UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Año XVI - Número 59. Agosto 2020
Páginas 83-101

http://www.fisem.org/www/index.php
https://union.fespm.es/index.php/UNION

Cônicas com dobraduras e GeoGebra: uma possível abordagem para a educação básica

Vera Helena Giusti de Souza, Maria Cristina Bonomi, William Vieira, Roberto Seidi Imafuku

Fecha de recepción: 17/03/2020
Fecha de aceptación: 28/08/2020

Resumen	Se presenta el análisis de los resultados obtenidos con dos construcciones de la parábola cónica, con un grupo de estudiantes de pregrado en Matemáticas, uno con pliegues en papel y lápiz y el otro con la aplicación GeoGebra para teléfonos móviles. El objetivo era evaluar si estos futuros maestros de matemáticas establecen conjeturas frente a lo que fue visto y perciben que es necesario justificar que la curva prevista, en papel y en teléfonos celulares, existe y es una parábola. Los Tres Mundos de las Matemáticas constituyeron el campo teórico que apoyó el análisis de datos. Esto reveló posibilidades reales para enseñar con los enfoques propuestos, como una forma de estimular el establecimiento de conjeturas y justificaciones en Matemáticas. **Palabras clave**: cónicas, Tres Mundos de las Matemáticas, GeoGebra.
Abstract	The analysis of the results obtained with two constructions of the conical parable is presented, with a group of undergraduate students in Mathematics, one with folds on paper and pencil and the other with the GeoGebra mobile application. The objective was to evaluate if these future mathematics teachers establish conjectures considering what they seen and realize that it is necessary to justify that the predicted curve, on paper and on cell phones, exists and is a parable. The Three Worlds of Mathematics constituted the theoretical field that supported the data analysis. This revealed real possibilities for teaching with the proposed approaches, to stimulate the establishment of conjectures and justifications in Mathematics. **Keywords**: Conics, Three Worlds of Mathematics, GeoGebra.
Resumo	Apresenta-se a análise de resultados obtidos com duas construções da cônica parábola, com um grupo de estudantes de Licenciatura em Matemática, uma com dobraduras no papel e lápis e outra com o aplicativo GeoGebra para celular. O objetivo foi avaliar se esses futuros professores de Matemática estabelecem conjecturas diante do visto e percebem que é necessário justificar que a curva vislumbrada, no papel e no celular, existe e é uma parábola. Os Três Mundos da Matemática constituiu o campo teórico que embasou a análise dos dados. Esta revelou possibilidades reais para o ensino com as abordagens propostas, como forma de estimular o estabelecimento de conjecturas e justificativas em Matemática. **Palavras-chave: Cônicas, Três Mundos da Matemática, GeoGebra.**

1. Introdução

Vê-se que aumentou a preocupação de educadores matemáticos com o desenvolvimento da capacidade de argumentação em Matemática, em todos os níveis de ensino. Uma tarefa importante relacionada a isso está na mão de professores de Cursos de Licenciatura em Matemática, que podem e devem fazer com que seus estudantes - e, por extensão, os da Educação Básica - entendam e vivenciem a necessidade de elaborar justificativas formais para afirmações matemáticas. Por exemplo, Kilpatrick et al. (2001) defendem que tarefas de conjecturar e provar, em Matemática, devem ser incorporadas em todos os níveis de ensino, o que reforça que é preciso trazer tarefas desse tipo para a formação inicial.

Essa preocupação também tem destaque em programas oficiais brasileiros. Nos Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1997) lê-se que habilidades de argumentar e provar em Matemática são importantes tanto para o desenvolvimento em Matemática quanto para a formação do cidadão crítico (Brasil, 1997). Na Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2017) consta que o estudo de Matemática deve desenvolver o letramento matemático, definido como “competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos” (Brasil, 2017).

Apesar dessas indicações aparecerem com um intervalo de 20 anos, e anunciarem a importância e a necessidade da Matemática ser abordada de forma a desenvolver a argumentação dos estudantes, pesquisadores em Educação Matemática continuam identificando um panorama oposto, em salas de aula de Matemática da Educação Básica.

Tinoco e Silva (2004), ao avaliarem o ensino de justificativas e argumentação em aulas de Matemática, apontam que “Os alunos raramente veem demonstrações, e tampouco se pede que eles justifiquem suas respostas, ou a verdade de uma afirmativa. Isso acontece tanto no ensino de geometria, como no de álgebra e de aritmética” (Tinoco & Silva, 2004). Junior e Nasser (2012) também destacam que em salas de aula de Matemática, em geral, o professor apenas transmite conhecimento e apresenta resultados, para depois avaliar com exercícios parecidos aos discutidos em classe, e estudantes devem acumular o dito pelo professor e realizar as tarefas propostas.

Numa outra perspectiva dessa problemática, Guerato (2016) destaca que, quando o professor se coloca a justificar resultados de Geometria, estudantes costumam questionar o porquê das demonstrações, posto que os resultados parecem óbvios ou facilmente verificáveis empiricamente.

Junior e Nasser (2012) destacam que, na ausência da promoção do pensamento lógico-dedutivo em aulas de Matemática, os professores também são vítimas, pois

> durante sua formação acadêmica, praticamente todos os resultados em Matemática que lhe foram apresentados foram provados por meio da prova rigorosa, seguindo o modelo formal lógico-dedutivo. Na maioria dos casos, isso ocorre sem contato com situações de sala de aula que permitam encontrar outros meios, também plausíveis, para argumentar e justificar os resultados. É a antiga discussão sobre o afastamento entre a academia e a realidade da escola. (Junior & Nasser, 2012)

Vemos que há um descompasso entre o que educadores, pesquisadores e manuais oficiais defendem, há décadas, sobre a necessidade de se desenvolver o raciocínio lógico-dedutivo e o que se tem observado em práticas de salas de aula de Matemática, tanto da Educação Básica como em Cursos de Licenciatura em Matemática.

Para entender esse descompasso, pesquisadores em Educação Matemática apontam diversas justificativas. De Villiers (2001) sustenta que estudantes não demonstram porque não entendem as cinco funções da demonstração em Matemática - explicação, descoberta, comunicação, desafio intelectual e sistematização - e defende a elaboração de atividades em Geometria que as envolvam. Atualmente, com o uso de mídias digitais em sala de aula, a tarefa proposta por ele fica facilitada, por exemplo, com o uso de um aplicativo de Geometria dinâmica.

Pietropaolo (2005) corrobora essa perspectiva e destaca que a “prova” de uma afirmação matemática deve ser definida para ser compatível com o estudante e o seu nível de ensino, e sugere que se façam pesquisas sobre novos caminhos para se ensinar a elaborar justificavas em Matemática. Para ele, a prova deve ser entendida num espectro amplo, como um “processo de exploração, de procura de conjecturas, de contraexemplos, de refutação, de aplicação e de comunicação e não com o sentido formalista que a caracterizou nos currículos praticados noutros períodos” (Pietropaolo, 2005).

