	-1
-1	1
0	3
1	5
2	7
3	9
4	11
5	13

Cambiarán la ecuación, la tabla de valores y la gráfica de la función

El fichero permite representar funciones lineales y afines. Recuerda, estas funciones tienen una expresión del tipo $y = mx + n$. Para dibujar la gráfica debes escribir el valor de **m** y **n** en las celdas correspondientes. Observa cómo cambian la ecuación, la tabla de valores y la gráfica.

Todas las tareas que se te van proponer debes contestarlas en tu cuaderno de trabajo, el documento Excel es sólo una ayuda.

- Para empezar, representa las funciones $y = 2x$, $y = 2x + 3$. ¿Qué observas? ¿Cómo son las gráficas de ambas funciones? ¿A qué crees que es debido? ¿En qué puntos cortan ambas funciones al eje de las Y?
- Haz el ejercicio 4 de la página 218 de tu libro.
- Si las gráficas de dos de las funciones anteriores son rectas paralelas, ¿cómo son sus pendientes?
- La función cuya gráfica es una recta horizontal, ¿cuánto vale su pendiente?
- ¿Cómo influye el valor de **n** en la gráfica de las funciones anteriores? ¿Qué relación tiene **n** con el punto de corte con el eje de las Y?

Existe otro programa que hemos utilizado bastante y que tiene muchas posibilidades. Nos referimos a Graphmática que es un programa gráfico para dibujar funciones. Aunque es muy simple de utilizar tiene unas grandes prestaciones ya que podemos citar las siguientes posibilidades:



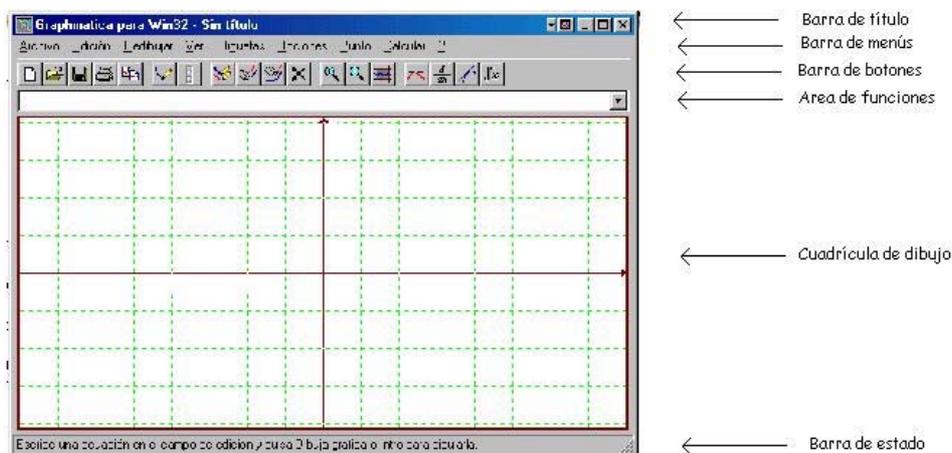
1. Dibujar la gráfica de una función en distintos tipos de coordenadas (cartesianas, polares, logarítmicas, etc...)
2. Dibujar gráficas de funciones definidas a trozos.
3. Localizar las coordenadas de puntos correspondientes a una gráfica ya dibujada.
4. Trazado de rectas tangentes a una función.
5. Cálculo de derivadas de una función.
6. Cálculo de áreas definidas por una función continua o de regiones limitadas por varias funciones.

Es un programa de tipo Freeware (gratuito), fácil de conseguir en Internet, basta escribir Graphmatica en cualquier buscador y salen muchas páginas. En concreto, dos de las páginas donde puede encontrarse el archivo son las siguientes:

www8.pair.com/ksoft/espanol/grmat16n.html

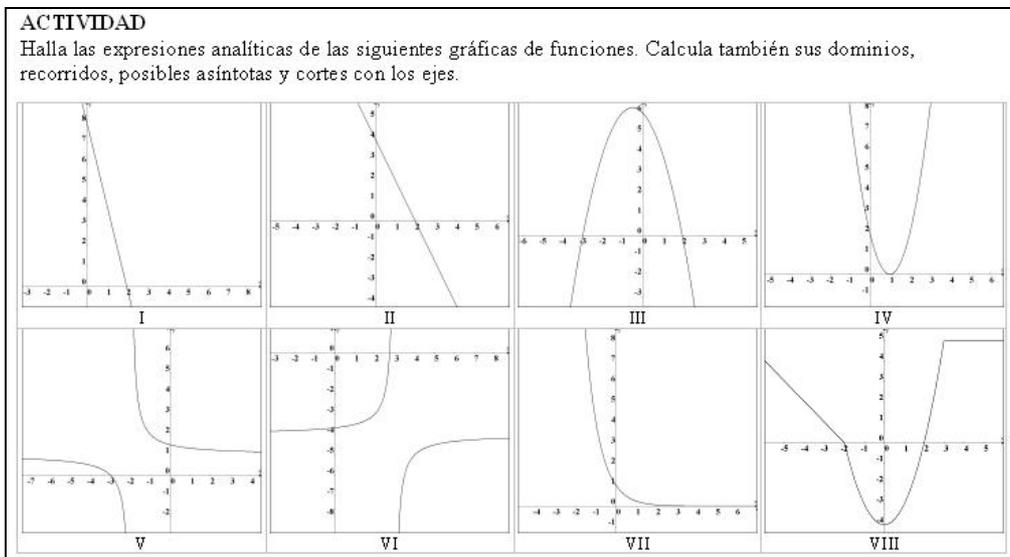
www.matematica.uda.cl/descargas/graphmatica.html

