



Coordinado por
Agustín Carrillo de Albornoz

Actividades de aprendizaje para Geometría analítica en el ambiente interactivo RecCon

José Carlos Cortés y Lourdes Guerrero

Resumen

Se exponen los resultados del diseño de secuencias de actividades basadas en el ambiente informático RecCon. Dichas actividades tienen el propósito de favorecer el entendimiento de conceptos y desarrollar habilidades en los estudiantes, relacionados con las líneas temáticas fundamentales del curso de Geometría analítica del bachillerato general. Particularmente, se documenta el trabajo de diseño de dos secuencias de actividades interactivas: una relacionada con la recta y otra con la circunferencia.

Introducción

En el presente artículo se documenta el trabajo de diseño de diferentes actividades didácticas implementadas en una plataforma informática interactiva a través del software RecCon. El objetivo fundamental de estas actividades es favorecer el entendimiento de los temas propios de la geometría analítica del bachillerato, haciendo énfasis en las ideas y procesos subyacentes en los contenidos curriculares actuales en este nivel educativo.

RecCon ha sido diseñado con fines educativos, basando sus características fundamentales en el hecho de que, en matemáticas, es necesario el uso de diferentes representaciones de los objetos matemáticos (Duval, 1988). Este uso de diferentes representaciones no solamente se refiere a la forma en que se comunica el conocimiento matemático a los estudiantes; más bien tiene que ver con el hecho de que los estudiantes necesitan interactuar con los objetos matemáticos en muchas formas, para que puedan conocerlos, entenderlos y saber usarlos en formas apropiadas. Esto es, la experimentación interactiva y de manipulación de los objetos matemáticos favorece el entendimiento y manejo de los mismos. Éstas pueden darse sólo a través de las representaciones con que se expresan los objetos abstractos de las matemáticas y, por tanto, es necesario que los estudiantes tengan un entendimiento claro de estas representaciones y sean capaces de manejarlas y usarlas con flexibilidad.

Los tratamientos o cambios en una representación específica del objeto matemático, así como la conversión de una representación a otra, son



transformaciones que revelan diferentes características de los objetos abstractos, y permiten llegar a conocerlos en su globalidad y particularidades específicas.

¿Qué es RecCon?

RecCon (Rectas y Cónicas) es un software de apoyo al aprendizaje de temas de geometría analítica para bachillerato¹ que parte de la idea teórica fundamentada en la importancia que tiene el uso de múltiples registros de representación de una idea matemática en el aprendizaje conceptual de los objetos matemáticos. Es en este sentido que en RecCon se integra una serie de actividades en las que están presentes diferentes tipos de representación (tablas, gráficas y ecuaciones).

En cada secuencia de actividades, RecCon genera una serie de ejercicios de manera semi aleatoria que el usuario tiene la oportunidad de responder para ser evaluado de manera inmediata. Las respuestas del usuario pueden darse a través de la manipulación de una gráfica, o la introducción de datos de tipo numérico y algebraico (Cortés, 2005).

Marco Teórico

Dos aspectos teóricos han sido considerados en el diseño de las actividades de RecCon: La teoría de Registros Semióticos de Representación (Duval, 1988); y, las ideas de visualización matemática (Hitt, 1992).

Registros Semióticos de Representación

En matemáticas es necesario representar los objetos matemáticos para poder comunicarlos y, en muchas ocasiones, para construirlos y analizar sus propiedades. Esta característica de los objetos matemáticos, que los distingue de otros, se debe a su carácter abstracto.

Al representar los objetos se intenta expresar sus significados, proceso que enlaza el pensamiento conceptual (figurativo, estructurado) con el pensamiento operativo (procedimental, operacional).

De acuerdo con Duval (1993) existe la posibilidad de confundir el objeto matemático con una de sus representaciones, ya que "*toda representación es cognitivamente parcial en referencia a lo que ella representa y de una*

¹ Para más información sobre RecCon consultar la página de la revista UNION <http://www.fisem.org/paginas/unionrevista.php> el Número tres.



representación a otra, no son los mismos aspectos de un contenido los que son representados" (Ibid, 119). Por lo tanto, es importante que un objeto matemático sea presentado en diferentes representaciones.

Ahora bien, la relación existente entre los diferentes modos de representación, debe necesariamente ser considerada dentro de las actividades de aprendizaje con la finalidad de tener una multi representación del concepto, que lo globalice y lo particularice.

En diferentes estudios, se ha comprobado que la actividad cognitiva asociada al entendimiento de las variables visuales en un tipo de representación es diferente a otro tipo y que esta actividad causa un conflicto que no es trivial. Por ejemplo, Hitt (1992) detectó errores en profesores de matemáticas al no contextualizar analíticamente una variable independiente que aparece en una gráfica; Duval (1988) afirma que es de mayor dificultad el paso de una representación gráfica a una algebraica; Mejía (1997) encontró que muchos estudiantes tienen dificultad en establecer conexiones entre datos gráficos y numéricos.

Estas investigaciones ponen en evidencia la necesidad de realizar actividades donde estén presentes múltiples representaciones, con las que además se promueva la conversión de una representación a otras distintas. Este tipo de transformación permite observar un objeto desde diferentes perspectivas; así mismo, favorece el desarrollo de habilidades operativas, útiles para manejar y usar los objetos matemáticos con flexibilidad.

Un aspecto que debe ser considerado en las actividades fundamentadas en la teoría de los Registros Semióticos de Representación, es la forma en que se hacen las conversiones entre registros de representación. Una conversión específica tiene asociado un proceso también específico. Es en este sentido que es importante utilizar las reglas de correspondencia semiótica. Por ejemplo, el proceso de conversión *ecuación* → *gráfica*, que generalmente utiliza una conversión intermedia (*ecuación* → *tabla* → *gráfica*), puede realizarse sin necesidad de pasar por el registro numérico (construir una tabla) cuando se tienen identificadas las unidades significativas propias de la escritura algebraica además de conocer cómo influye cada una de ellas en la gráfica objetivo. Aquí es conveniente retomar lo dicho por Duval (1988): "*La lectura de representaciones gráficas presupone la discriminación de las variables visuales pertinentes y la percepción de las variaciones correspondientes de la escritura algebraica*" (Ibid, 240). Considerando como equivalente su forma inversa, se puede decir que "*la comprensión de la escritura algebraica lleva a determinar qué está representando gráficamente cada uno de los términos de esta escritura*".

Las actividades incluidas en RecCon se han diseñado precisamente para hacer énfasis en el proceso de conversión entre representaciones, poniendo atención específicamente en el entendimiento de las variables visuales, tanto del registro



algebraico como el numérico; esto es, aquellas entidades que son necesarias para hacer la conversión de un registro específico a uno gráfico.