Tall (2013) alerta para a importância de o professor permitir e valorizar três diferentes facetas da demonstração em Matemática: a que se faz para si mesmo, a que se quer mostrar para um amigo e a que se quer dar para um inimigo. Reconhecer a existência desses três tipos de demonstração abre caminho para abordagens com características corporificadas, como é o caso do uso de dobraduras ou de aparatos digitais, como computador, tablet ou celular.

Assim, entendemos que o professor pode estimular estudantes a elaborarem conjecturas e justificativas e, ao mesmo tempo, a assumirem a própria aprendizagem, com atividades que usem construções manuais - como um pantógrafo ou geoplano - ou o uso de alguma das muitas mídias digitais que existem - como o computador ou o tablet.

Neste trabalho, são trazidos os resultados de duas abordagens para a construção da cônica parábola, uma com o uso de dobraduras e a outra, com o aplicativo GeoGebra para celular, com o objetivo de possibilitar a elaboração de conjecturas e o desenvolvimento da demonstração da existência da cônica construída.

A preocupação com o uso de tecnologias digitais nas salas de aulas, em todos os níveis de ensino, tem sido mais frequente entre educadores, nos âmbitos nacionais e internacionais, nos últimos anos; no entanto, essa perspectiva se contrasta com as transformações do ensino nas salas de aula brasileiras. Nesse sentido, Javaroni, Zampieri e Oliveira (2014) apontam que há um “descompasso entre a integração das tecnologias digitais no ambiente escolar e a prática das aulas de Matemática para estudantes” (Javaroni et al., 2014, p. 970).

Chinellato (2014) destaca que professores ainda não se apropriaram do uso do computador como recurso para o ensino de Matemática, apesar dos programas governamentais de incentivo. Como justificativa para essa ruptura, o pesquisador aponta a precarização das salas de aula de informática e o despreparo de professores para lidar com novas tecnologias. No que diz respeito à superação das dificuldades com as salas de informática, Borba, Scucuglia e Gadanidis (2014) defendem o uso de celulares em sala de aula, desde que se discutam e se ponderem os limites e as maneiras desse uso.

A partir desse cenário, em busca de colaborar com o desenvolvimento do raciocínio lógico-dedutivo e o uso de celulares em sala de aula, organizamos uma oficina para a construção da parábola com dobraduras em papel vegetal e com o uso do aplicativo GeoGebra para celular, com 44 licenciandos em Matemática, para avaliar o estabelecimento de conjecturas e a elaboração de justificativas. A oficina ocorreu durante a realização da Semana de Ciência, Tecnologia, Inovação e Desenvolvimento de Guarulhos (SEMCITEC) e durou 3 horas. Os Três Mundos da Matemática (Tall, 2013), que apresentamos a seguir, foi o referencial teórico adotado para a pesquisa.

2. Referencial Teórico

Para Tall (2013), o conhecimento matemático pode ser adquirido pelo ser humano de três formas diferentes: a corporificada, que ocorre a partir da manipulação, concreta ou mental, de objetos físicos, como a balança para resolver uma equação, um gráfico para extrair propriedades de uma função, uma calculadora para verificar resultados numéricos ou uma tela de computador para ver entes geométricos; a simbólica, que surge da representação e da manipulação, com símbolos matemáticos, de objetos abstratos, como expressões algébricas de funções ou propriedades para resolver uma equação; e a axiomático-formal, que se baseia em axiomas, definições e teoremas, que constituem o núcleo da ciência matemática.

A partir desses pressupostos, Tall (2013) defende que o desenvolvimento do pensamento matemático do ser humano se dá em três mundos distintos, cujas especificidades, qualidades e maneiras constituem os Três Mundos da Matemática: o corporificado, o simbólico e o axiomático- formal.

O mundo corporificado refere-se às percepções humanas de objetos matemáticos e suas ações sobre eles, as quais fomentam a criação de imagens mentais que são verbalizadas de forma cada vez mais sofisticada e se tornam entidades mentais do objeto matemático. Fazem parte do mundo corporificado imagens, gráficos e desenhos que podem ser representados física (como papel e lápis ou computador) ou mentalmente e que, junto com suas propriedades, podem ser analisados e compreendidos (Tall, 2013).

O mundo simbólico está relacionado à necessidade de efetuar ações sofisticadas sobre objetos do mundo corporificado. Essas ações são representadas por símbolos matemáticos, sobre os quais um sujeito atua e Tall (2013) sustenta que é possível permanecer em um nível no qual os processos aprendidos são repetidos, sem que se atribua significado matemático aos símbolos que eles representam. Para desenvolver o pensamento operacional, é preciso conceber os símbolos tanto como ferramenta para realizar operações, como para representar o conceito do objeto em jogo; ou seja, entender os símbolos como conceito e como processo, desenvolvendo o que Gray e Tall (1994) e Tall (2013) denominam *proceito*.

O mundo axiomático-formal, ou mundo formal, diz respeito à construção do conhecimento formal, por meio de sistemas axiomáticos, de acordo com a Teoria dos Conjuntos e a Topologia, isto é, por meio de axiomas, definições e teoremas, de forma que as propriedades de um objeto matemático são deduzidas a partir de demonstrações matemáticas (Tall, 2013). É no mundo formal que ganham espaço a lógica e a coerência relacionadas à linguagem matemática.

Entendemos que apenas alguns sujeitos chegam ao mundo formal assim definido e essa perspectiva se torna legítima à medida que se percebe, atuando no Ensino Superior, que grande parte dos estudantes compreende demonstrações, mas não consegue construí-las com o rigor dos sistemas axiomáticos. Em contraponto, características do mundo formal aparecem em todos os níveis de escolaridade, podendo ser acessados por todos os sujeitos. Propriedades do corpo dos números reais, como relação de ordem, associatividade, distributividade e elementos opostos e inversos são exemplos de características formais trabalhadas em todos os níveis educacionais.

Tall (2013) destaca que os Três Mundos da Matemática não são disjuntos, ou seja, no desenvolvimento de uma atividade matemática, há momentos em que um sujeito apresenta características de dois ou três mundos diferentes.

A partir dessas ideias teóricas, fizemos as escolhas usadas na oficina. Como queríamos oferecer abordagens possíveis para a sala de aula da Educação Básica, que alavancassem a elaboração de conjecturas, iniciamos o trabalho com uma atividade com características corporificadas - dobraduras com papel vegetal - e com um objeto matemático supostamente conhecido dos estudantes - a parábola. Ao mesmo tempo, quisemos oferecer outra visão dessa curva, que viesse a ressaltar características formais importantes e diferentes das usualmente exploradas, pois a construção feita se baseia em propriedades de lugar geométrico, que são aquelas pelas quais a parábola é utilizada em muitas aplicações práticas, como nos satélites parabólicos, por exemplo.

