

## La razón de cambio (cociente de incrementos) desde un punto de vista gráfico y numérico

**José Carlos Cortés Zavala**

### Resumen

*Para el estudio de esta experiencia se utilizó un software<sup>1</sup> diseñado y desarrollado por el autor en el que se presenta un acercamiento funcional al concepto de derivada. En este software se resalta el aspecto gráfico y numérico de lo que es una razón de cambio y es esta parte del software la que se experimentó con estudiantes de bachillerato para determinar si un acercamiento del tipo numérico permitiría a los estudiantes tener un mejor entendimiento de lo que es una razón de cambio que servirá como preámbulo al entendimiento del concepto de derivada. Los resultados preliminares obtenidos dan indicios de que los acercamientos numéricos proporcionan información visual de gran valor en el proceso de aprendizaje de conceptos matemáticos. En este artículo se expone principalmente como se realizó la experimentación y un resultado preliminar.*

### Introducción

Varios autores señalan la importancia de introducir el concepto de derivada a través del uso de razones de cambio. En el software propuesto se incorporaron actividades tendientes a resaltar estas ideas teniendo como base los aspectos visuales.

Primeramente se detectó que la idea de incremento de una variable no es entendida tan fácilmente por los estudiantes, por lo que, en el software, el incremento de una variable se presenta de manera numérica y gráfica.

Para el desarrollo del software, propuesto en esta experiencia, se parte de la hipótesis de que se puede lograr, con dicho software, que en los cursos de cálculo diferencial los profesores incorporen diferentes representaciones y que los estudiantes tengan un mejor acercamiento al concepto de derivada a través del uso de las representaciones numérica, gráfica, algebraica y verbal.

En el caso particular del aprendizaje del concepto de derivada en el bachillerato, se usa solamente la representación algebraica; pues aunque se inicie con una explicación geométrica para introducir la definición de derivada muy pronto se abandona el tratamiento geométrico y se usa solamente el algebraico. Por ejemplo, Hughes (1990, pp. 1-8) observó que muchos estudiantes son capaces de calcular algebraicamente las derivadas de diversas funciones, pero no son capaces de ver la gráfica para determinar en qué lugares la función tiene derivada positiva y

<sup>1</sup> Funciones y Derivadas software de apoyo al aprendizaje del cálculo. Cortés 2002.

en cuales negativa. Además, notó que pocas veces se utilizaba un acercamiento numérico para tratar este concepto. Por tanto, se considera que el resaltar el uso de registros semióticos de representación de tipo gráfico, geométrico, numérico y algebraico, es una buena opción para que los estudiantes tengan un mejor acercamiento al concepto de Derivada en el bachillerato.

El software propuesto presenta actividades donde se resalta el tratamiento en el registro numérico mediante la presencia de tablas en las que se da información numérica de una determinada función (véase figura 1) y en el registro gráfico se implementan familias de funciones que pueden ser manipuladas para obtener información, por ejemplo, de una línea tangente que varía a lo largo de toda la gráfica y de la cual se muestra la variación de su pendiente (véase figura 2).

x	0	1	2	3	4	5	6	7
y	4.	11.	38.	103.	224.	419.	706.	1103.

Figura 1

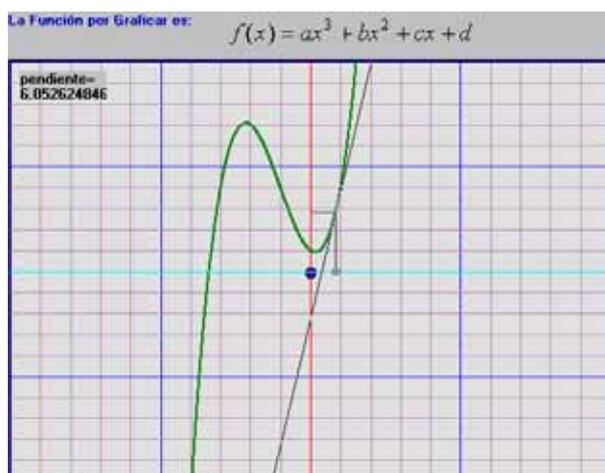


Figura 2

Confrey (1993) indicó que la presencia de tablas numéricas puede iluminar la conexión funcional de los valores contenidos en ellas y también la presentación algebraica. En este trabajo de investigación se ha dado importancia al manejo tabular, así como a la representación gráfica para introducir la noción de razón de cambio.