Visualización Matemática

La visualización matemática es una herramienta útil y necesaria para el aprendizaje de las matemáticas. Los procesos visuales involucran el pensamiento figurativo y al operacional, por lo que podemos considerar a este proceso un prelude a la abstracción de conceptos (Hitt, 1992) que permitirá formar modelos de una situación. La visualización va más allá de la simple percepción y permite apoyar la formación de imágenes conceptuales (Hitt, Chávez, 1992).

Los conceptos matemáticos pueden ser representados por figuras, gráficas, fórmulas, tablas, símbolos o expresiones verbales y en cada una de estas representaciones existen variables significativas (por ejemplo en el gráfico está la escala) por lo que un proceso visual involucra la habilidad para detectar variables significativas y operar apropiadamente con ellas en cada una de estas representaciones, involucra también la traducción en términos cognitivos de las relaciones abstractas de la manipulación y transformación de las representaciones creando imágenes visuales poderosas.

Registros Semióticos de Representación a través de RecCon

RecCon contiene actividades diseñadas para: a) ayudar al usuario a identificar las unidades significativas dentro de una ecuación, una tabla y una gráfica; y, b) favorecer la aplicación de las variables visuales en los procesos de tratamiento y conversión de registros de representación.

Por otro lado, las secuencias de actividades se realizan a través de ejercicios propuestos a ser resueltos por el estudiante, considerando que una componente importante para el aprendizaje de un concepto es el desarrollo de habilidades, ya que, como dicen Suydam-Dessart *"las habilidades se obtienen de hacer"* (Ibid,1980,208).

Resumiendo los objetivos didácticos que se persiguen con las actividades de RecCon, se tiene:

1. Que el estudiante tenga la oportunidad de trabajar en un ambiente interactivo que integre de manera simultánea tres diferentes registros de representación (numérico, algebraico y gráfico) para que pueda experimentar y realizar conversiones que le ayuden a articular de una mejor manera las correspondencias entre ellos.



2. Mostrar una estrategia educativa desde un punto de vista computacional para abordar un tema de matemáticas del bachillerato.
3. Contar con un software con actividades integradas en él, que sea útil para profesores y estudiantes. Por un lado, los profesores pueden utilizarlo como una herramienta didáctica en el salón de clase; para explicar algún tópico o para ejemplificar sus explicaciones tomando como base las actividades propuestas. Por otro lado, los estudiantes pueden utilizarlo como un ambiente interactivo que favorece la experimentación y práctica asociada a conceptos matemáticos específicos, con el propósito de ayudar a su entendimiento y al desarrollo de destrezas de los estudiantes.

Actividades propuestas en RecCon

Las secuencias de actividades implementadas en RecCon están enmarcadas en los contenidos, ideas y procesos fundamentales del currículo de Matemáticas III (Geometría analítica) del bachillerato general. Particularmente, estas ideas hacen énfasis en el carácter de la geometría analítica como un área de las matemáticas que permite el análisis de problemas geométricos con los recursos algebraicos, siendo necesario el tránsito de una gráfica a su ecuación y viceversa (DGB, 2006).

Así mismo, los contenidos temáticos incluidos en RecCon, coinciden con las líneas curriculares generales del curso mencionado. Éstas son: plano cartesiano y distancia entre puntos, la línea recta, la circunferencia, la parábola y las cónicas (Ibid, 2006). En RecCon, estas líneas temáticas han sido estructuradas en un menú principal con las siguientes denominaciones (fig. 1):

- Distancia entre puntos se incluye en la opción **Puntos** del menú principal;
- La línea recta se incluye en la opción **Rectas** del mismo; y,
- La circunferencia, parábola y demás cónicas en la opción **Cónicas**.



Fig. 1. Implementación de las líneas temáticas en el menú principal de RecCon

Cada una de las opciones del menú despliega a su vez una nueva variedad de características asociadas con las líneas generales. Éstas han sido estructuradas de acuerdo a las unidades significativas en las diferentes representaciones (fig. 2).

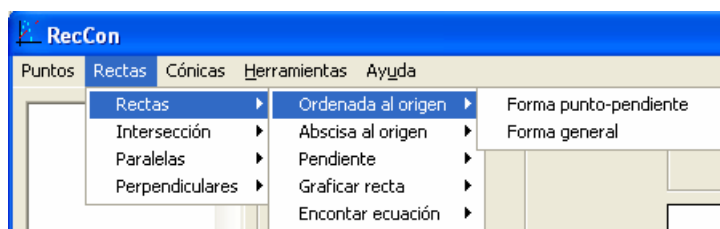


Fig. 2. Estructuración de unidades significativas en las líneas temáticas

Con el fin de mostrar el trabajo de diseño de las secuencias de actividades implementadas en RecCon, incluimos enseguida dos casos específicos: una secuencia relacionada con la línea recta y otra relacionada con la circunferencia. En el caso de la recta, las actividades tienen como objetivo la identificación de variables visuales significativas en la conversión *ecuación*→*gráfica*; esto es, la identificación de la ordenada al origen, la abscisa al origen y la pendiente de la recta partiendo de su representación algebraica. Por su parte, en la secuencia relacionada con la circunferencia el objetivo es apoyar el desarrollo de destrezas en los estudiantes, mediante ejercicios de conversión *ecuación*→*gráfica* y *gráfica*→*ecuación*.

Actividades relacionadas con la línea recta

El estudio de la línea recta es una de las actividades centrales en la geometría analítica del bachillerato. Entre sus objetivos está el empleo de distintas representaciones, identificando características fundamentales y ejercitando los procesos de transformación dentro de una misma representación (proceso de traslación, de acuerdo con Duval, 1988) así como de una representación a otra (conversión de representaciones).

En este sentido, esta secuencia se ha diseñado con base en la solución de ejercicios y problemas organizados en tres categorías:

- A) Obtención de la ordenada al origen partiendo de una ecuación;
- B) Identificar la abscisa al origen, dada la ecuación de la recta; y,
- C) Obtener la pendiente partiendo nuevamente de la ecuación.

Obtener la ordenada al origen de la recta a partir de su ecuación

La selección de la secuencia de opciones **Rectas**→**Ordenada al origen** del menú de RecCon, despliega a su vez dos posibles opciones de trabajo. La primera corresponde a la ecuación de una recta escrita en su forma común ($y = mx + b$) y la segunda, a la forma general ($ax + by + c = 0$).



Por ejemplo, la elección **Rectas**→**Ordenada al origen**→**Forma común**, despliega automáticamente la pantalla mostrada en la fig. 3.