Para desenvolver características simbólicas e formais e tornar a abordagem proposta básica, moderna, não tradicional e viável, optamos por realizar, com o aplicativo GeoGebra no celular, uma construção que replica a realizada com papel vegetal. Essa estratégia provocou os participantes a traduzirem, com características simbólicas e formais, as características corporificadas da construção com dobradura.

A estratégia utilizada com o GeoGebra possibilitou mostrar a construção das cônicas elipse e hipérbole e, apesar de não as termos construído no papel vegetal, de modo análogo ao feito com a parábola, os participantes viram que são possíveis abordagens semelhantes às que propusemos com a parábola.

3. Descrição das Atividades da Oficina

A oficina foi realizada na Semana de Ciência, Tecnologia, Inovação e Desenvolvimento de Guarulhos (SEMCITEC) em julho de 2018 e contou com a participação de 44 estudantes de um Curso de Licenciatura em Matemática de uma instituição pública do Estado de São Paulo. Estes foram informados que as atividades realizadas seriam objeto de investigação e, por conta disso, todos assinaram o termo de consentimento livre e esclarecido de participação na pesquisa.

O tempo da oficina, aproximadamente 3 horas, foi dividido em duas partes. Na primeira, foi desenvolvido o trabalho com as dobraduras e demonstrações e, na segunda, com o uso do aplicativo GeoGebra para celular, que os participantes haviam previamente instalado e cujo uso todos dominavam, em razão de atividades propostas por professores do curso de Licenciatura. As produções no papel vegetal foram registradas em fotos e os dados das construções realizadas nos celulares e os áudios das conversas entre os participantes foram gravadas com o auxílio do aplicativo AZ Screen Record, também previamente instalado nos celulares dos participantes.

Para apresentar a discussão dos resultados obtidos e responder questões como “Os participantes fizeram conjecturas diante das atividades essencialmente propostas com características corporificadas?”, “Conseguiram ‘transformar’ características corporificadas em simbólicas e/ou formais?”, “Perceberam a necessidade de demonstração das conjecturas levantadas?”, “Como futuros professores de Matemática, perceberam potencialidades em abordagens como as propostas?”, descrevemos no que segue, com o máximo possível de detalhes, como transcorreu a oficina.

3.1 Oficina – parte 1 – Apresentação e dobraduras

Ao iniciar a oficina, os pesquisadores apresentaram slides para contextualizar e justificar um trabalho com cônicas, com exemplos tirados da História da Matemática e de lugares, como a Sala dos Sussurros[1], e/ou de aplicações práticas do uso dessas curvas, como nas antenas parabólicas ou nos faróis de alguns automóveis, em que a cônica envolvida é definida como lugar geométrico e escolhida pelas propriedades óticas.

Terminada essa apresentação, iniciou-se o trabalho com as dobraduras, para as quais cada um dos participantes recebeu um retângulo de papel vegetal, no formato A5, sobre o qual foi solicitado que desenhassem um segmento de reta paralelo ao lado menor do retângulo e do tamanho deste, mais ou menos a um quarto da altura do lado maior, e também um ponto não pertencente ao segmento (Figura 1).

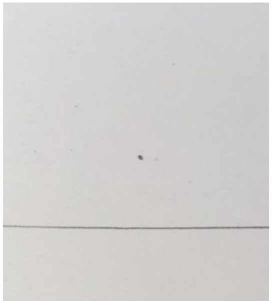

Figura 1. Papel vegetal A5, com reta diretriz e foco
Fonte: Autores

Em seguida, os participantes foram orientados a dobrar o papel de modo a posicionar cada ponto do segmento sobre o ponto fixo, vincando o papel para obter a "dobra", para depois desdobrá-lo, e assim sucessivamente. A operação precisa ser repetida muitas vezes, pois quanto maior o número de dobras, melhor o resultado obtido. A Figura 2 exemplifica o procedimento realizado pelos participantes que, depois de obterem várias dobras, começaram a perceber, levantando o papel contra a luz, uma curva (Figura 3) que muitos afirmaram tratar-se de uma parábola.

Figura 2. Estudante realiza dobras no papel vegetal durante a oficina
Fonte: Autores

[1] http://www.atlasobscura.com/places/whispering-gallery-at-st-paul-s-cathedral

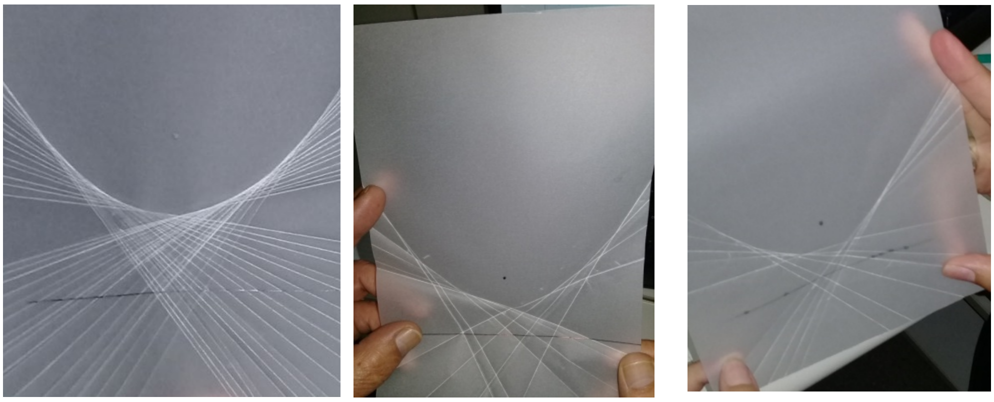

Figura 3: Dobraduras realizadas pelos participantes durante a oficina
Fonte: Autores

Questionados sobre a necessidade de justificar tal fato, alguns concordaram e, a partir daí, a conversa se desenrolou entre um dos pesquisadores e os participantes, no ambiente lousa e giz. Iniciada a discussão, surgiu a necessidade de uma definição de parábola e, como o ponto de partida da construção havia sido uma reta e um ponto, teria que ser a da curva como lugar geométrico, apresentada conforme destacado na Definição 1 e que traz à discussão características formais e simbólicas.

Definição 1 (Parábola) Uma reta r e um ponto F, não pertencente a r, determinam um plano. O lugar geométrico dos pontos P desse plano tais que $d(P,r) = d(P,F)$ é uma curva denominada parábola.

Duas questões são colocadas: Todas as dobras contribuíram para a construção da curva ou há alguma dobra ‘inútil’? Cada dobra contribui com quantos pontos? Para tal discussão, foi feito um esboço na lousa (Figura 4).