Scher (1993) llevó a cabo un estudio relacionado con la utilización de múltiples representaciones para conceptualizar la derivada. Concluyó que existe la necesidad de promover el uso de tales representaciones para que el estudiante obtenga entendimiento fuerte de los conceptos del cálculo. Mencionó, por ejemplo, que “la noción de razón de cambio debe ser accesible para todos los estudiantes” Scher (1993, p. 16). Dentro del software propuesto en esta investigación, la construcción de tablas de las pendientes de las secantes se da de dos maneras: una relacionada con la razón de cambio en forma numérica y gráfica y la otra mediante la

construcción de la tabla de la pendiente utilizando un *incremento* fijo de  $x$  ( $\Delta x = \text{constante}$ ) y variando el punto  $x$ .

### **Experimentación**

En este apartado se describe el escenario en el que se llevó a cabo la experimentación, los objetivos, la actividad propuesta y las observaciones generales.

#### **Escenario de la experimentación**

Se implementó una experimentación con cinco estudiantes durante 12 horas, repartidas en cuatro sesiones. Se trabajó en una sala equipada con tres computadoras, un pizarrón y dos cámaras de video. En cada sesión hubo un equipo por computadora y se utilizó el software desarrollado. En la primera sesión se dio una instrucción sobre la navegación en el paquete, para que en las sesiones subsiguientes el estudiante usara libremente los contenidos permitidos en el software.

#### **Primera Sesión**

En la primera sesión se observó el comportamiento de los estudiantes al navegar en el software, para tener claridad acerca de los enunciados, la localización de los menús, el diseño de colores y la presentación de la información, básicamente.

#### **Sesiones posteriores**

Se dejó a los equipos trabajar libremente siguiendo cada uno de los niveles propuestos y se cuestionó, a cada equipo, sobre la actividad desarrollada. El trabajo que desarrolló cada equipo fue videograbado durante cada una de las sesiones.

En el desarrollo de las sesiones el instructor se desempeñó como observador y solamente intervenía para contestar algunas preguntas cuando le eran requeridas. Los estudiantes podían comunicarse libremente las ideas o las estrategias de solución, las cuales fueron grabadas en video.

#### **La selección de los alumnos**

La selección de estudiantes se hizo de la siguiente manera: dos estudiantes que habían tenido un buen desempeño escolar, de acuerdo con las calificaciones reportadas a lo largo de sus estudios, dos que habían sido alumnos regulares, y un alumno con bajo desempeño académico.

Se formaron dos equipos de trabajo integrados con un alumno con buen desempeño y otro de desempeño regular. El alumno de bajo desempeño trabajó solo. Los cinco estudiantes ya habían llevado un curso de cálculo diferencial a la manera tradicional.

La idea básica de realizar esta distribución se debió a que se esperaba que el estudiante de más bajo rendimiento lograra encontrar las estrategias de igual manera que los otros equipos. Asimismo, que la comunicación entre los integrantes de los equipos 1 y 2 fuera más fluida.

### ***El entorno propuesto y el ambiente generado entre estudiantes***

Se utilizó una computadora en cada equipo. Las computadoras se encontraban en la misma sala, distribuidas de tal forma que se permitiera, en forma natural, la interacción de los miembros de los equipos.

