UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2007, Número 10, páginas 95-108
ISSN: 1815-0640

El reparto de lo escaso

María Candelaria Espinel Febles

Resumen

El reparto de un bien escaso cuando es insuficiente para satisfacer las demandas de todos los acreedores, se conoce como problema de bancarrota. Mediante el problema del Talmud se muestra cómo actúan cinco reglas de reparto: proporcional, igualar ganancias, igualar pérdidas, por orden de llegada y la regla talmúdica. Todas las reglas surgen desde la intuición y la racionalidad y son una buena muestra de cómo abordar situaciones problemáticas para distribuciones complicadas. La resolución de problemas, como tema básico del currículo de matemáticas, ofrece la oportunidad de trabajar las reglas de reparto citadas en el aula con alumnos de secundaria. Obedecen a una variedad de principios de equidad e imparcialidad y que muestran estrategias de distribución que los alumnos pueden aceptar como lógicas y racionales

Abstract

The bankruptcy problem deals with the problem how to divide an estate among all creditors when the estate is insufficient to meet the deceased´s debts. The problem of the Talmud shows how five rules of distribution act: proportional, constraint equal award, constraint equal loss, random arrival and contested garment consistent. All the rules arise from the intuition and the rationality and are a good example of how approaching problematic situations for complicated divide. The resolution of problems, as basic subject of curriculum of mathematics, offers the opportunity to work in the secondary classroom with students using the mentioned rules of divide. This respect a variety of principles of fairness and impartiality and that show strategies of allocation that the students can accept like logics and rationale.

Introducción

Realizar repartos justos es una cuestión difícil que conlleva una amplia clase de problemas matemáticos. De forma cotidiana, la regla a la que más se acude para realizar repartos es el reparto proporcional, donde cada demandante obtiene una fracción de la propiedad a repartir, proporcional a su participación. Si bien, hay situaciones donde asignar una fracción de la propiedad, va en contra de la hipótesis de racionalidad que se supone a las personas. Un ejemplo paradigmático de tal situación lo tenemos en la Biblia con el juicio de Salomón. El reparto salomónico de dar medio niño a cada madre choca con el raciocinio de la verdadera madre.

Un caso conocido de reparto que parece imposible es el famoso *problema de los camellos* (Tahan, 2000): Tres hermanos reciben como herencia 35 camellos. La mitad para el mayor, la tercera parte para el mediano, y la novena parte para el más joven. El reparto que lleva a

$$17\ \tfrac{1}{2} + 11\ 2/3 + 3\ 8/9 = 33\ 1/8$$

no convence a los tres hermanos. Sin embargo, parece hacerse justicia con el reparto

$$18 + 12 + 4 \ = \ 34$$

Treinta y cuatro camellos para los hermanos y un camello para el que hace de juez que previamente aportó uno suyo para "repartir" 36 en lugar de 35. Esta solución suele sorprender a los estudiantes y puede ser fuente de profundas reflexiones matemáticas (Gámiz y Flores, 2006). La misma historia vale tomando otro número de camellos: 17, 53, 71, etc.

Otro caso emblemático de reparto, es el *problema del Talmud*. Este problema se ha puesto de moda tras la concesión del premio Nóbel de Economía 2005 a Robert Aumann, que precisamente se ha dedicado a investigar algunos problemas (Aumann y Maschler, 1985) que aparecen en el Mishna, texto sagrado que es la base de la legislación civil, criminal y religiosa Judía.

Problema planteado en el Talmud: un deudor en bancarrota debe a sus acreedores las cantidades de 100, 200 y 300, respectivamente. El deudor sólo dispone de 100. ¿Cómo debe repartirse esa cantidad entre los acreedores? Según el Mishna cada uno de los acreedores se llevará un tercio. Para el caso en que el deudor dispusiera de 200, el acreedor al que se le debe 100 se llevará 50 y los otros dos 75 cada uno. Y si el deudor dispone de 300, entonces a cada acreedor le corresponde 50, 100 y 150, respectivamente.