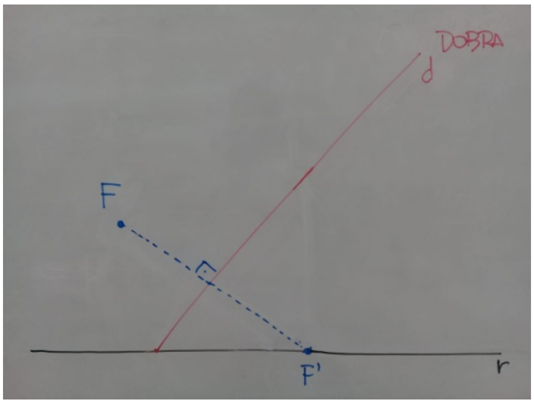

Figura 4: Esboço realizado pelos pesquisadores durante a oficina
Fonte: Autores

Alguns participantes perceberam que a dobra d (Figura 4) é a mediatriz do segmento FF' e, portanto, qualquer ponto dessa dobra é equidistante de F e de F'. Alguns afirmaram que o ponto da dobra que é equidistante do ponto F e da reta r é o ponto médio do segmento FF', mas outros perceberam que isso não é verdade. Lembrando a definição de distância de um ponto a uma reta, a discussão prosseguiu para concluir que para achar um ponto P sobre a dobra tal que $d(F,P) = d(P,r)$, "basta traçar uma reta perpendicular à reta r pelo ponto F' e interceptá-la com a dobra, determinando assim o ponto P" (verbalizado por um dos participantes). Assim, os segmentos PF e PF' têm o mesmo comprimento, ou seja, P é um ponto que satisfaz a definição dada de parábola. A Figura 5, à esquerda, apresenta novo esboço feito na lousa, baseado na discussão coletiva.

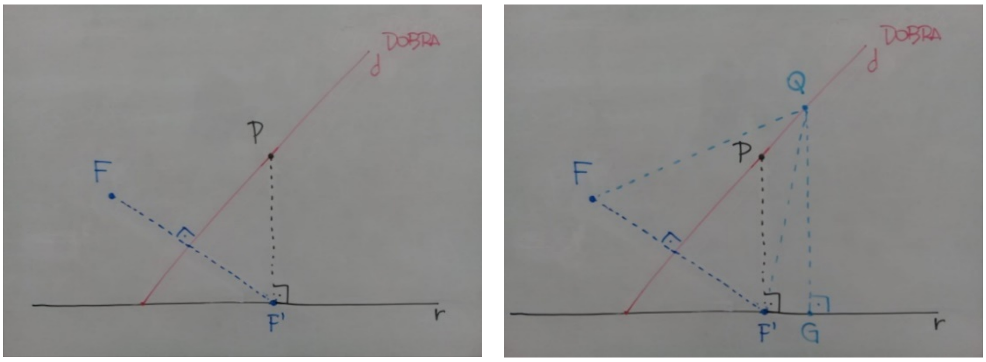

Figura 5: Esboços realizados pelos pesquisadores, na oficina
Fonte: Autores

Para finalizar, foi colocada outra questão: Foi determinado um ponto P na dobra que é um ponto da parábola. Existe algum outro ponto Q na dobra com essa propriedade, isto é, tal que a distância de Q a F é igual à distância de Q a r?

Na discussão realizada, acompanhada pelo esboço da Figura 5, à direita, os participantes perceberam a impossibilidade de existir o ponto Q tal que $d(F,Q) = d(Q,r)$, uma vez que, pela propriedade da mediatriz de um segmento, os segmentos QF e QF' têm o mesmo comprimento, mas $QG < QF'$, pois são lados do triângulo retângulo QGF'. Qualquer outro ponto Q, distinto de P, na dobra, acarreta a mesma conclusão. Logo, existe apenas um ponto em cada dobra que esteja na parábola.

Conforme os participantes entravam na discussão e respondiam as questões, o pesquisador ia colocando novos questionamentos, na tentativa de passar a ter características formais e simbólicas, até que conseguiu estabelecer que cada dobra contribui com um único ponto e que é necessária a definição de parábola como lugar geométrico para provar que o conjunto de pontos obtido com as dobras é uma parábola com diretriz na reta inicial r e foco no ponto inicial F.

3.2 Oficina – parte 2 – A parábola com o GeoGebra no celular

Ao propor e organizar a oficina, o grupo de pesquisadores considerou importante e significativo construir a mesma cônica feita com dobradura em papel vegetal, por acreditar que a Matemática que se aprende, em cada uma das abordagens propostas, é diferente e traz características corporificadas e formais que precisam ser dominadas pelo estudante, principalmente para aquele que vai ser professor de Matemática. Por exemplo, no caso do aplicativo, o estudante precisa saber que tem que traçar a reta mediatriz do segmento e escolher essa opção (pronta) do menu para conseguir as dobras, o que não ocorre no papel vegetal; a quantidade de mediatrizes, no aplicativo, é muito maior do que no papel, o que pode dar a falsa impressão de que não se precisa provar nada e é uma boa situação para se discutir a “quantidade” de pontos da reta real; por causa da dinamicidade do aplicativo, basta escolher um ponto livre sobre a reta dada e traçar a mediatriz, porque movimentando este ponto é possível ver a movimentação das mediatrizes – o aplicativo permite repetir a construção – o que pode não dar ao estudante condições para perceber que na verdade é preciso escolher pontos muito, muito próximos para obter uma imagem cada vez melhor da curva, no caso do papel vegetal; o ponto da dobra que contribui para o traçado da curva pode ser construído no aplicativo, o que não ocorre no papel.

No início desta segunda parte da atividade, os participantes já tinham instalado o aplicativo GeoGebra para celular, formaram duplas e, sem dificuldade, instalaram o aplicativo AZ Screen Record, que grava a tela do aparelho e o áudio das conversas. Os participantes já tinham familiaridade com o GeoGebra, pois o usavam em disciplinas do curso de Licenciatura em Matemática, mas um dos pesquisadores optou por iniciar com uma explanação geral do aplicativo e destacar as principais funções e ferramentas que seriam usadas, como mediatriz, reta perpendicular, intersecção de objetos e rastro, após o que solicitou que construíssem a parábola, a partir dos mesmos elementos usados na dobradura, ou seja, uma reta e um ponto fora dela, em busca de colocar em discussão características simbólicas e formais relacionadas às características corporificadas exploradas no trabalho com a dobradura; contudo, os participantes não manifestaram espontaneamente essas relações e precisaram ser estimulados pelos pesquisadores.

Usando a ferramenta mediatriz, o estudante Pedro “repetiu” o processo que havia realizado com a dobradura e passou a criar muitas mediatrizes entre o ponto C, escolhido por ele como foco da parábola, e pontos aleatórios sobre a reta de referência. Com essa construção, obteve um esboço da parábola, que podemos ver na primeira imagem da Figura 6. Feito isso, Pedro orientou Andrea, colega de dupla, em sua construção e podemos ouvir o Diálogo 1, gravado com o aplicativo AZ Screen Record.