Una actitud observada en los estudiantes que participaron en la experimentación fue que el uso de la computadora les permitió tener mayor comunicación en cada equipo, pues estaban obligados a discutir una estrategia que posteriormente se debía introducir en la computadora. Además, hubo mayor interacción entre los miembros de los equipos gracias al ambiente de discusión promovido por la interacción con la computadora. Analizando este aspecto, nos damos cuenta de que el ambiente de trabajo con lápiz y papel en la escuela, normalmente es un trabajo de tipo individual sin que haya retroalimentación inmediata.

El software presenta una serie de ejercicios que son generados en forma semi-aleatoria y resulta muy difícil que dos equipos tengan el mismo ejercicio. Esta cualidad permitió observar que cuando el integrante de un equipo daba una explicación al de otro equipo, se centraba en exponer la estrategia utilizada para resolver el ejercicio y no sólo en comunicar la solución.

### ***Interacción de los alumnos con el software***

La navegación en el software y la tarea por resolver no causaron problemas. El software tiene implementada, como forma de evaluación a una respuesta determinada, las opciones de “correcto” o “incorrecto”. Esto sirvió a los estudiantes para que cada vez que introdujeran datos supieran si su respuesta era correcta o no. Como resultado de la experimentación, se observó la necesidad de utilizar un tipo de respuesta más explicativo de acuerdo con el dato introducido y el nivel en que se encuentre trabajando el estudiante.

### ***Objetivos de la experimentación***

Los objetivos de la experimentación fueron dos: a) la amigabilidad y facilidad de navegación en el software (experimentar la interfase), y b) evaluar si el enfoque propuesto en el prototipo informático al concepto de derivada tenía un contenido educativo motivador e interesante para los estudiantes.

### ***La navegación y amigabilidad en el software***

Dentro del estudio de estas características del software se incluyó la detección de posibles errores de programación que confundieran al estudiante. Esto es, se

intentó que la actividad propuesta fuera entendible, que la interface permitiera al usuario navegar sin dificultad y que le fuera fácil la introducción de las respuestas requeridas.

En la primera sesión se puso énfasis a estos objetivos, para lo cual se permitió a los estudiantes navegar por todo el software. Se encontraron algunos errores concernientes a la programación (los cuales posteriormente fueron corregidos); Los estudiantes entendieron con cierta facilidad las actividades propuestas, aunque se vio la necesidad de que el profesor explicara algunos de los temas de trabajo. Así mismo, se comprobó que no hubo problemas para entender la tarea e introducir los datos correspondientes.

### **Contenidos del software**

En esta parte de la experimentación se determinó qué tan atractiva y motivadora era para los estudiantes la presentación de contenidos y las tareas por desarrollar. Asimismo, se quería tener un primer acercamiento a la reacción de los estudiantes al tratar los temas de función y derivada en su forma numérica y gráfica. Por tal razón, se pretendió que las ideas de incremento de una variable y de razón de cambio quedaran establecidas en los estudiantes. Para ello, se enfatizó el trabajo con la parte numérica del software y que el instructor explicara las ideas en forma gráfica a los estudiantes.

### **Exposición de la tarea experimentada**

Se experimentó la parte correspondiente al tratamiento numérico (progresiones, incrementos y razón de cambio). Primeramente, se trabajó con el apartado de progresiones aritméticas. El software genera, en forma semi-aleatoria, una tabla en la cual se presentan espacios vacíos, siendo la tarea del usuario el llenarlos (figura 3); el software realiza la evaluación del dato introducido y muestra si es correcto o incorrecto. Esta opción presenta una introducción y cuatro niveles.

posición	1	2	3	4	5	6	7	8
valor	21	25	29					

Figura 3.

La opción de incrementos presenta cuatro niveles (del mismo tipo que los presentados en el apartado de progresiones). Análogamente a la opción anterior, se generan tablas con espacios vacíos; la diferencia es que se proporciona mayor información, es decir, se presentan las tablas de los incrementos y se realiza un primer acercamiento gráfico (figura 4).