La situación se resume en la tabla 1.

		Demanda		
		100	***200***	***300***
Estado	**100**	33.33	33.33	33.33
	200	50	75	75
	300	50	100	150

Tabla 1

En este artículo utilizaremos este problema del Talmud, como hilo conductor para exponer los problemas de bancarrota y mostrar cinco reglas de reparto con el objetivo de divulgar su uso en la resolución de problemas en las matemáticas de secundaría. El trabajo se organiza con una introducción, descripción de las cinco reglas, luego éstas se aplican al caso particular de dos demandantes y se compara su efecto según cuatro supuestos distintos de estados disponibles con cuatro demandantes. Se finaliza con algunas reflexiones sobre la resolución de éstos problemas en el aula como una forma de estimular el interés por las matemáticas en nuestros alumnos.

Los problemas de reparto forman parte de la historia de las matemáticas. La idea básica que motiva esta clase de problemas de reparto, llamados de *bancarrota*, está en buscar cómo dividir de forma justa algo que es insuficiente para satisfacer las demandas de los acreedores. Por tanto, hay que asignar una cantidad insuficiente de forma que los demandantes o acreedores queden de acuerdo en que su deuda ha sido cubierta de la mejor forma posible. Lo que se busca es la regla de reparto que aplique criterios razonables, éticos y operativos.

En un problema de bancarrota hay un capital que se denomina estado (E) que debe ser dividido entre un número de demandantes, cuya demanda (D) total excede al estado disponible.

Una regla de bancarrota asigna a cada problema unos pagos que cumple las dos propiedades siguientes:

- Ningún agente obtiene más de la cantidad que demanda, lo que se resume diciendo que la regla es razonable, y

- La suma de las cantidades obtenidas por los acreedores es la totalidad del estado, es decir, la regla es eficiente.

Muchas situaciones económicas pueden modelizarse como un problema de bancarrota, donde la cuestión está en cómo dividir un recurso entre agentes que presentan demandas sobre un cierto bien disponible pero no suficiente para satisfacer todas las demandas. Las cinco reglas no se definen formalmente, sino que se realiza una aproximación intuitiva para ilustrar la racionalidad de cada una de ellas. Para ilustrar las diferencias entra ellas se presenta la solución al caso del Talmud para ver los distintos métodos de distribución y la lógica de cada uno de ellos.

El profesorado de primaria y secundaria, interesado en divulgar aplicaciones sencillas de las matemáticas a la vida cotidiana, puede utilizar en el aula sin necesidad de grandes conocimientos matemáticos por parte de los alumnos. La resolución de problemas es el motor de la actividad matemática. Los problemas de reparto forman parte de las matemáticas tradicionales. Creemos que los problemas de bancarrota son sugerentes y apropiados para llevar al aula de secundaria, igual que otros problemas propios de teoría se juegos (Gura, 2005). Situaciones como la distribución de impuestos, repartos de beneficios o las herencias ofrecen interesentes ejemplos sobre los que los alumnos pueden reflexionar y aportar sus propias soluciones y observar que la solución no consiste en un único reparto, sino en poner de acuerdo a los demandantes sobre la regla a elegir. Las distintas soluciones pueden surgir de una forma natural y redescubrir algunas de las reglas más conocidas para problemas de bancarrota.

1. Algunas reglas de reparto

Para estos problemas se ha fijado una terminología estándar y las reglas han sido caracterizadas por un conjunto de axiomas que se pueden consultar en la literatura especializada, por ejemplo, Thomson (2003).

Problema de bancarrota: Dividir la propiedad o estado E de la empresa entre todos los acreedores o demandantes $d = (d_1, \ldots, d_n)$. El problema de reparto surge porque la propiedad es insuficiente para satisfacer las demandas de todos los acreedores, es decir,

$$0 < E \leq D = d_1 + \ldots + d_n$$

A continuación se describen cinco reglas de reparto para problemas de bancarrota. Se suaviza en la presentación de cada una la parte teórica con el fin de plantear una situación donde hay un problema de distribución. Se muestra cómo actúa cada regla en el problema del Talmud. Y se añaden algunas reflexiones para situar este tipo de problemas en el currículo de la enseñanza secundaria, bien en secundaria obligatoria o en las matemáticas aplicadas a las ciencias sociales.