> *Andrea: Pera! Aí eu escolho um ponto...*
> *Pedro: Escolhe vários pontos.*
> *Andrea: Aí eu vou escolhendo os pontos... mas tem que clicar na mediatriz? Ou clicando já?*
> *Pedro: Aí depois você seleciona a mediatriz e seleciona um ponto e o foco, um ponto e o foco, o ponto e o foco...*
> *Andrea: Ahhh entendi.*
> (Diálogo 1, Pedro e Andrea, 2018)

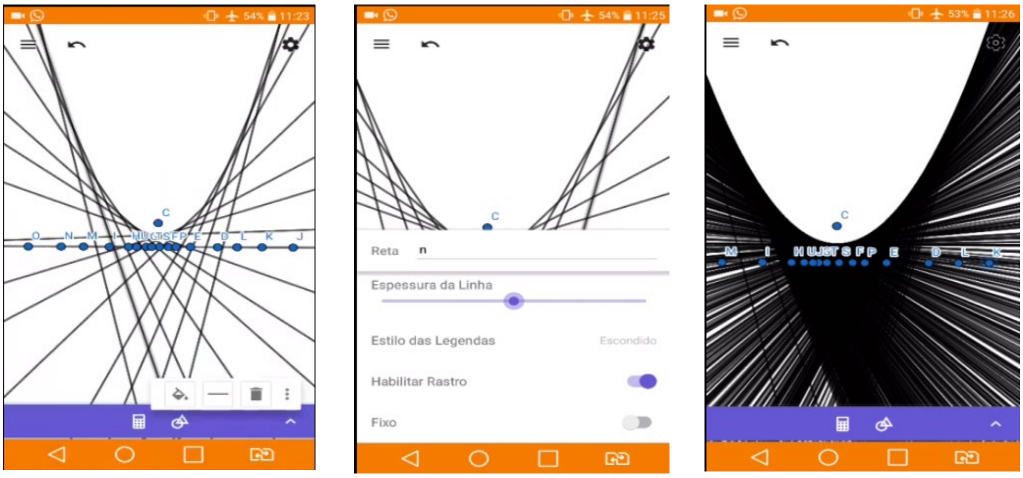

Figura 6: Sequência de construção do participante Pedro
Fonte: Autores

Ao final dessa primeira construção, Pedro e Andrea dialogam.

> *Andrea: Eu achei que eu não soubesse mexer nada nisso aqui (GeoGebra), mas eu sei mais ou menos (a estudante expressa satisfação com a construção que obteve).*
> *Pedro: Eu mexi bastante em casa...*
> *Andrea: É?*
> *Pedro: É... pra descobrir as coisas né*?
> (Diálogo 2, Pedro e Andrea, 2018)

Nesse ponto, o pesquisador relembra que o GeoGebra possui uma função chamada ‘habilitar rastro’ e dá um exemplo. Com isso, Pedro habilita o rastro de uma das mediatrizes que havia traçado (2ª imagem da Figura 6), passa a mover o ponto K, associado a essa mediatriz - e que é livre sobre a reta de referência - e obtém a terceira imagem da Figura 6. Durante essa construção, a dupla estabelece um novo diálogo

> *Andrea: Acho que a gente fez muito acelerado.*
> *Pedro: Ohhh meu Deus... caraca moleque!. Mano, isso é magia! E a gente se matando de colocar quinhentos pontos.*
> *Andrea: Não estou conseguindo. Peraí, vou voltar tudo! Eu vou voltar tudo. Pedro, mas eu não estou achando o ponto...*
> *Pedro: Peraí... (e passa a orientar a colega na nova construção).*
> (Diálogo 3, Pedro e Andrea, 2018)

Em seguida, o pesquisador lembrou que, para a demonstração de que a curva vislumbrada com as dobraduras é uma parábola, foi provado que cada reta (mediatriz) contribui com um, e só um, ponto na formação da curva e questionou os participantes: dados um ponto (foco), uma reta diretriz e uma mediatriz, como determinar o ponto dessa mediatriz que compõe a parábola? Mas não obteve resposta imediata. Os participantes permaneceram em silêncio e, ao insistir na questão, o participante Pedro respondeu "É só traçar a perpendicular pelo ponto F' (ponto livre sobre a reta diretriz projetada pelo pesquisador)". Após validar a resposta de Pedro, o pesquisador instigou os participantes a realizarem a construção da parábola a partir dessa ideia, usando o recurso 'habilitar rastro' para o ponto obtido. A Figura 7 apresenta um exemplo para essa construção, realizada pela estudante Carla.

É interessante observar a hesitação dos participantes em indicar a construção da reta perpendicular pelo ponto livre da reta diretriz como resposta para a pergunta do pesquisador, uma vez que tal construção fora utilizada no processo de demonstração.

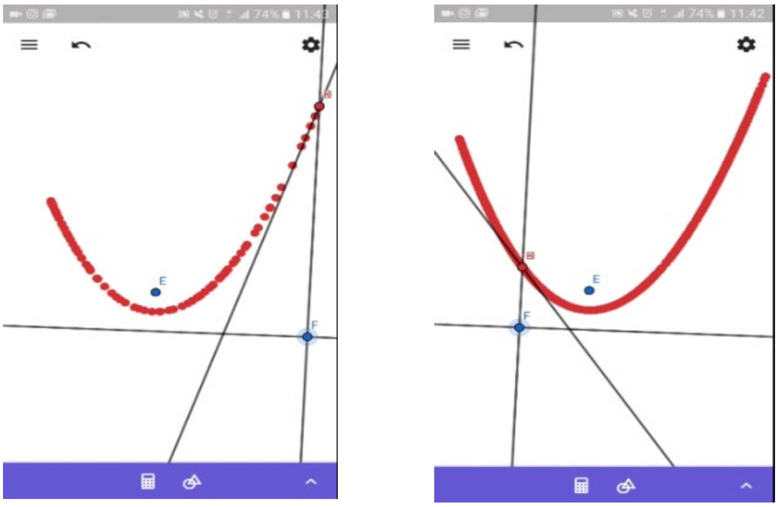

Figura 7: Sequência de construção da participante Carla
Fonte: Autores

Após realizar a construção da parábola por meio do rastro do ponto de interseção entre a mediatriz e a perpendicular pelo ponto livre na reta diretriz, o participante João passou a explorar as funções do GeoGebra e encontrou a opção Lugar Geométrico, (ver segunda imagem da Figura 8). Observe-se que essa ferramenta ainda não havia sido apresentada na oficina e foi compartilhada, após o participante João tê-la realizado e comentado com um dos pesquisadores que circulava pela sala. A única menção à expressão lugar geométrico aparece na definição de parábola apresentada na Definição 1.