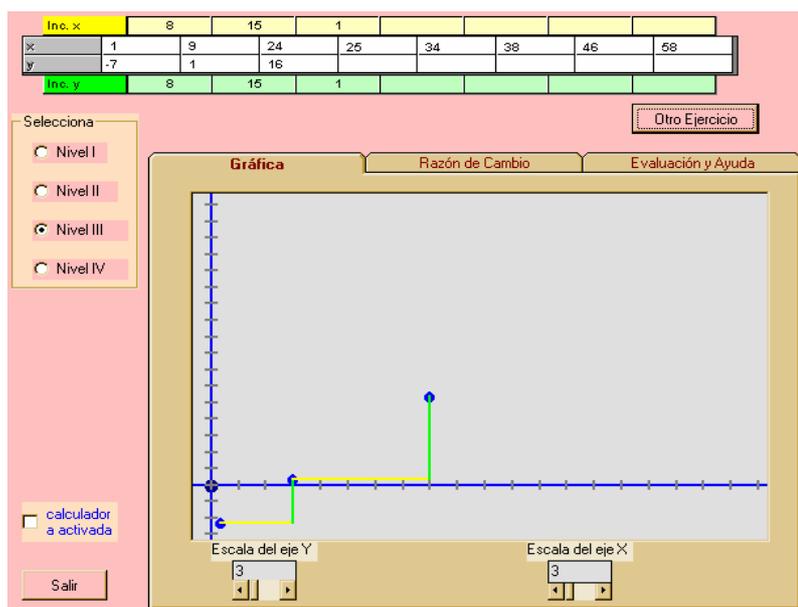


Figura 4.

La opción correspondiente a razones de cambio, a diferencia de las anteriores, es que ya no se trabaja con progresiones aritméticas, sino con funciones (polinomiales, circulares, etc.) que pueden ser seleccionadas o introducidas. Se presenta la información tabular (tabla de la función y tablas de los incrementos) así como la gráfica (gráfica de la función y de la función razón de cambio). La tarea consiste en llenar la tabla de la función razón de cambio (figura 5).

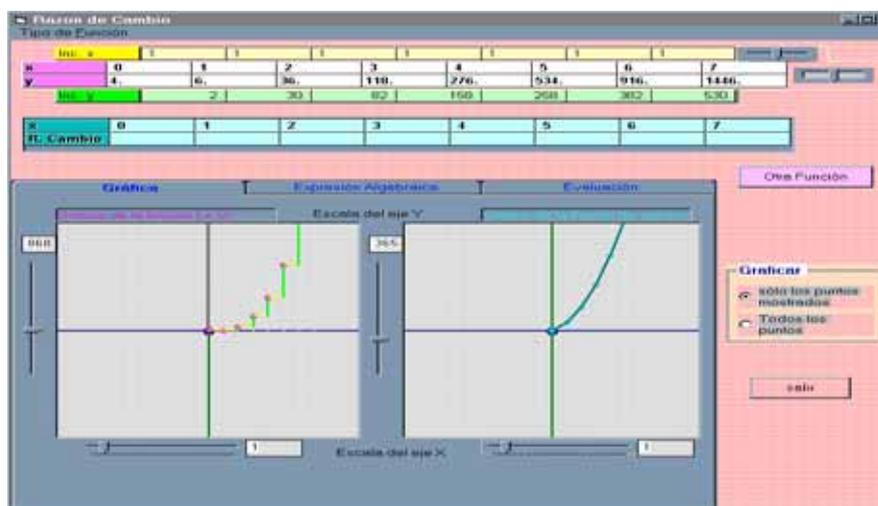


Figura 5.

### Observaciones generales

Los integrantes de los equipos no tuvieron ningún problema en la navegación con el software y entendieron rápidamente la tarea por desarrollar. Tuvieron algunos conflictos en encontrar la estrategia adecuada, pero al final lo lograron.

### **Análisis de la experimentación en relación con los contenidos presentados**

El análisis de esta experimentación se centrará en explicar, con base en las video-grabaciones, si las ideas de incremento de una variable y de razón de cambio fueron entendidas por los estudiantes. Asimismo, este análisis será un primer contacto para vislumbrar la posibilidad de que un acercamiento a través de la función razón de cambio permita a los estudiantes transitar al concepto de derivada.