Regla de Reparto Proporcional

Cada demandante obtiene una fracción de los activos que es proporcional a su participación en las demandas totales. El demandante i obtiene la cantidad: $E\, d_i / D$.

La solución del problema del Talmud mediante el reparto proporcional se recoge en la tabla 2.

		Demanda		
		100	***200***	***300***
Estado	**100**	16.66	33.33	50
	200	33.33	66.66	100
	300	50	100	150

Tabla 2

La solución, tabla 1, que ofrecen los eruditos en el Talmud coincide (como se ve en la tabla 2) con la regla del reparto proporcional cuando el estado es 300, pero no coinciden para los otros dos estados.

La duda es saber si el reparto del estado 200 sigue alguna regla, y en caso de que exista si funciona para los tres estados. Esta inquietud la abordan Aumann y Maschler en 1985.

La forma que parece más natural para abordar situaciones de reparto es la proporcionalidad. Cada demandante obtiene una fracción del estado que es proporcional al peso de su participación en las demandas totales.

El reparto proporcional es el más frecuente en casi todos los ámbitos. En España cuando una empresa se declara en quiebra, la liquidación a los acreedores se realiza de forma proporcional a las deudas que la empresa ha contraído con ellos. En defensa de la regla de proporcionalidad hay que decir que es una regla que no se somete a la manipulación mediante la posible unión o división de los acreedores. Veremos esto más adelante con un ejemplo.

Regla de Ganancia Igualitaria

Otorga la misma cantidad a todos los demandantes sin dar a ninguno más de lo que demanda. Cada demandante i recibe E/n, siendo n el número de demandantes. Si esta cantidad es mayor que lo que demanda i, la cantidad que sobra se reparte en partes iguales entre el resto de los demandantes.

La solución del problema del Talmud mediante esta regla se recoge en la tabla 3.

		Demanda		
		100	***200***	***300***
Estado	**100**	33.33	33.33	33.33
	200	66.66	66.66	66.66
	300	100	100	100

Tabla 3

Esta regla da prioridad a las demandas más pequeñas. Todos los acreedores son tratados por igual sin importar el peso o tamaño de su demanda, si bien ninguno va a recibir más de lo que solicita, pues es lo que se considera para que la regla sea razonable.

Esta regla de ganancia igualitaria de puede ilustrar mediante un método geométrico (Malkevitch, 2005; González-Alcón y Alemán, 2006). Se dibujan envases o tanques con igual base y altura proporcional al tamaño de las demandas. Se comienza llenando todos los tanques con igual cantidad de líquido en cada uno, y manteniendo las alturas tan iguales como sea posible hasta que las alturas totales ascienden hasta el valor de E. La idea es que la cantidad se reparte en partes iguales entre todos los envases sin llegar a superar el tamaño del envase. Por ejemplo, con tres demandantes, de cantidades 10, 30 y 100, para un estado, E = 40; en un primer paso a cada demandante se le asignaría: 140/3 = 13.33. Como esta cantidad sobrepasa lo que pide el primer demandante (no cabe en el primer tanque), se reparte el exceso (3.33) en partes iguales a los otos dos demandantes y por tanto, los pagos que recibirá cada uno son 10, 15 y 15.

Regla de Pérdida Igualitaria

Se intenta que todos los demandantes pierdan lo mismo. Para ello se suman todas las demandas, D, y lo que falta para cubrir las demandas, D-E, se divide en partes iguales entre todos los demandantes: (D-E)/n. A cada demandante i se le asigna la diferencia ente su demanda y la pérdida: d_i-(D-E)/n. Si dicha cantidad es negativa no se le asigna nada, y se quitaría a partes iguales de las demandas del resto.