La ventana de Graphmática es similar a cualquier otra aplicación Windows. El funcionamiento del programa es muy intuitivo, y su configuración muy adaptable.



Veamos un ejemplo de utilización de este programa para trabajar las gráficas y sus expresiones analíticas de las funciones que se estudian en 4º ESO: lineales, cuadráticas, de proporcionalidad inversa, exponenciales, logarítmicas y definidas por partes.

Hemos utilizado esta actividad como repaso final, después de haber trabajado los contenidos descritos anteriormente. Los alumnos ya conocen cómo funciona el programa. Están distribuidos en grupos de dos por equipo informático. Se les entrega la siguiente hoja de actividades.



El objetivo de la actividad es que los alumnos deduzcan la expresión analítica de cada una de la funciones. Gracias a Graphmática (o algún programa similar), podrán comprobar rápidamente si sus respuestas son acertadas. Lo que favorece la autonomía en su trabajo, el debate entre los miembros de los grupos, y descargar al profesor de la corrección inmediata de las tareas realizadas por los alumnos.

Hay que señalar que Graphmática dispone de un zoom, lo que significa disponer de una herramienta muy útil y visual a la hora de estudiar las asíntotas de las funciones de proporcionalidad inversa, las exponenciales o las logarítmicas. Al alejar repetidas veces el zoom, se ve con claridad cómo las gráficas de las funciones se convierten en rectas rápidamente.

¡Si la Estadística no miente...!

Desde la aparición de las primeras calculadoras de bolsillo, las operaciones estadísticas fueron las primeras que desaparecieron del papel para ser realizados con la nueva tecnología. Hoy en día a nadie se le ocurre realizar los tediosos cálculos estadísticos a mano. Eso nos permite que volquemos nuestro interés en el tema de nuestro estudio, la realización de las preguntas necesarias para recoger la información precisa, la selección de la muestra y sobretodo la interpretación de los resultados.

Lo mejor para trabajar con datos estadísticos son las hojas de cálculo, que a través de sus funciones estadísticas nos permiten calcular cualquier parámetro estadístico, comparar resultados y representar gráficamente en dos o tres dimensiones los datos. La más conocida y extendida debe ser la Microsoft Excel (perteneciente al paquete Microsoft Office), pero existen otras que podemos



encontrar en Internet. Para todo aquel que haya manejado Excel puede ser interesante la O.O. Calc (perteneciente al paquete Open Office) ya que es prácticamente clónica de Excel, e incluso permite manejar los archivos de Excel. El paquete Open Office (que se compone además de un procesador de textos como Word, una base de datos, un editor de fórmulas, un elaborador de presentaciones como Power Point y más cosas) es gratuito y existen versiones para Linux y para Windows, desde las siguientes direcciones puedes descargarte el paquete completo:

<http://es.openoffice.org/programa/>

<http://open-office.malavida.com/descarga/windows/225>

Otra hoja de cálculo también gratuita es GNUMERIC, inicialmente pensada para entorno Linux, pero que también puede encontrarse versión para Windows en la siguiente dirección:

http://www.programas-gratis.net/php/programa2.php?id_programa=8240

otra dirección para Gnumeric es

<http://descargas.terra.es/ie/10624/Gnumeric>

Gnumeric tiene incluidos numerosos cálculos estadísticos accesibles muy fácilmente. En la figura 5 puedes observar las posibilidades al desplegar el menú de herramientas.