#### **Opción de progresiones**

En esta opción se tiene una introducción a lo que es una progresión aritmética y cuatro niveles de ejercicios.

Todos los estudiantes entendieron bien la introducción y la tarea por desarrollar. El nivel I y nivel II no presentaron ningún problema para encontrar la solución requerida en cada caso. Pero en el nivel III y nivel IV, fue muy difícil para los estudiantes dar una respuesta adecuada al tipo de ejercicio propuesto. Sólo un equipo de trabajo encontró una estrategia para resolver lo requerido en el nivel III. A continuación se describe cómo fue el desempeño del equipo con respecto a la tarea solicitada.

Elizabeth y Leticia están intentando resolver el siguiente ejercicio del Nivel III:

<i>Posición</i>	1	6	25	42	52	53	81
<i>Valor</i>	4	14	52				

Cuadro 1

Elizabeth: veamos cuánto es.... (empieza a escribir en su libreta, haciendo operaciones aritméticas) son 17 por 2 que son 34 y le sumamos 52.

Investigador: ¿Me explicas cómo lo obtuviste?

Elizabeth: Del 1 al 6 hay 5 espacios. Sé que si 1, es igual a 4; y hay 2 espacios entre uno y otro, y se va incrementando de 2 en 2 entonces son 42-25 para sacar los espacios; multiplicado por 2, y le sumo el valor de 52.

Leticia: Sacamos el espacio que hay de un lado a otro y, como ya sabemos que va de 2 en 2, de 52 a 53 hay un espacio y lo multiplicamos por 2.

Investigador: Ese número que obtuvieron es muy importante (el 2). ¿Cómo lo sacaron?

Elizabeth: Muestra una tabla y me da una explicación sobre ella.

<i>Posición</i>	1	2	3	4	5	6
<i>Valor</i>	4	6	8	10	12	14

Cuadro 2

Llenaron la tabla con los valores que faltaban del 1 al 6, y determinaron que se va incrementando de 2 en 2 cada posición.

Se les sugirió que revisaran la opción de incrementos y la definición de razón de cambio. Revisan la opción y la explicación de lo que es una razón de cambio:

Elizabeth: Ya!, lo que pasa es que con el incremento que le damos, lo podemos sacar al dividir el incremento de  $x$  entre el incremento de  $y$ .

Leticia: Es al revés.

Elizabeth: Y ya nos ahorramos lo que estábamos haciendo.

Se les sugirió entonces que regresaran a la opción de progresiones y que resolvieran otros ejercicios nuevamente, pero en esta ocasión sin hacer una tabla. Resolvieron algunos ejercicios más de los niveles III y IV y dijeron que ya no tenían dificultades.

Como podrá observarse para la solución de ejercicios de este tipo es necesario utilizar la razón de cambio, lo cual fue logrado por este equipo. En tareas posteriores ya tenían esta idea y la aplicaron.

## A manera de Conclusión

A través del uso de tablas de valores de funciones es posible que los estudiantes entiendan y usen lo que es una razón de cambio y con esto empezar a construir una nueva función y a partir de ella introducir la función derivada.

## Bibliografía

- CONFREY, J. (1993). A constructivist research programme towards the reform of mathematics educations. (Introduction to symposium for the Annual Meeting of American Education Research Association), April, 1993.
- HUGHES, D. (1990). Visualization and calculus reform, Visualization in teaching and learning mathematics. MAA notes number 19, pp.1-8.
- SCHER, D. (1993). Students conceptions of the derivative across multiple representations. Mathematics in College, 1993, pp. 3-17.

**José Carlos Cortés** es doctor y profesor de la Facultad de Físico Matemáticas de la Universidad Michoacana en México. Ha realizado varias publicaciones (libros y artículos) y desarrollado diferentes softwares educativos