La solución del problema del Talmud mediante la pérdida igualitaria se recoge en la tabla 4.

		Demanda		
		100	***200***	***300***
Estado	**100**	0	0	100
	200	0	50	150
	300	0	100	200

Tabla 4

Con las tres demandas del Talmud y un estado de 100, las perdidas de cada acreedor son, respectivamente, 100, 200 y 200. Para, E = 200, el primer demandante pierde 100, y los otros dos 150 cada uno. Y el perjuicio que sufren los tres acreedores es el mismo, 100, para E = 300.

Con esta regla el grado de descontento de los acreedores tiende a igualarse. A los acreedores a los que se les debe poco dinero, la regla les trata bastante mal. La regla da prioridad a las demandas elevadas. Este método de asignación se suele aplicar cuando se trata de cubrir necesidades, por ejemplo para el apoyo público del gasto en salud, u otras necesidades de bien para toda la comunidad.

Método del Orden de Llegada

Supongamos que se colocan a los demandantes en fila y que según van llegando se les da lo que demandan, siempre que haya cantidad suficiente. El demandante que llega primero se le da su parte, luego al que llega el segundo, si queda propiedad, y así con toda la fila hasta que resta propiedad a repartir. Como todos los órdenes de llegada de los demandantes se consideran igualmente posibles, el número de ordenaciones es n!, siendo n el número de acreedores. La cantidad que este método asigna a cada demandante es la media de lo que obtienen los demandantes en todas las ordenaciones.

Para ilustrar esta interpretación tomemos el caso E = 300 del Talmud, y las demandas 100, 200 y 300. Las seis posibles ordenaciones de los tres demandantes se muestran en la primera columna de la tabla 5. Así, en el orden 123, el demandante 1 recibe 100, el demandante 2 recibe 200, y se acaba el capital por lo que el demandante 3 no recibe nada en esta ordenación.

	1	2	3
E = 300	*100*	*200*	*300*
123	100	200	0
132	100	0	200
213	100	200	0
231	0	200	100
312	0	0	300
321	0	0	300
Suma	300	600	900
Orden de Llegada	50	100	150

Tabla 5

La solución del problema del Talmud por el método se orden de llegada se recoge, para los tres estados considerados, en la tabla 6.

		Demanda		
		100	***200***	***300***
Estado	**100**	33.33	33.33	33.33
	200	33.33	83.33	83.33
	300	50	100	150

Tabla 6

El método del orden de llegada coincide con el valor de Shapley, que es uno de los conceptos más importantes en la teoría de juegos cooperativos y ha generado una abundante literatura. Se llama valor de Shapley a la asignación que recibe cada jugador en una propuesta de reparto según un criterio de arbitraje propuesto por Lloyd Shapley. El criterio consiste en asignar un pago a cada jugador en proporción al número de coaliciones potencialmente vencedoras en las que el jugador participa. Puede encontrarse una contribución para abordarlo mediante la combinatoria con estudiantes de secundaria en Espinel (2000).

La solución que aparece en la tabla 6, para el método del orden de llegada coincide con la regla del Talmud, tabla 1, y con la regla del reparto proporcional, tabla 2, cuando el estado es 100 o cuando es 300, pero no coincide para un estado de 200. En el problema del Talmud, se apunta como reparto justo 50, 75 y 75, cuando E = 200. Solución que no coincide con ninguna de las cuatro reglas presentadas hasta aquí. Si bien se observa que la solución, 33.33, 83.33 y 83.33, que aporta el valor de Shapley para juegos cooperativos, es la que más se parece a la del Talmud. Algo así debieron observar Aumann y Maschler (1985) para aplicar la teoría de juegos y dar con la solución en el nucleolo del juego que esta vez si coincide con la solución talmúdica o regla del bien disputado que se recoge a continuación.