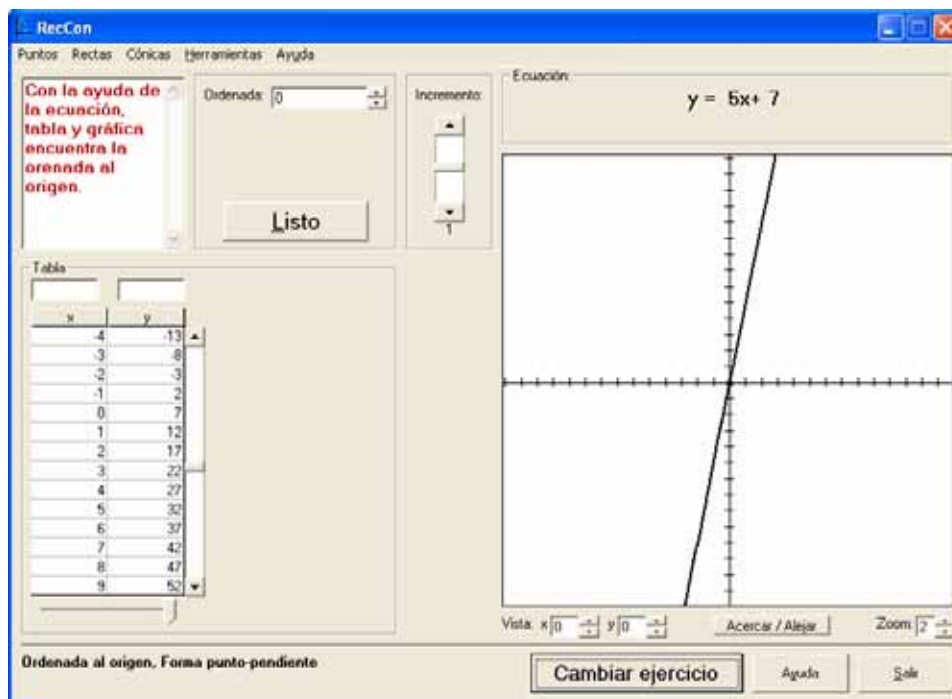


Fig. 3. Resultado de la elección **Rectas**→**Ordenada al origen**→**Forma común**

Como puede observarse en la fig. 3, esta interfase se compone de los siguientes elementos:

- Área de exposición de la ecuación a trabajar (área superior derecha), la cual se genera automáticamente de manera semi aleatoria.
- Área de graficación, en la que se incluye la gráfica de una recta que pasa por el origen y, por tanto, de ordenada al origen igual a cero. En esta región también se incluyen botones que permiten modificar el área de visualización de la gráfica, como el **Zoom** y el botón de **Acercar/Alejar**.
- Área de instrucciones (región superior izquierda).
- Región de entrada de datos (parte superior intermedia).
- Área numérica (tabla xy) desplegable.
- Barra de estado y botones para el cambio de ejercicios (parte inferior de la interfase).

En la fig. 4 se puede observar el tipo de actividad que se espera realice el usuario. Ésta consiste en llevar a cabo una transformación en la gráfica dada (tratamiento en el registro gráfico) con el fin de trasladar la recta, de tal forma que su ordenada al origen coincida con la ecuación dada.

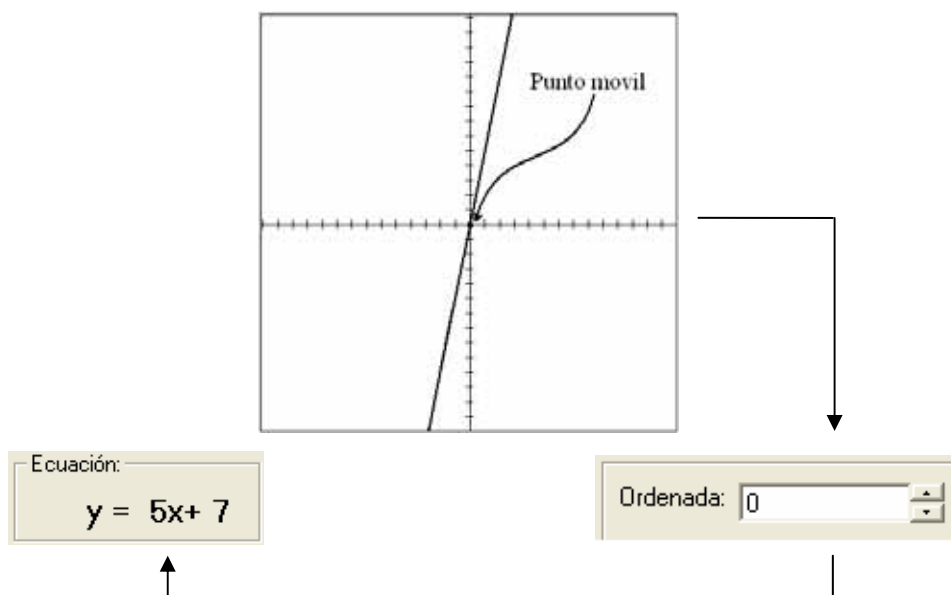


Fig. 4. Esquema del tipo de trabajo que se espera realice el estudiante

Este tratamiento en el registro gráfico se realiza colocando el puntero del ratón sobre el origen del sistema coordenado (punto resaltado en la fig. 4); una vez localizado, éste puede desplazarse a lo largo del eje vertical lo que a su vez modifica las condiciones de la recta en la gráfica (desplazamiento con respecto al sistema coordenado). Cuando el usuario considere que la gráfica que está manipulando es equivalente a la ecuación dada, deberá liberar el botón del ratón para fijar dicha gráfica.

En el momento en que se determina la gráfica de la recta, el recuadro correspondiente al valor de la ordenada muestra la ordenada al origen de dicha recta, de tal forma que el usuario puede comprobar si ésta corresponde a la ecuación dada. Así mismo, cuando el estudiante considera que ha obtenido la respuesta correcta, puede pulsar el botón **Listo** para obtener la evaluación de su trabajo (fig. 5 y fig. 6).