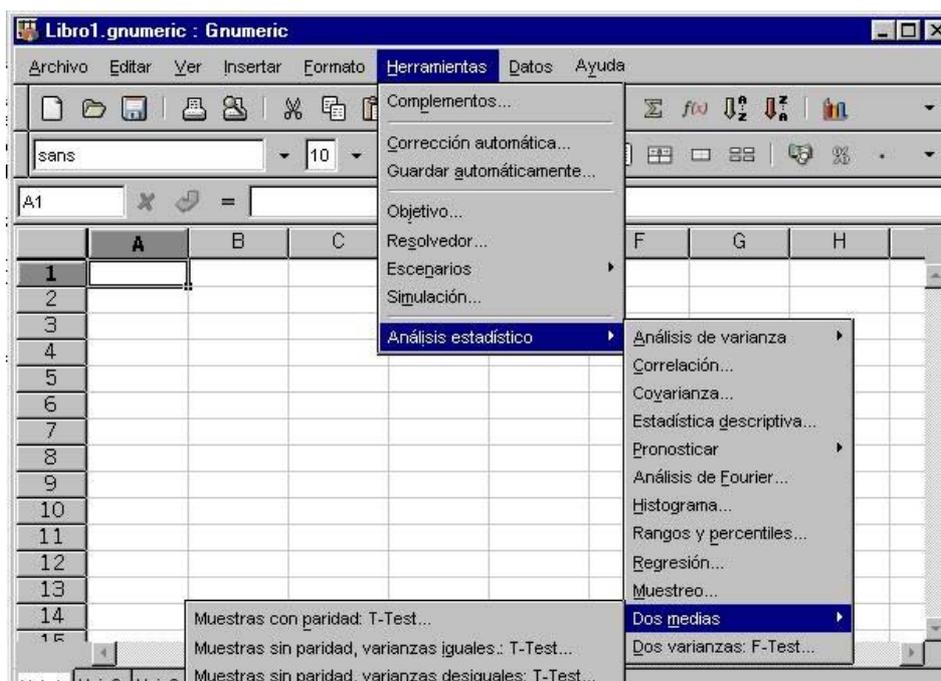


Figura 5



Cualquier cálculo que haya que realizar en una enseñanza media queda de sobra cubierto por esta hoja de cálculo.

Por ejemplo, si tomamos una serie de datos y seleccionamos la opción Estadística descriptiva nos aparece una hoja nueva con los cálculos que podemos ver en la figura 6.

	A	B
1		Columna 1
2	Media	5,9
3	Error estándar	0,7371114795832
4	Mediana	6,5
5	Moda	7
6	Desviación estándar	2,33095116493961
7	Varianza de la muestra	5,43333333333333
8	Curtosis	-1,01283450637962
9	Desviación	-0,44216921492324
10	Rango	7
11	Mínimo	2
12	Máximo	9
13	Suma	59
14	Cuenta	10
15		

Figura 6

La hoja de cálculo permite también preparar actividades para Probabilidad. Por ejemplo, si queremos trabajar con la Ley de los Grandes Números repartimos un dado a los alumnos de forma que cada uno realice por ejemplo 20 lanzamientos y escriba la tabla de frecuencias absoluta y relativa de los resultados. Si en una hoja vamos incluyendo los datos de cada alumno y los agrupamos, podemos observar cómo al aumentar el número de lanzamientos las frecuencias de cada cara tienden a centrarse en valores iguales. En la imagen 7 vemos cómo sería la presentación de la hoja de cálculo en las filas 4 a 9 de las columnas de la B a la Z. Se van incluyendo los resultados de los alumnos y en la tabla inferior se suman y se halla la frecuencia relativa del total. Mediante una gráfica se puede ver cómo van cambiando las frecuencias y como tienden a fijarse en un valor muy cercano para todos.