Também vale a pena observar que após ter obtido a parábola com o uso da função lugar geométrico do GeoGebra, João "confirma" a validade reconstruindo a curva com o rastro do ponto E, situação destacada na terceira imagem da Figura 8.

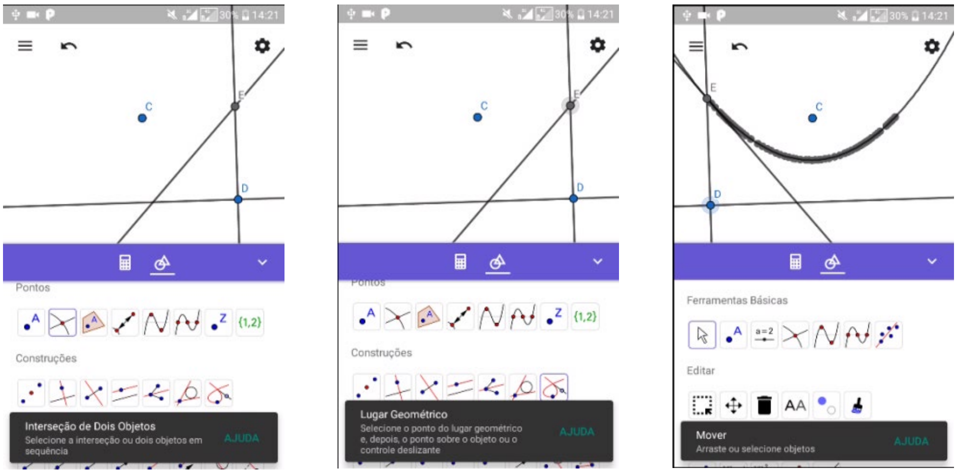

Figura 8: Sequência de construção do participante João
Fonte: Autores

3.3 Oficina - parte 3 - Outras cônicas com o GeoGebra no celular

Na parte final da oficina, não foi possível repetir as dobraduras e a demonstração para as cônicas elipse e hipérbole; contudo, para motivar os participantes, apresentou-se o processo de obtenção dessas curvas com o aplicativo GeoGebra para celular.

Começou-se pela elipse. Pediu-se aos participantes que construíssem um círculo de centro A e raio qualquer e que tomassem um ponto C no interior da região circular, distinto de A que, conforme alertado aos participantes, são as condições de partida para o trabalho com dobradura; depois, que criassem um ponto D livre sobre o círculo. A primeira imagem da Figura 9, realizada pela participante Carla, exemplifica essa situação.

Em seguida, os participantes foram orientados a tomar a mediatriz entre os pontos C e D e a habilitarem o rastro dessa reta (2ª imagem da Figura 9). Orientados a moverem o ponto D, os participantes puderam observar o resultado obtido e conjecturar que a curva vislumbrada é uma elipse, com focos nos pontos A e C. A terceira imagem da Figura 9 apresenta um exemplo dessa situação.

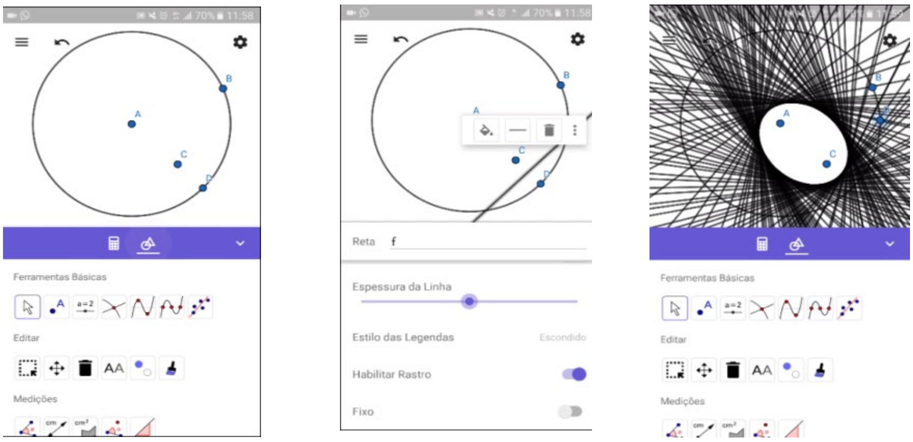

Figura 9. Sequência de construção da elipse da participante Carla
Fonte: Autores

Terminada a construção da elipse, pediu-se aos participantes que desabilitassem o rastro da mediatriz do segmento CD e movessem o ponto C para fora da região circular. As duas imagens à esquerda da Figura 10, obtidas por Carla, exemplificam esse procedimento. Orientados a habilitar o rastro da mediatriz do segmento CD e a mover o ponto D, os participantes obtiveram o resultado visto na imagem da direita da Figura 10, o que lhes permitiu conjecturar que a curva obtida é uma hipérbole com focos A e C.

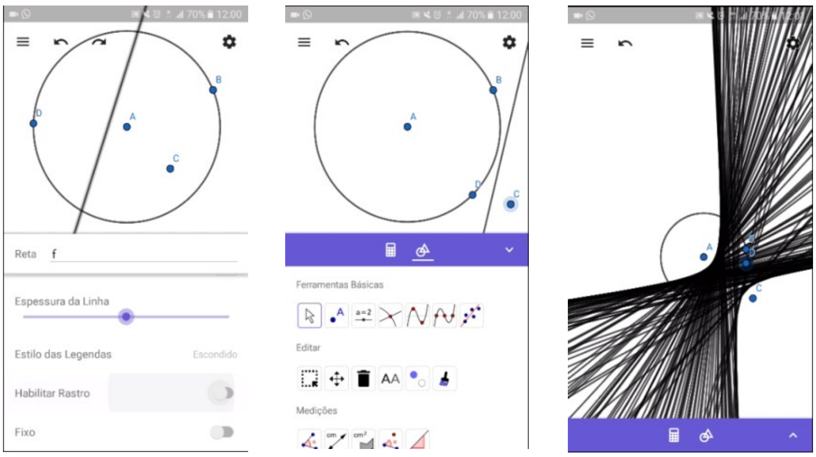

Figura 4: Sequência de construção da hipérbole da participante Carla
Fonte: Autores

Para finalizar a oficina, os pesquisadores lembraram aos participantes que, em qualquer dos casos, elipse ou hipérbole, as mediatrizes representam as dobras no papel vegetal, que são obtidas colocando cada ponto da circunferência sobre o ponto livre C. Também se ressaltou a importância de demonstrar que as curvas vislumbradas representam uma elipse e uma hipérbole, se o ponto livre C está, respectivamente, no interior e no exterior da região circular; e que a demonstração é análoga à discutida no caso da parábola, com as curvas definidas como lugar geométrico.