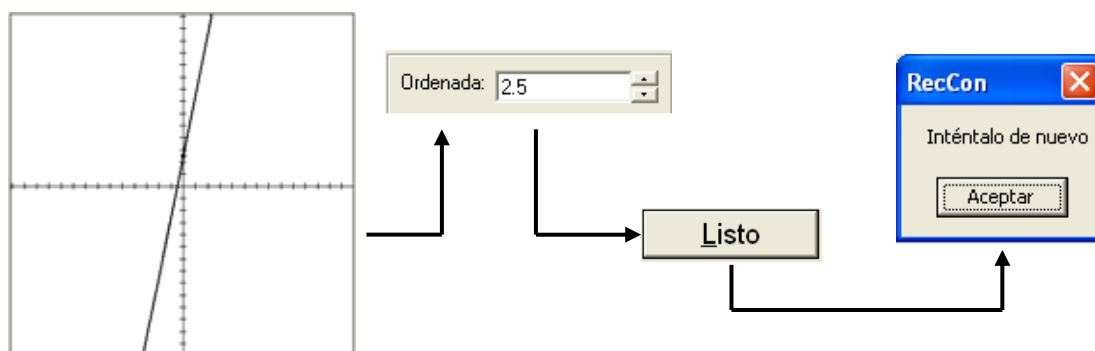


Fig. 5. Un primer resultado de la experimentación

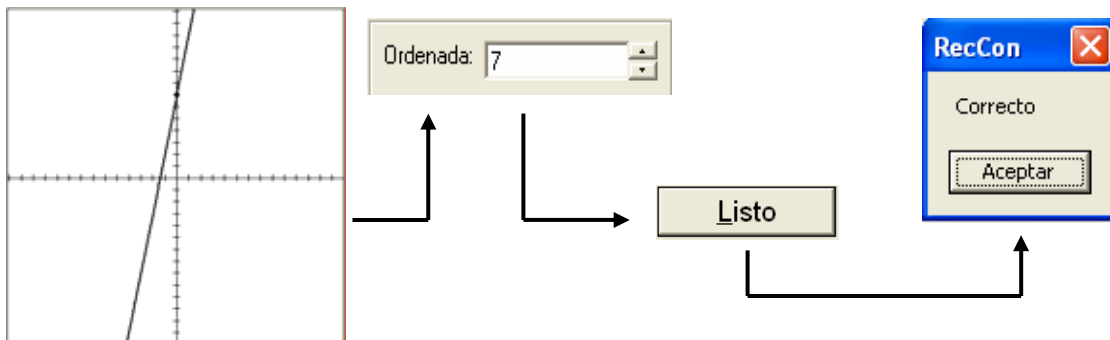


Fig. 6. Resultado esperado

Si la respuesta del estudiante es correcta, entonces RecCon muestra automáticamente un nuevo ejercicio de la secuencia; en caso contrario se puede continuar con la exploración de la situación presente y cambiar a otra en el momento que se desee presionando el botón **cambiar ejercicio**.

La acción que produce la secuencia de opciones **Rectas**→ **Ordenada al origen**→ **Forma común**, genera ejercicios con un grado de dificultad superior a los anteriormente ejemplificados, ya que la determinación de la ordenada al origen de una recta, a partir de la ecuación expresada en su forma general ($ax + by + c = 0$), requiere del análisis de más de un parámetro. Esto es, el estudiante tiene que descubrir la necesidad de analizar el comportamiento de dos parámetros para obtener la respuesta pedida (fig. 7).

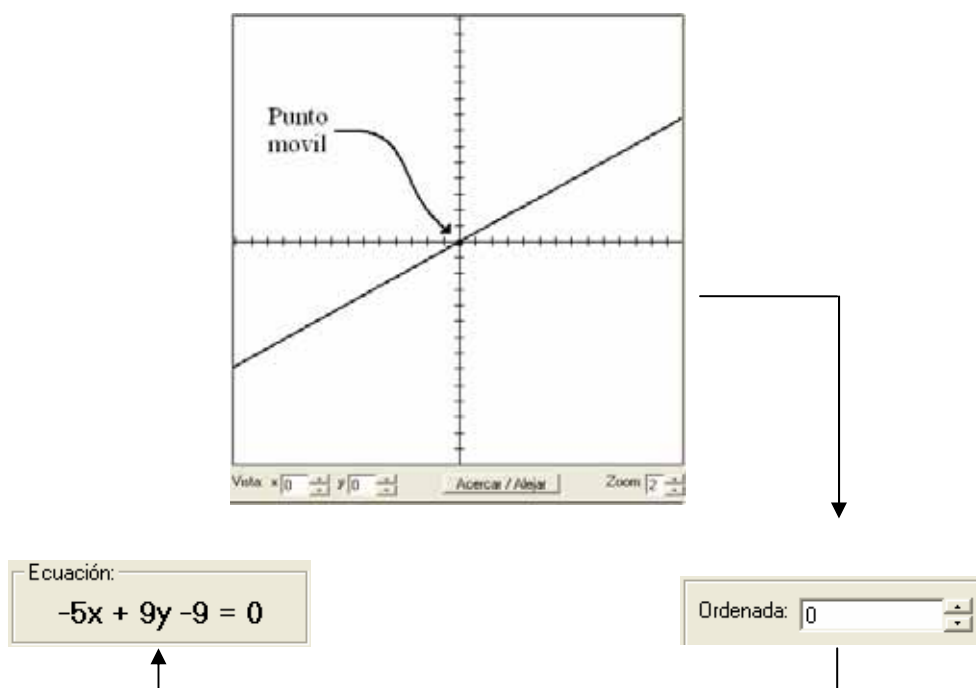


Fig. 7. Un ejercicio usando la forma general de la ecuación



Identificar la abscisa al origen, dada la ecuación de la recta

Al igual que en el caso de los ejercicios para determinar la ordenada al origen, los correspondientes a la abscisa se obtienen mediante la selección de la opción **Rectas** → **abscisa al origen**, donde nuevamente se puede utilizar la forma general o la forma común de la ecuación de la recta. Si se elige por ejemplo la forma común ($y = mx + b$) obtenemos una interfase como la que se muestra en la fig. 3, cambiando solamente la etiqueta de "ordenada" por la de "abscisa" y mostrando una ecuación particular.

En este tipo de actividades, la tarea consiste en hacer un tratamiento en el registro gráfico, arrastrando horizontalmente la línea que se muestra en el área gráfica para explorar diferentes situaciones que permitan llegar a determinar la abscisa de la recta cuya ecuación se ha dado.

Observe que, tanto en las secuencias de actividades para determinar la ordenada como aquellas en las que se debe identificar la abscisa al origen, la recta que se presenta al inicio en la gráfica, incluye ciertas condiciones específicas relacionadas con la ecuación. Esto se debe a que el tratamiento gráfico solamente implica una traslación de la recta para cambiar las condiciones de la ordenada y no la pendiente de la misma; por tanto, la pendiente de la recta en la gráfica inicial debe coincidir con la pendiente de la recta en la ecuación dada.

El problema de determinar la abscisa al origen de una recta explorando el comportamiento gráfico de la recta, es una actividad con un grado mayor de dificultad al problema de determinar su ordenada al origen ya que se requiere analizar la razón entre los dos parámetros de la ecuación en su forma común ($-b/m$). En la fig. 8 se muestra el tipo de actividad que se espera realicen los estudiantes cuando están explorando situaciones relacionadas con la abscisa al origen.