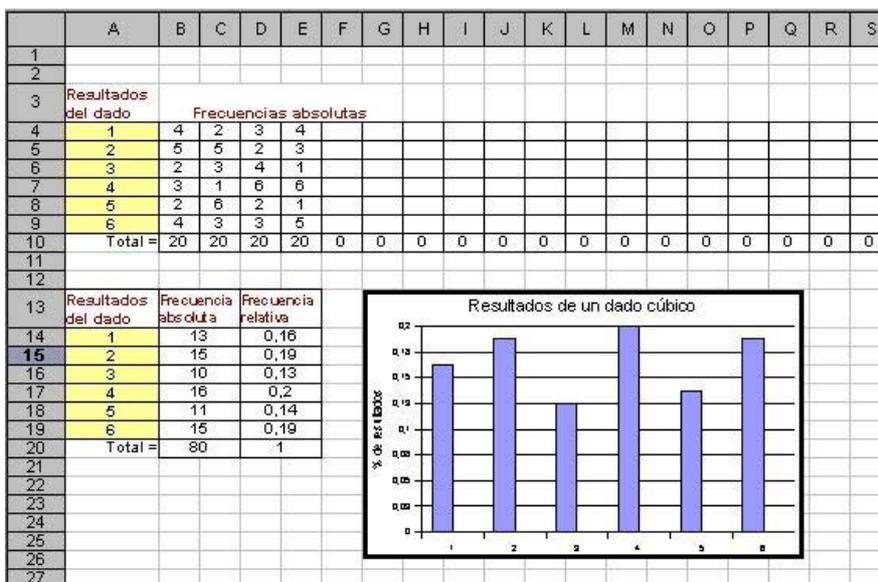


Figura 7



Programas y más programas

Hasta el momento hemos utilizado herramientas que no están creadas propiamente con la idea de enseñar, es decir, no son verdaderos materiales didácticos pero sí se les puede utilizar como recurso para aprender matemáticas. Sin embargo, en Internet existe un amplio mundo de programas de todo tipo creados específicamente para la enseñanza y que pueden servirnos para que los alumnos estudien, aprendan, practiquen y repasen todos los conceptos que queramos. Intentar citar aquí la mayoría de esos sitios sería impensable pues puede llevar varios años hacer un listado explicado de esas posibilidades. Nosotros vamos a indicar algunos con los que hemos trabajado en clase, que nos han dado resultados y todos ellos están a disposición gratuita de cualquiera; además, salvo la última, las demás pueden bajarse al ordenador y no es necesario estar trabajando con ellas conectados a Internet, lo que suele añadir ventajas de velocidad y fiabilidad por que no nos quedaremos colgados de pronto.

En primer lugar, podemos encontrar este tipo de programas en páginas personales de profesores. Por poner un ejemplo nos referiremos a la página personal del profesor Jordi Lagares Roset, que imparte clases en un instituto de Gerona, en el impresionante pueblo de Besalú, y que tiene programas para simular muestras estadísticas, o para explicar gráficamente la función de distribución normal. Su página es:

<http://www.xtec.es/~jlagares/indexcastella.htm>

Dentro de esta página existen muchos programas creados por el profesor Lagares y que distribuye gratuitamente. Por ejemplo un programa para resolver problemas de programación lineal. Muchos de sus programas tienen versiones en distintos idiomas como español y catalán, e incluso en otros idiomas: portugués, euskera, gallego.

También podemos encontrar programas propios y utilidades en la página web de los centros educativos. Existen muchas, y como ejemplo os aconsejamos la del I.E.S. Salvador Dalí de Madrid cuya dirección es:

<http://centros5.pntic.mec.es/ies.salvador.dali1/>

En ella podéis encontrar materiales para calculadoras gráficas, actividades con cabri-web, programas propios y sobretodo creemos interesante el material de un premio que se le concedió por la Comunidad Autónoma de Madrid con el título: "Materiales audiovisuales, informáticos y manipulables para el tratamiento de la diversidad en la ESO".

A veces, un profesor lanza un proyecto y muchas más personas se incorporan a él. Un caso de ello es la herramienta CLIC creada por Francesc Busquets y que



fue premiada en el año 1992 por el Programa de Nuevas Tecnologías de la Información y Comunicación (PNTIC) del Ministerio de Educación de España. A ese proyecto se han acogido muchos profesores y hoy en día cuenta con un banco de actividades impresionantes. Los programas CLIC disponen de una serie de pantallas interactivas donde el alumno realiza las actividades y se va creando un informe de los aciertos y fallos. Ejemplo de actividades son, por ejemplo, asociar dos conceptos (por ejemplo una ecuación con su solución, una operación con su resultado, etc.) tal como vemos en la figura 8.

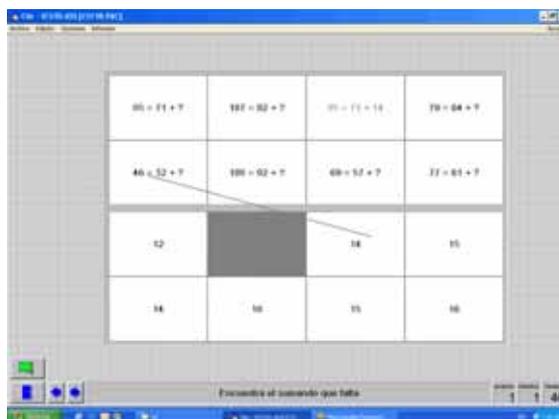


Figura 8

O crucigramas donde hay que escribir elementos matemáticos o resultados de operaciones:



Figura 9

Últimamente el programa se ha transformado en JCLIC, que va en soporte Java y por tanto puede utilizarse tanto en Windows como en Linux. Para utilizar esta herramienta es necesario instalar primero el programa y después descargarse las actividades que nos interesen (las hay de casi todas las materias y de todos los niveles no universitarios). Podemos encontrar toda la información en la dirección:



<http://clic.xtec.net/es/jclic/index.htm>

donde también se explica cómo es posible crear unidades nuevas por cualquier profesor interesado.

Nosotros utilizamos este programa sobre todo en una asignatura optativa que existe en Andalucía llama Refuerzo de Matemáticas que suele ir dirigida a aquellos alumnos con dificultades en la asignatura (por ejemplo los alumnos con la asignatura pendiente de cursos anteriores). Nos suele dar muy buen resultado, ya que los alumnos se entretienen y con el informe final podemos controlar cuál es el conocimiento real que tienen.