4 Discussão dos resultados

Conforme justificou-se ao longo deste texto, decidiu-se construir uma das cônicas, a parábola, tanto no papel vegetal como com o aplicativo GeoGebra para celular, para ter oportunidade de mostrar a alunos de Licenciatura em Matemática duas abordagens de ensino possíveis, não tradicionais e diferentes das usuais, para a sala de aula de Matemática da Educação Básica. Em particular, escolheu-se a cônica parábola para facilitar a elaboração de conjecturas e a demonstração dos resultados observados.

No trabalho com o papel vegetal, os participantes se dedicaram a fazer as dobras e logo perceberam que precisavam repetir essa operação muitas vezes. Questionados sobre o que viam ao olhar o papel vegetal contra a luz, alguns disseram tratar-se de uma parábola, embora tenhamos percebido que muitos não se arriscaram a emitir opinião, o que mostra que atividades que provoquem os estudantes a fazer conjecturas sobre o que observam precisam fazer parte, cada vez mais, da formação inicial do futuro professor de Matemática, para que ele as faça, e sem medo de errar.

A discussão foi conduzida por respostas dadas por algum participante a questões importantes, que transitaram entre o trabalho feito com as dobras, com características corporificadas, e a "tradução" destas para características formais e simbólicas, como por exemplo que o vinco feito no papel com a dobra representa uma reta, que é a reta mediatriz de um segmento, o qual é obtido quando dobramos o papel para colocar um ponto da reta inicial r sobre o ponto inicial F e assim obter o vinco. Feita essa "tradução", a demonstração depende essencialmente de características formais e simbólicas, que traduzem as respostas às seguintes perguntas: "Quem é a reta diretriz? e o foco?", "Qual é a definição de reta mediatriz de um segmento?", "Qual é o ponto da dobra que pertence à parábola?", dadas por um ou outro participante e que são resumida e respectivamente: "A reta diretriz e o foco vão ser, respectivamente, a reta e o ponto fixados no papel vegetal", "Um ponto da reta mediatriz de um segmento equidista dos extremos deste" (supostamente conhecido dos participantes), "Um ponto da dobra que contribui para o traçado da parábola é a intersecção da dobra com a perpendicular à reta dada pelo ponto desta e que gera a dobra". As respostas à pergunta "Por que esse ponto é único?", como era esperado, foram mais escassas, porque exigem uma demonstração mais elaborada, que passa por "Vamos admitir que existe outro ponto e chegar a uma contradição ou a um absurdo ..." e que neste caso depende da desigualdade triangular.

Com o uso do GeoGebra, o pesquisador encarregado do trabalho buscou colocar em discussão características simbólicas e formais relacionadas às características corporificadas exploradas no trabalho com a construção da parábola por dobradura. Novamente pode-se perceber que os participantes pareciam ter algum receio de se manifestar e não o fizeram espontaneamente. Precisaram ser estimulados com perguntas como “E aí, como foi a construção no papel vegetal?”, “Como se traduz para o GeoGebra a dobra feita no papel vegetal?”. Com algumas respostas a essas perguntas, foram escolhidos uma reta r e um ponto Q, não pertencente à reta r, na janela do GeoGebra e os participantes perceberam que era preciso escolher um ponto livre X sobre r para daí traçar, com a ajuda do menu, a reta mediatriz do segmento XQ.

Os Diálogos 1 e 2 revelam habilidades e facilidades de Pedro e Andrea no trabalho com o GeoGebra para celular. Mesmo Andrea, que fala “Eu achei que eu não soubesse mexer nada nisso aqui”, estimulada por Pedro, obtém êxito e demonstra satisfação com o próprio trabalho. Pedro revela interesse pelo uso do aplicativo porque diz “Eu mexi bastante em casa...”. Esses diálogos mostram que é importante oferecer, em cursos de formação inicial de professores, abordagens como as que foram desenvolvidas na oficina, para permitir que sejam vivenciadas pelos estudantes e, com o trabalho em grupo, sejam discutidas e colocadas no repertório de “coisas que eu posso fazer em sala de aula com meus alunos”.

Ainda no Diálogo 2, Pedro justifica o interesse pelo GeoGebra dizendo “... pra descobrir as coisas né?”, o que mostra que a potencialidade do aplicativo precisa ser discutida durante a formação inicial, para que o descobrir as coisas a que Pedro se refere, que pode ter sido apenas com características corporificadas, ganhe status de resultado matemático, com características simbólicas e formais.

Acionando, no menu do GeoGebra, a opção rastro da primeira mediatriz traçada, com o dinamismo do aplicativo basta arrastar um ponto da reta r e se tem, praticamente instantaneamente, o vislumbre da curva. Alguns não perceberam isso e começaram a repetir o que havia sido feito com o papel vegetal, escolhendo vários pontos, como se pode concluir da fala de Pedro para Andrea no Diálogo 1 “Escolhe vários pontos” e logo depois “seleciona a mediatriz e seleciona um ponto e o foco, um ponto e o foco, um ponto e o foco”.

A fala de Pedro no Diálogo 3, e que temos certeza não ser a única do tipo, mostra que um trabalho com um aplicativo de Geometria dinâmica - no caso o GeoGebra - pode e deve ser feito, principalmente com o celular, para que o professor de Matemática da Educação Básica permita, em sala de aula comum, que seus alunos desenvolvam uma Matemática muito mais rica do que a possível só com lousa, giz e livro didático, desde que acompanhado por um trabalho “mais lento” - no caso as dobraduras - para que expressões como a de Pedro “E a gente se matando de ...”, ditas por ele ao conseguir replicar a construção só com um movimento do mouse, ou deslizando o dedo na tela, não tornem os resultados obtidos com o dinamismo do aplicativo tão “evidentes”, que poderíamos compará-los às “fake news”, tão em moda na sociedade moderna.

Pedro demonstra bastante entusiasmo com o uso do rastro ao dizer “isso é magia” e percebe, implicitamente com a frase “E a gente se matando de colocar quinhentos pontos.”, que o uso do aplicativo permite aumentar enorme e rapidamente a quantidade de retas que identificam a curva, o que torna possível, na tela do celular, praticamente cobrir a região do "plano" que vai ficar abaixo da curva (ver imagem do celular de Pedro, à direita na Figura 6), o que não era possível com as dobraduras.

Não havíamos previsto trabalhar a ferramenta lugar geométrico para traçar a parábola; no entanto, o participante João, talvez instigado pela definição dada de parábola, a usou e ainda comparou as curvas obtidas com o rastro e com o lugar geométrico (ver esboço da direita na Figura 8), mostrando com isso autonomia. Isso reforça a importância de um trabalho com um software de geometria dinâmica, com o celular, com estudantes de Licenciatura em Matemática.

Embora tenha sido demonstrado na primeira parte da oficina, com características formais e simbólicas, que cada "dobra" contribui com um e só um ponto para o traçado da parábola, com o GeoGebra é possível determinar esse ponto, o que não acontece na lousa ou no papel vegetal.