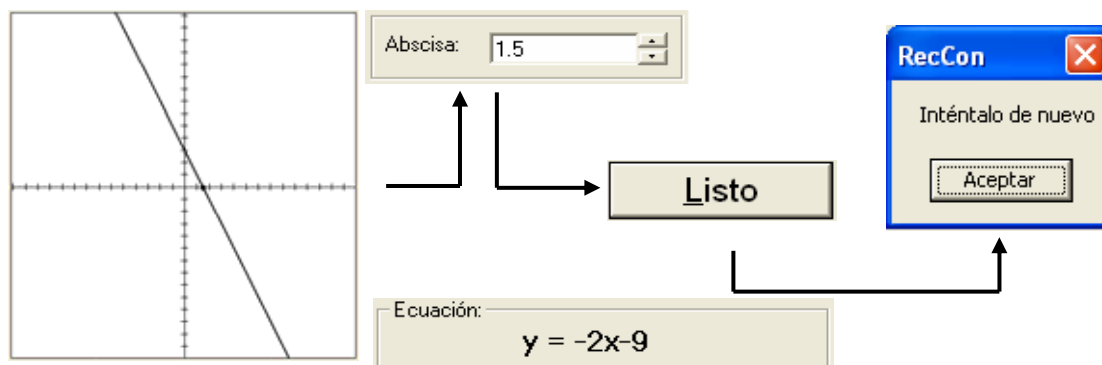


Fig. 8. Actividad para identificar la abscisa al origen de la recta



Hay situaciones, como la mostrada en la fig. 8, en las que la determinación de la abscisa al origen, mediante el tratamiento gráfico, resulta difícil por la exactitud con la que debe hacerse dicho trabajo. Por tal motivo, se da la oportunidad de escribir directamente el valor de la abscisa al origen en el cuadro de datos de la abscisa (fig. 9).

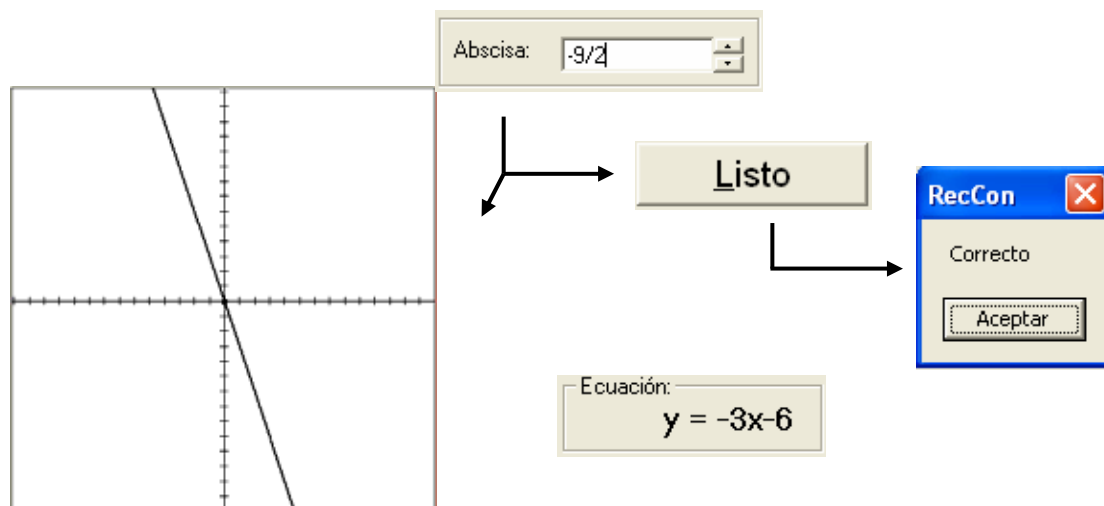


Fig. 9. Introducción numérica de la respuesta

Al igual que en el caso de los ejercicios descritos en el apartado anterior (determinar la ordenada al origen), la elección de la secuencia de opciones **Rectas**→**Abscisa al origen**→**Forma general**, origina actividades partiendo de la ecuación $ax + by + c = 0$. Sin embargo, contrario a las tareas de ordenada al origen, en este caso las actividades resultan del mismo orden de dificultad a las de la forma común, ya que en ambos casos el estudiante tiene que la necesidad de analizar el comportamiento de dos parámetros y la forma en que éstos se relacionan ($-b/m$ y $-c/a$).

Obtener la pendiente partiendo de la ecuación

Como se ha explicado en los apartados anteriores, cuando se realizan actividades partiendo de la ecuación de la recta, se pueden utilizar dos formas algebraicas diferentes: la forma común, $y=mx + b$ y la forma general $ax + by + c=0$. En el caso de las actividades para la pendiente, también pueden utilizarse estas dos opciones, solo que ahora la tarea consiste en obtener la inclinación y/o la pendiente de la recta (fig. 10).

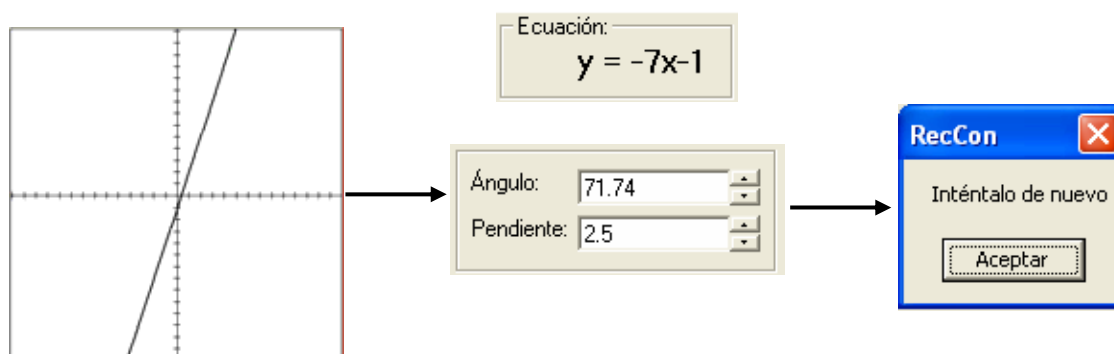


Fig. 10. Una actividad para determinar la inclinación y/o pendiente de la recta

Si bien se tiene la posibilidad de introducir los resultados a través de un tratamiento gráfico, como es de esperarse en estas actividades, la exploración por medio de un tratamiento numérico resulta más eficaz, debido al tipo de cantidades con las que se trabaja.

Las tres actividades previamente expuestas hacen énfasis en el entendimiento de los parámetros de una ecuación lineal; es decir, nos interesa que el estudiante identifique la relación entre cada uno de los parámetros y las variables visuales. Esto es, reconocer qué representan cada uno de los parámetros en una ecuación lineal en una gráfica. Estos parámetros o coeficientes son precisamente las variables significativas; aquellas que dan la información requerida para determinar el comportamiento gráfico de una ecuación.

De igual manera en estas actividades se enfatiza la relación entre las representaciones gráfica y algebraica así como la conversión de una a otra.