Otras veces, es una entidad educativa la que presenta el material, como vimos anteriormente con la calculadora Wiris. Entre todas las herramientas que conocemos para Secundaria, la más potente quizás sea el programa Descartes desarrollado por el CNICE (Centro Nacional de Información y Comunicación Educativa) dependiente del Ministerio de Educación y Ciencia. La herramienta Descartes consiste en una pantalla interactiva en la que los alumnos pueden realizar muchas actividades. A partir de esa pantalla se ha creado todo un banco de unidades didácticas, aplicaciones y herramientas para cubrir prácticamente toda la Educación Secundaria Obligatoria y el Bachillerato (en total de 12 a 18 años). En las unidades didácticas se explican los conceptos que se van a trabajar y posteriormente se plantean ejercicios que el alumno resuelve con ayuda. Una pantalla de ejemplo podemos verla en la figura 10.

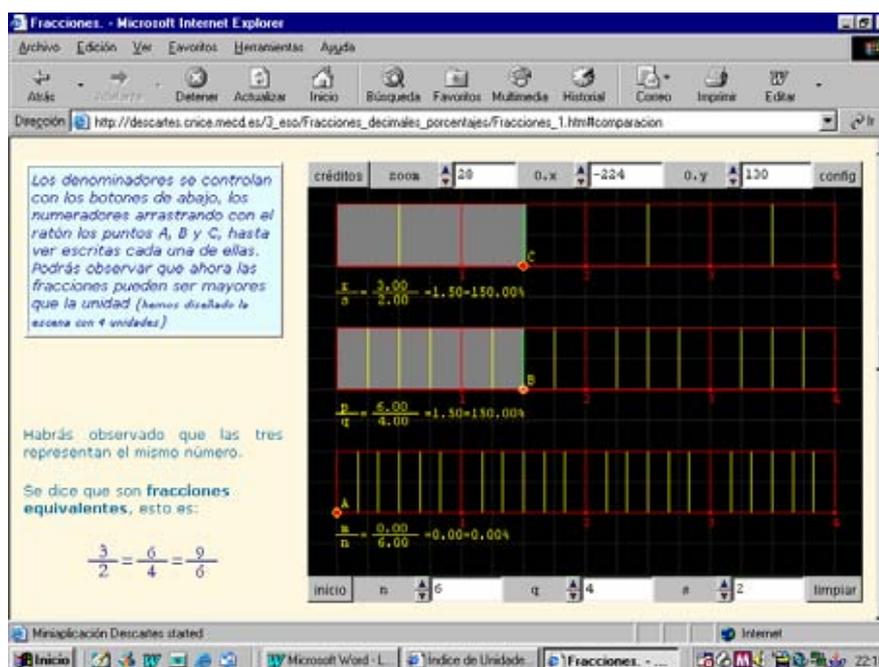


Figura 10



Las unidades didácticas a disposición del profesorado y cualquier persona con un mínimo conocimiento de creación de páginas web puede modificar fácilmente el texto y ejercicios de la unidad adaptándolo a sus alumnos. También hay cursos gratuitos por Internet para aprender a manejar la herramienta y crear unidades y aplicaciones nuevas. Toda la información puede encontrarse en la dirección

<http://descartes.cnice.mecd.es/>

donde nos encontraremos con la pantalla de la figura 11. En ella aparecen todas las posibilidades, incluyendo un apartado de experiencias en donde profesores que hemos trabajado en los cursos de formación contamos cómo hemos utilizado la herramienta, especificando las unidades utilizadas y la forma de llevarlas a clase y evaluarlas.