Essas constatações nos permitem afirmar que as atividades, tanto com as dobraduras quanto com o celular, motivaram os participantes e conseguiram transmitir as potencialidades envolvidas em abordagens de ensino que valorizem trabalhos diferenciados com materiais concretos e com o uso de tecnologias digitais.

5 Considerações finais

Reconhecemos que, numa oficina de 3 horas, não seria possível fazer o trabalho completo para as três cônicas, principalmente se a proposta envolver as dobraduras, o uso do software e a matematização dos resultados vistos e/ou vislumbrados; porém, as respostas obtidas nesse curto espaço de tempo apontam para a necessidade de um trabalho mais sistemático, em sala de aula regular, em cursos que tem disciplinas de Matemática, como Engenharias, Física, Geologia, Astronomia, com conteúdos que podem servir para tornar a Matemática mais viva e mais próxima de aplicações do mundo real.

Com relação à experiência na oficina, a não imediatez das respostas dos participantes, quando questionados a dar conjecturas e justificativas, permite dizer que isso só viabiliza a proposta, que é a de um trabalho mais completo, em sala de aula da formação inicial, para que o futuro professor de Matemática da Educação Básica não corrobore resultados negativos obtidos nas pesquisas de Tinoco e Silva (2004), Junior e Nasser (2012) e Guerato (2016), que foram destacados na introdução deste texto.

As dobraduras, embora só pareçam ter características corporificadas, permitem apreender que as dobras são retas perpendiculares a um segmento pelo seu ponto médio e, portanto, são retas mediatrizes e uma discussão sobre a "quantidade" de pontos da reta real, fatos que trazem também características formais e simbólicas.

A dinamicidade da Geometria com o GeoGebra, com características essencialmente corporificadas, permite que se obtenha a elipse e a hipérbole apenas com um movimento na tela, que é arrastar o ponto livre C do interior da região circular para o exterior ou vice-versa. Essa instantaneidade não pode ser conseguida com as dobraduras ou com lousa e giz ou com papel e lápis e, portanto, precisa ser discutida na formação inicial, pois pode criar a falsa impressão de que não é preciso complementá-la. Por exemplo, a justificativa com lousa e giz permite trazer à tona características formais e simbólicas e, assim, provocar uma jornada pelos Três Mundos da Matemática, que defendemos ser importante e necessária para a aprendizagem em Matemática.

Finalmente, a hesitação dos participantes em darem respostas às questões colocadas ao longo da oficina nos preocupa, porque consideramos que futuros professores de Matemática deveriam se envolver de forma mais ativa em atividades que propõem a elaboração de conjecturas e justificativas. Dessa perspectiva, algumas questões surgem, que merecem mais pesquisas: Dificuldade de compreender algo visto de forma estática, na lousa, com características formais e simbólicas? Ou de transformar essas características em corporificadas, com o uso da língua materna e do aplicativo? Falta de preocupação com justificativas? Que tipos de abordagem, com o uso de um aplicativo, "neutralizam" a instantaneidade obtida com esse uso?

Referências

Borba, M. C., Scucuglia, R. R., & Gadanidis, G. (2014). *Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática: sala de aula e internet em movimento* (1st ed.). Belo Horizonte, MG, Brasil: Editora Autêntica.

Brasil. (2017). *Base Nacional Comum Curricular.* Ministério da Educação. Brasília: MEC.

Brasil. (1997). *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática.* Ministério da Educação, Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC.

Chinellato, T. G. (2014). *O uso do computador em escolas públicas estaduais da cidade de Limeira/SP.* UNESP "Júlio de Mesquita Filho", Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Rio Claro: Programa de Pós-graduação em Educação Matemática.

De Villiers, M. D. (2001). Papel e funções da demonstração com o Sketchpad. *Revista Educação e Matemática, 62*, pp. 31-36.

Gray, E. M., & Tall, D. O. (1994). Duality, ambiguity and flexibility: a proceptual view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education, 26* (2), pp. 115-141.

Guerato, E. T. (2016). *Um estudo sobre a demonstração em Geometria Plana com alunos do Curso de Licenciatura em Matemática.* Universidade Anhanguera de São Paulo, Pós-graduação em Educação Matemática. São Paulo: UNIAN.

Javaroni, S. L., Zampieri, M. T., Oliveira, F. T. (2014). *Tecnologias digitais: É possível integrá-las às aulas de Matemática?* In: CONGRESSO INTERNACIONAL DAS TIC NA EDUCAÇÃO, III., Anais. Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, Lisboa, Portugal. 970–974.

Junior, C. A., & Nasser, L. (2012). Analisando justificativas e argumentação matemática de alunos do Ensino Fundamental. *VIDYA , 32* (2), pp. 133-147.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). *Adding it up: helping children learn Mathematics.* Washington, DC, United States of America: National Academy Press.

Pietropaolo, R. C. (2005). *(Re)Significar a demonstração nos currículos da Educação Básica e da formação de professores de matemática.* Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Pós-graduação em Educação Matemática. São Paulo: PUCSP.

Tall, D. O. (2013). *How humans learn to think mathematically: exploring the Three Worlds of Mathematics* (1st Edition ed.). Cambridge, England: Cambridge University Press.

Tinoco, L., & Silva, M. M. (2004). Argumentação no ensino de Matemática. *Anais do VIII Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM)* (pp. 1-11). Recife: SBEM.

Vera Helena Giusti de Souza Licenciada (1969) e Mestre em Matemática (1976) pelo Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo (IME-USP). Doutora em Educação Matemática (2008) pela PUC-SP. Sempre deu aula no Ensino Superior e, no momento, é Professora Colaboradora e Orientadora do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática do IME-USP.
verahgsouza@gmail.com
Maria Cristina Bonomi
Licenciada em Matemática pela Universidade de São Paulo (1969). É mestre em Matemática pela USP (1993) e doutora em Educação pela USP (1999). É professora doutora aposentada do IME-USP. Tem experiência na área de Matemática, com ênfase em Educação Matemática, tendo atuado principalmente no ensino de Cálculo. Atualmente exerce atividades de consultoria em ensino de Matemática.
cristinabonomi@gmail.com
William Vieira Doutor em Educação Matemática pela Universidade Anhanguera de São Paulo. Professor do Instituto Federal de São Paulo (IFSP) Campus Guarulhos. Membro do Grupo de Estudos e Pesquisa em Educação Matemática e Formação de Professores - GEPEMFOP do IFSP - Campus Guarulhos.
wvieira@ifsp.edu.br
Roberto Seidi Imafuku Doutor em Educação Matemática pela Universidade Anhanguera de São Paulo. Professor do Instituto Federal de São Paulo (IFSP) Campus Guarulhos. Membro do Grupo de Estudos e Pesquisa em Educação Matemática e Formação de Professores - GEPEMFOP do IFSP - Campus Guarulhos.
roberto.imafuku@ifsp.edu.br