Uno de los aspectos importantes para realizar la conversión *gráfica*→*ecuación* es encontrar las variables significativas de una gráfica y ver cómo se relacionan con la escritura algebraica, en el caso de gráficas de líneas rectas estos parámetros pueden ser:

1. La intersección de la recta con el eje "y", cuya traducción en términos algebraicos corresponde al término independiente (b en la forma común de la recta y c/b en la forma general).
2. La intersección de la recta con el eje "x", que al dividir al término independiente y cambiarle de signo dará el valor de la pendiente.
3. La inclinación que tiene la recta, lo cual determina el signo de la pendiente (positiva o negativa).
4. En conjunto, la intersección con el eje "x" y la inclinación de la recta, determinan el coeficiente de la variable "x" en la ecuación.



A su vez, en la conversión *ecuación*→*gráfica* se debe conocer lo que representa cada uno de los parámetros de la escritura algebraica y relacionarlos con la gráfica. Por ejemplo, para el caso de las ecuaciones lineales escritas en la forma común, $y = mx + b$, estos son:

1. El coeficiente independiente (b), compone la intersección de la línea con el eje y .
2. El coeficiente de “ x ” (m), representa la pendiente de la recta. Particularmente, su signo (positivo, negativo o cero) indica el tipo de inclinación (menor de 90° , mayor de 90° o cero, respectivamente) de la gráfica.
3. El cociente $-b/m$, que representa la intersección de la línea con el eje “ x ” (es decir, la abscisa al origen).

En el caso de las ecuaciones escritas en la forma general, $ax + by + c = 0$, las variables significativas que permiten la conversión *ecuación*→*gráfica* son:

Actividades relacionadas con la circunferencia

El estudio de la circunferencia es una de las actividades fundamentales en la geometría analítica. A nivel escolar este concepto puede servir para establecer un vínculo entre la geometría euclidiana y la geometría analítica ya que, al igual que la recta, es un concepto que se estudia en ambas asignaturas. Los estudiantes de bachillerato tienen una amplia experiencia previa con la circunferencia, tanto de sus características básicas (centro y radio) como de algunas propiedades que involucran a la circunferencia y sus segmentos, rectas y ángulos característicos.

El objetivo de las actividades con la circunferencia es establecer relaciones entre estos conceptos significativos y las características que presenta la ecuación de la circunferencia. Es en este sentido que las actividades que se describen a continuación hacen énfasis en la conversión *gráfica*→*ecuación* y *ecuación*→*gráfica*.

En RecCon, las actividades relacionadas con la circunferencia se activan seleccionando la secuencia de opciones **cónicas**→**círculo** del menú principal, haciendo énfasis en el hecho de que la circunferencia es una de las curvas cónicas (ver fig. 11).

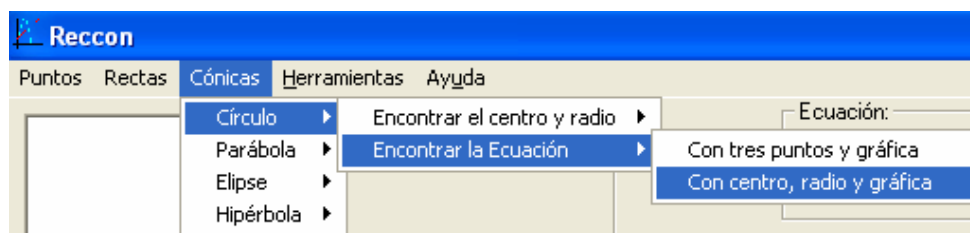


Fig. 11. Acceso a las actividades de la circunferencia

Actividad de conversión ecuación \rightarrow gráfica en la circunferencia

Para trabajar esta actividad se selecciona la opción **encontrar el centro y radio \rightarrow con centro, radio y gráfica**, que activará una pantalla semejante a la de la fig. 3, sólo que con la información correspondiente a la circunferencia (fig. 12).

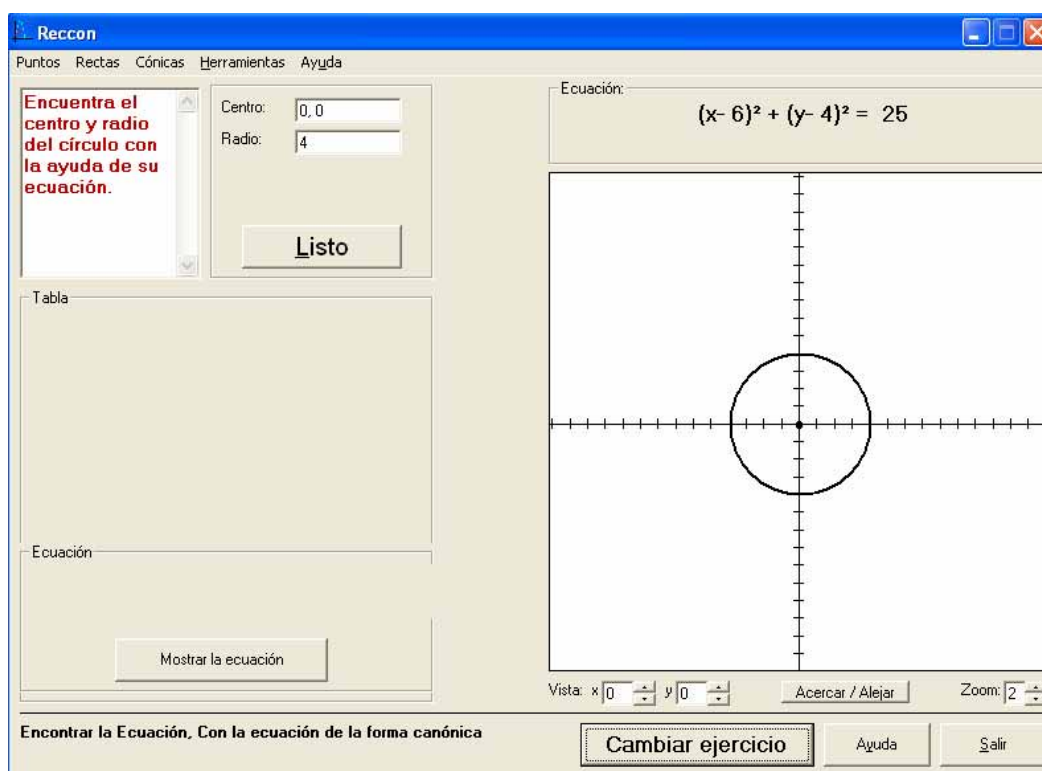


Fig. 12. Interfase de las actividades para la circunferencia

La tarea del usuario consiste entonces en mover y ajustar la circunferencia, trasladándola a partir de su centro y dilatándola utilizando su radio (fig. 13) para que la gráfica sea la representación de la ecuación que se presenta (ver secuencia de figuras 14 a 16).