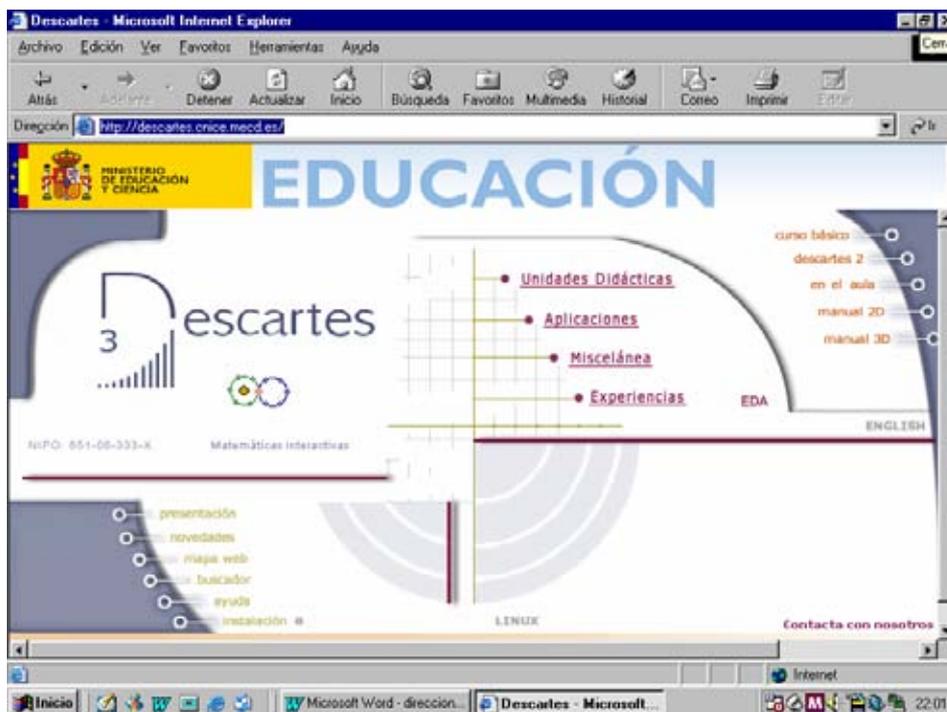


Figura 11

Para terminar presentamos una serie de materiales que, de forma equivalente, se pueden encontrar en muchas comunidades autónomas. Nosotros presentamos la que corresponde a la Junta de Andalucía, aunque es un material que es de libre acceso por parte de cualquier persona desde Internet. En la dirección:

http://www.juntadeandalucia.es/averroes/recursos/area_matematica.php3

se puede encontrar mucho material útil para el profesor y en concreto muchas actividades interactivas para los alumnos. Por ejemplo, en el apartado de *Refuerza y*



amplía tus matemáticas, se pueden encontrar muchas pantallas con ejercicios a realizar directamente y además se van añadiendo a la lista los ya hechos a medida que se consiguen realizar correctamente. En la figura 12 podemos ver un ejemplo de una de ellas.

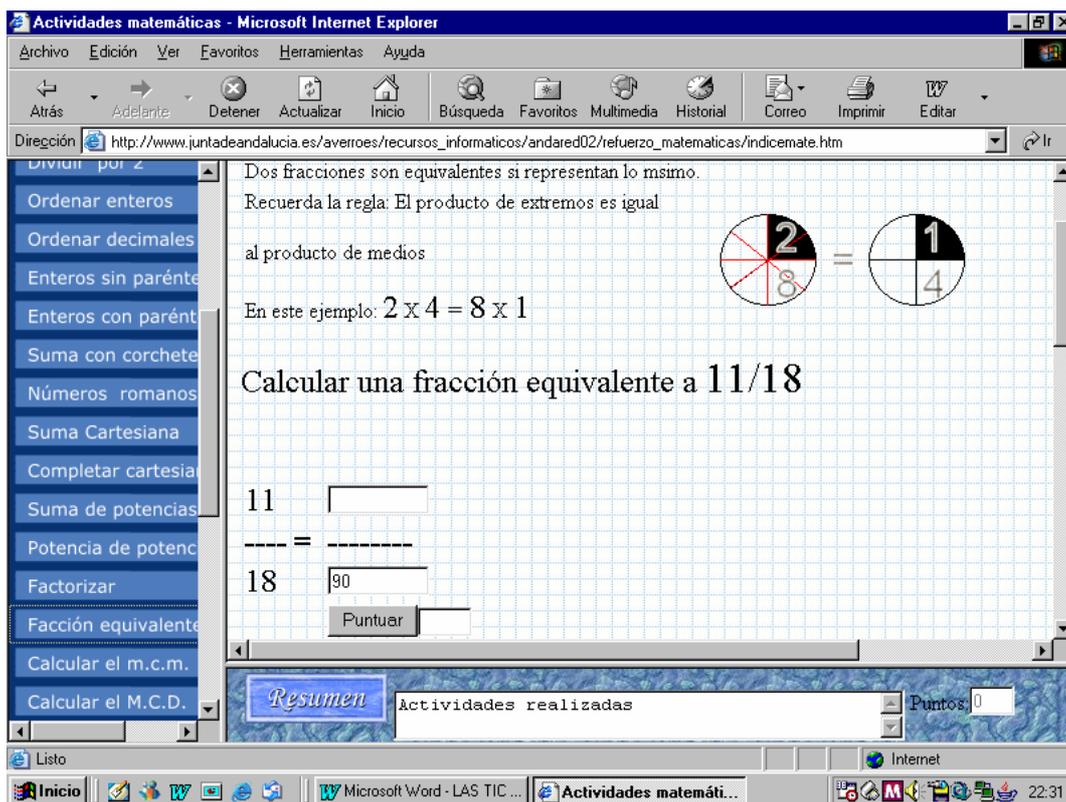


Figura 12

A veces podemos encontrar en Internet no exactamente programas interactivos, sino ejemplos visuales que permiten ver muchas propiedades matemáticas de una forma muy clara. Para ello, se utilizan archivos de movimiento en gif o archivos en java que permiten presentar demostraciones y comprobaciones matemáticas. Existen miles de páginas donde encontrar estos elementos, un ejemplo de una muy completa es la siguiente donde podemos encontrar 279 ejemplos en java para diversas partes de la asignatura:

<http://www.ies.co.jp/math/java/>

en la imagen siguiente puedes ver un ejemplo de como se dibuja la gráfica de la función seno.

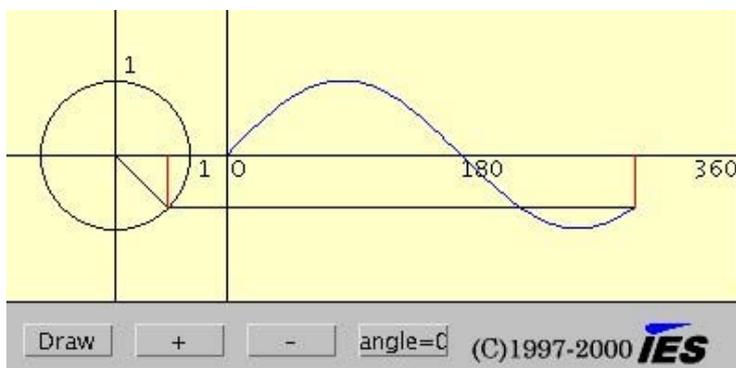


Figura 13

Para terminar

Nuestro objetivo en este artículo ha sido mostrar un poco las posibilidades que el ordenador muestra como herramienta didáctica en clase de matemáticas. Hemos hablado de parte del material que en algún momento hemos utilizado en mayor o menor medida, pero siempre dejando claro que en Internet se pueden encontrar de forma gratuita muchas más posibilidades y que depende del profesor seleccionar aquella que más le interese, atendiendo al tipo de alumnado de que dispone.

Siempre hemos intentado que la utilización del ordenador no sea abusiva (para no perder su potencia motivadora) y utilizarlo siempre englobado dentro de la práctica diaria, es decir que no se viera como un hecho extraño y aislado. Hemos potenciado también que el alumno fuera quien investigara y elaborara las matemáticas que debía aprender, es decir, que no fuera un sujeto pasivo sino el motor del proceso de aprendizaje y tenemos que decir que aunque las TIC no son un milagro (también hemos tenido alumnos a los que ha sido imposible interesar en el proceso) sí hemos conseguido que alumnos que en una clase tradicional no hacen nada provechoso, delante del ordenador participen al menos del trabajo propuesto.

Si conseguimos que alguno de los lectores que hayan conseguido llegar hasta aquí (lo que es un gran esfuerzo, hay que reconocerlo) se sienta con el interés de probar alguna de las opciones que hemos ofrecido, merecerá la pena el trabajo desarrollado en este artículo.

Por si alguien quiere ponerse en contacto con nosotros para cualquier comentario o consulta os esperamos en:

<http://ficus.pntic.mec.es/~jmus0004>



Paso a paso

Ejercicio 1

Calcula: $\frac{3}{4} : \left(\frac{1}{6} - 5 + \frac{1}{2} \right)$

Solución:

En la **Entrada de Expresiones** escribe: $3/4/(1/6-5+1/2)$

Pulsa **Calcular** (=), y obtendrás el valor $-\frac{9}{52}$.

Ejercicio 2

Calcula el producto de $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ por $\frac{5}{4} - \frac{2}{3}$

Solución:

Para respetar la jerarquía de operaciones, en la **Entrada de Expresiones** escribe:

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) * \left(\frac{5}{4} - \frac{2}{3} \right)$$

Tras pulsar **Calcular** obtienes $\frac{35}{72}$.

Ejercicio 3

Halla la expresión decimal de $\frac{34}{13}$.

¿Su expresión decimal es periódica? En caso afirmativo, ¿cuál sería el periodo?

Solución:

Escribe en **Entrada de Expresiones** $34/13*1.0$, pulsa **Calcular**⁷ y obtendrás 2.6154.

⁷ Siempre que se trabaja con fracciones el resultado es una fracción, para obtener la expresión decimal necesitamos que aparezca algún decimal por eso multiplicamos por 1.0.

Como sabes todo número racional tiene una expresión decimal exacta o periódica. **WIRIS** por defecto sólo escribe cinco cifras significativas.

En el caso del número anterior no sabemos si tiene más cifras decimales, ni podemos averiguar el periodo con las que conocemos.

Para conseguir más cifras significativas debes usar la orden **precisión**.

Escribe en el lugar correspondiente:

Precisión(15);34/13*1.0

Al pulsar en el igual obtienes el valor **2.61538461538462**.

Luego el número es periódico puro y su periodo es 615384.

Ejercicio 4

Calcula el valor de $\frac{7}{5} - 3$, y su valor absoluto.

Solución:

Escribe en la **Entrada de Expresiones** $7/5-3$ y pulsa el igual, obtendrás $-\frac{8}{5}$.

En la solapa de **Operaciones** elige el valor absoluto (es el icono segundo por la izquierda de la parte de abajo, ||) y cuando aparezca en la pantalla escribe de nuevo $7/5-3$. Al pulsar **Calcular** obtenemos $\frac{8}{5}$.



Ejercicio 5

Halla el error absoluto y relativo que se comete al tomar 0.165 como valor de $\frac{13}{79}$.