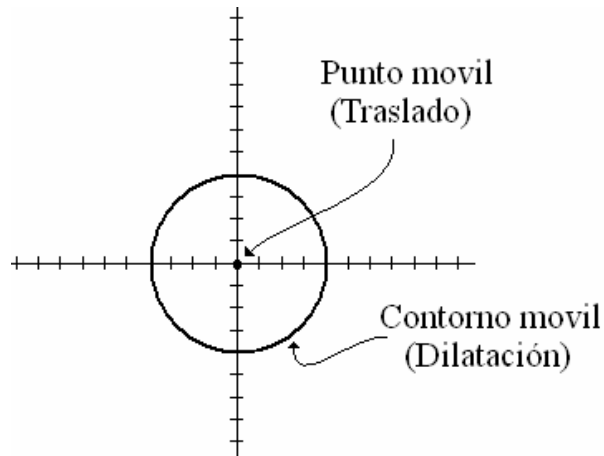


Fig. 13. Dos formas de hacer un tratamiento gráfico para la circunferencia

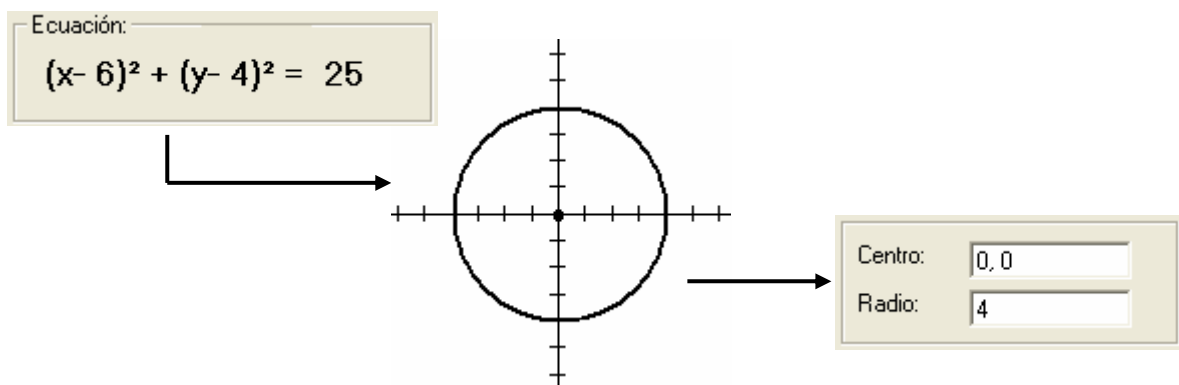


Fig. 14. Situación inicial de la actividad

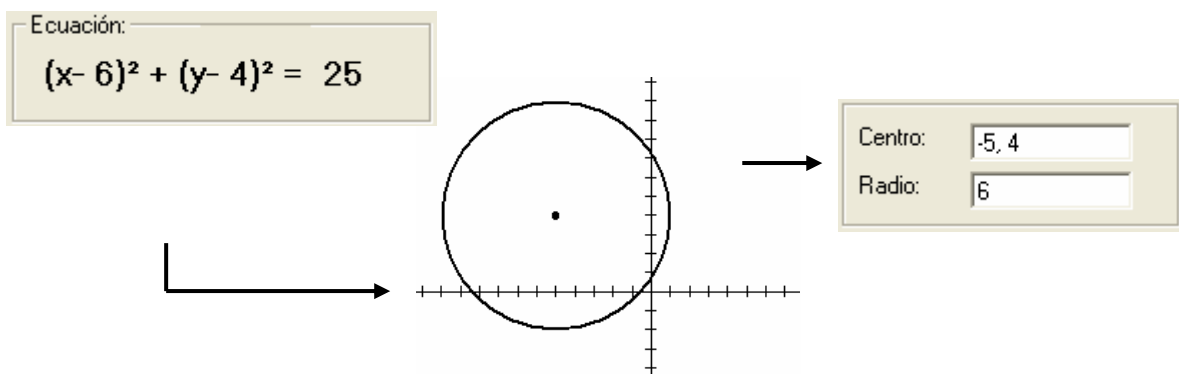


Fig. 15. Resultado de un primer tratamiento

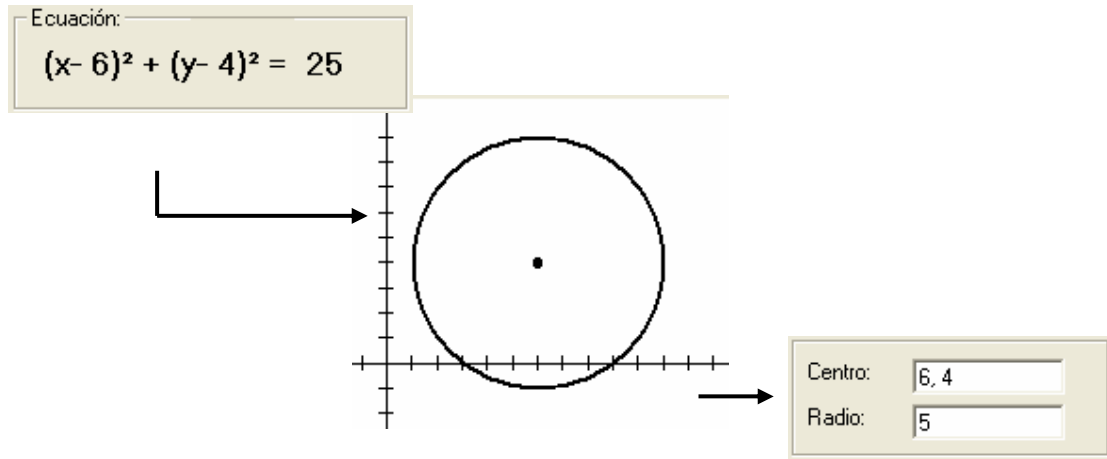


Fig. 16. Respuesta esperada

Actividad de conversión gráfica → ecuación en la circunferencia

Estas actividades se activan mediante la secuencia de comandos **encontrar la ecuación** → **con centro, radio y gráfica**, cuya interfase es la que se muestra en la fig. 17.

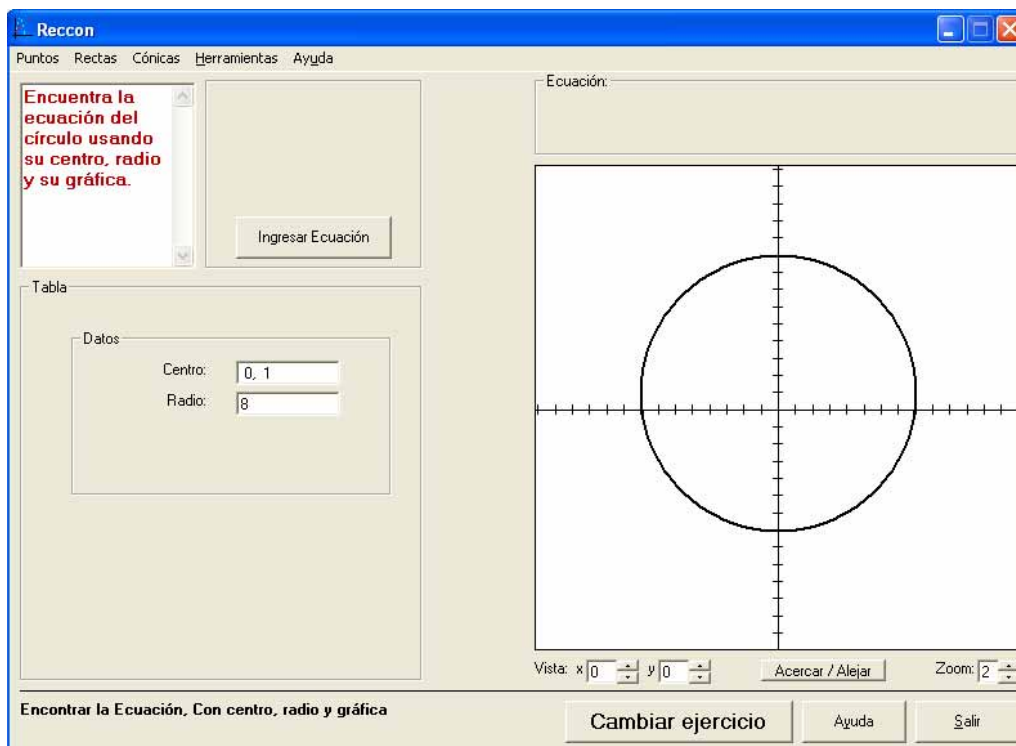


Fig. 17. Interfase de las actividades **gráfica** → **ecuación en la circunferencia**



Dos características especiales de esta interfase son: 1) la zona de datos, en donde se representan numéricamente las características de la circunferencia dada en la gráfica; y, 2) el botón ingresar ecuación, que despliega una calculadora especial incluyendo estructuras simbólicas específicas para las cónicas facilitando la introducción de la ecuación (fig. 18).

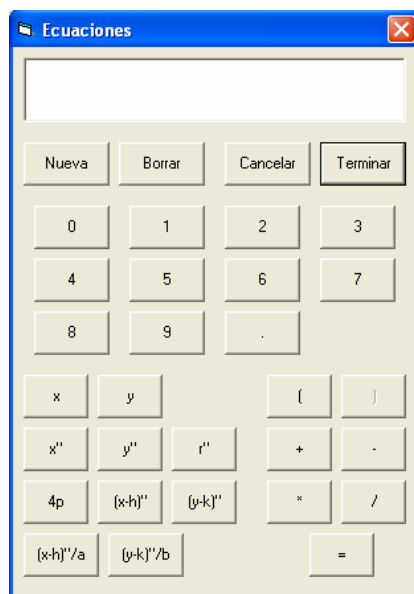


Fig. 18. Una calculadora con estructuras simbólicas específicas para las cónicas

Cuando se considera que la estructura simbólica introducida en la calculadora, corresponde a la ecuación de la circunferencia dada gráficamente, la tecla “terminar” permite la evaluación inmediata de la respuesta (fig. 19).

Secuencia de teclas para la introducción de la ecuación:

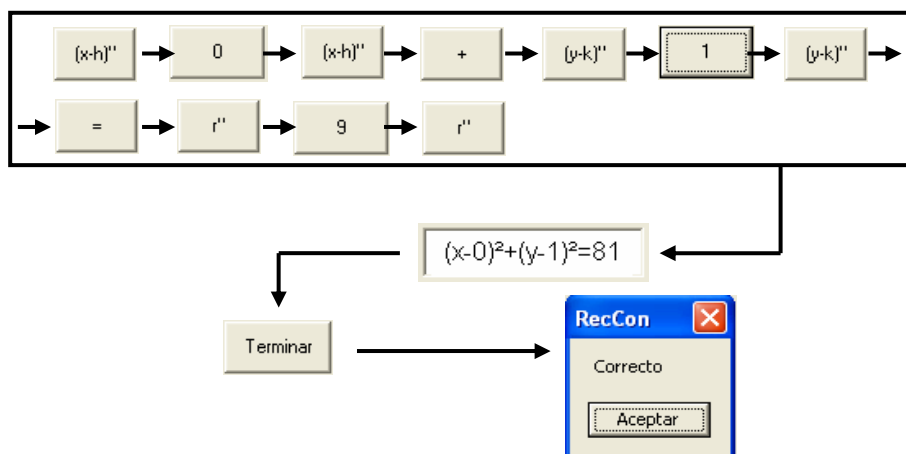


Fig. 19. Introducción de una ecuación y evaluación de la misma



Bibliografía

- Cortés, C. (2005) Manual del Software RecCon.
- DGB (2006). Dirección general del Bachillerato. Página de Internet de la Secretaría de Educación Pública. Disponible en: <http://dgb1.sep.gob.mx>. Consultada el 23/02/2006.
- Duval, R. (1988). Graphiques et Equations: l'Articulation de deux registres. En *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*. (1988). pp. 235-253.
- Duval, R. (1993). Semiosis y noesis. *Lecturas en didáctica de las matemáticas*. SME-CINVESTAV, México, pp. 118-144.
- Hitt, F. E. (1992). Dificultades en el paso de una representación gráfica a un contexto real y viceversa. En: *Memorias del IV Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática*. DME-CINVESTAV. MÉXICO 1992. pp.43-55.
- Hitt, F.- Chavez H. (1992). Visualización Relacionada a Conceptos de Cálculo con Microcomputadora. En: *Memorias de la VI Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa*. Vol. 2. UAEM. MÉXICO 1992. pp. 30-35.
- Mejía, H. (1997). Geometría Analítica, Gráficas y Tablas. *Memorias del Octavo seminario nacional de calculadoras y computadoras en educación matemática*. Universidad de Sonora. pp. 315-322.
- Suydam, M.- Dessart, D. (1980). "Skill Learning, Research in Mathematics Educations. En: R. Shumway (Ed.) *Research in Mathematics Education*, National Council of Teachers of Mathematics. pp. 207
- Tall, D.- West, B. (1987). Graphic Insight into Calculus and Differential Equations. En: Churchhouse, R. F. et al (eds.). 1987. *The influence of computers and informatics on mathematics and its teaching*. (ICMI). CAMBRIDGE: CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS. pp. 107-119.
- Tall, D. (1991). Computer environments for learning of mathematics. En: *Didactics of mathematics as a scientific discipline*. pp.189-199.

José Carlos Cortés, Cuerpo Académico de Enseñanza de las matemáticas.
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo. México.
jcortes@umich.mx

Lourdes Guerrero, Cuerpo Académico de Enseñanza de las matemáticas. Universidad
Michoacana de San Nicolás de Hidalgo. México.
gmagana@umich.mx