Solución:

Introduce en **Entrada de Expresiones** **[13/79-0.165]** y pulsa **Calcular**, 0.00044304. Observa que el error cometido es menor que una milésima.

Para calcular el error relativo debe dividir el valor absoluto anterior entre la fracción, escribe por tanto en **Entrada de Expresiones**

$$|13/79-0.165|/(13/79),$$

y pulsa **Calcular**, con lo que obtendrás el valor 0.0026923.

Práctica

Ejercicio 6

Escribe la fracción resultante de las siguientes operaciones:

$$a) 5 : \left(6 + \frac{1}{4}\right) - \frac{3}{5} ; b) \frac{27-34}{51-67} ; c) \frac{\frac{3}{4}}{\frac{9}{7}}$$

Ejercicio 7

¿Cuánto queda al restarle al doble de la suma $\frac{7}{3} + \frac{-3}{4}$ la quinta parte de $7 - \frac{3}{4}$?

Ejercicio 8

He obtenido el resultado $\frac{22}{5}$ al efectuar, ¿qué operación?

$$a) \frac{77}{6} \div \frac{105}{6} ; b) \frac{77}{105} \div \frac{6}{6} ; c) \frac{77 \cdot 105}{6} ; d) \frac{77}{105 \cdot 6}$$

Ejercicio 9

Halla las expresiones decimales de las fracciones siguientes y escribe sus periodos.

$$\frac{1}{7} ; \frac{2}{7} ; \frac{3}{7} ; \frac{4}{7} ; \frac{5}{7} ; \frac{6}{7}$$

¿Encuentras alguna curiosidad en esos periodos?

Ejercicio 10

Indica qué tipo de expresión decimal (exacta, periódica pura o mixta) tienen los siguientes números racionales:

$$a) \frac{47}{23} ; b) \frac{2632}{2975} ; c) \frac{4289}{3125} ; d) \frac{67}{43}$$

Ejercicio 11

¿Cuántas cifras decimales tiene el periodo de la expresión decimal de $\frac{103}{131}$?

Ejercicio 12

Indica de los siguientes números, cuáles son racionales y cuáles irracionales a partir de su expresión decimal.

$$a) \sqrt[5]{32} ; b) \sqrt{17} ; c) \sqrt[3]{\frac{15}{9}} ; d) \sqrt[4]{\frac{16}{81}}$$

Ejercicio 13

Halla el valor absoluto de las expresiones:

$$a) \frac{4}{3} - \sqrt{2} ; b) \pi - e ; c) \varphi - \sqrt[3]{7}$$



Ejercicio 14

Determina el error absoluto y relativo que se obtiene al tomar el valor aproximado de $\frac{13}{7}$, con sólo dos cifras decimales.

Ejercicio 15

Halla el error absoluto y relativo que se obtiene al aproximar π por el valor 3'1416. ¿Cuál es la cota de error que se obtiene en cada caso?

Ejercicio 16

De una encuesta realizada entre 1200 jóvenes aficionados a "la movida", la tercera parte eran menores de edad. De ellos tres quintas partes eran mujeres y de estas una sexta parte fuma más de un paquete de cigarrillos al día. Calcula, con una sola operación compuesta, cuántas jóvenes de la muestra tomada fuman más de una cajetilla al día.

Ejercicio 17

El 10% de los alumnos de nuestro centro están cursando un módulo de formación profesional. Si el 60% de ellos están matriculados en primero, ¿cuántos alumnos hay matriculados en 2º sabiendo que en total hay 650 alumnos en el instituto?

Ejercicio 18

Necesitamos comprar una alfombra cuadrada que ocupe 12 m². ¿Cuál debe ser el valor aproximado del lado tomado en centímetros? ¿Qué error se comete al tomar esa medida para el lado?

Ejercicio 19

Halla la arista de un cubo de 5 dm³ de volumen. Si se redondea a milímetros, ¿qué error relativo se comete?

Jesús Fernández Domínguez. Profesor de Matemáticas en el I.E.S. Macarena de Sevilla. Miembro de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES. Ha participado en proyectos de investigación y coordinado grupos de trabajo sobre la utilización de las T.I.C. en el aula de matemáticas. También ha trabajado en proyectos de innovación sobre la atención a la diversidad en el aula de matemáticas. Coautor de libros de texto para bachillerato.

José Muñoz Santonja. Catedrático de Matemáticas en el I.E.S. Macarena de Sevilla. Miembro de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES. Miembro del colectivo andaluz "Comunicar: Medios de comunicación en las aulas". Miembro del Grupo Alquerque sobre la utilización de juegos en clase de matemáticas. Miembro del proyecto ESTALMAT (Estímulo del TALEnto MATemático) Andalucía. Coautor de libros de texto de matemáticas para secundaria y bachillerato. Sus líneas de trabajo son: matemáticas recreativas, magia matemática, medios de comunicación, teatro y matemáticas, juegos,....