Regla del Bien Disputado o Talmúdica

Esta es una regla que se apoya en el sentimiento de las personas. La idea es que, al parecer, los acreedores tienden a fijarse en lo que ellos esperaban ganar cuando el capital a repartir es pequeño, y miran sus pérdidas cuando el capital que hay para repartir es grande. Así que para que todos los acreedores queden satisfechos, si el estado es pequeño, digamos menor que la mitad de la deuda de todos los acreedores, se reparte igualando las ganancias. Y si el estado es grande, esto es mayor que la mitad de la deuda de todos los acreedores, se reparte igualando las pérdidas.

El método de bien disputado se puede encontrar desarrollado como un proceso racional en Aumann y Maschler (1985).

La solución depende de la relación entre la suma que demandan los acreedores y el estado. Primero se ordenan las demandas de menor a mayor:

$$d_1 \leq \ldots \leq d_n, \text{ siendo } D = d_1 + \ldots + d_n$$

Aplicar la regla supone comparar el estado, E, con la mitad de la deuda total, D/2. El problema de bancarrota puede plantearse como un problema de toma de decisiones, donde surgen cuatro casos.

Caso I. $E \leq D/2$ y $E \leq n\, d_1/2$.
Caso II. $E \leq D/2$ y $E \geq n\, d_1/2$.
Caso III. $E \geq D/2$ y $E \leq (D - nd_1/2)$.
Caso IV. $E \geq D/2$ y $E \geq (D - n\, d_1/2)$.

Veamos cada uno de los cuatro casos, y cómo actúa la regla de asignación mediante el problema del Talmud.

En los dos primeros casos el estado o capital a ser distribuido es pequeño en relación a la demanda total, esto es, $E \leq D/2$.

Caso I. $E \leq D/2$ y $E \leq n\, d_1/2$.

En este caso, según la regla, se asigna a cada acreedor la cantidad: E/n .

Nótese que si el estado o cantidad disponible para repartir es demasiado pequeña en relación a la suma de todas las demandas, no es posible asignar la mitad de la demanda más pequeña a cada acreedor, por eso se divide el estado de forma igualitaria entre todos los acreedores.

Si E = 100, D = 600, y d_1 = 100. La regla asigna a cada uno de los cuatro acreedores la cantidad: 33.33.

Caso II. $E \leq D/2$ y $E \geq n\, d_1/2$.

La división en este caso sigue el siguiente proceso. La cantidad $d_1/2$ es la primera que se proporciona a todos los acreedores. La cuota del primer acreedor se fija en $d_1/2$. La cantidad restante E se divide entre todos los acreedores, excluyendo el primero, hasta que todos obtengan $d_2/2$. La cuota del segundo acreedor se fija en $d_2/2$ y de nuevo la restante E se divide entre los acreedores, excluyendo el primero y el segundo, y hasta que todos obtengan $d_3/2$, y así se continúa el proceso.

Si E = 200, D = 600, y $d_1 = 100$, así que $200 \leq 600/2$ y $200 \geq 3.100/2$, por tanto la regla asigna, respectivamente, 50, 75 y 75.

En los dos casos siguientes, la cantidad o estado E a ser distribuida es grande en relación a las demandas, esto es, $E \geq D/2$.

Caso III. $E \geq D/2$ y $E \leq (D - nd_1/2)$.

La distribución para este caso sigue el proceso siguiente. Todos los acreedores reciben primero $d_1/2$. En este primer momento el primer acreedor tiene la cantidad más pequeña $d_1/2$ (la diferencia entre la demanda y $d_1/2$). El resto de E es un conjunto aparte y se utiliza para igualar las pérdidas del resto de los acreedores. El objetivo es poner a cada acreedor la pérdida más cercana a $d_1/2$ que E permita. Para ello se sigue el siguiente procedimiento. El acreedor con mayor pérdida (acreedor n) le será adjudicada una pérdida que iguale a la pérdida del acreedor (n-1). El siguiente paso es igualar la pérdida de los acreedores n y (n-1) con la pérdida del acreedor (n-2) y así sucesivamente hasta que E se acabe.

Si E = 300. Se cumple que $300 \geq 600/2$ y $300 \leq (600-3.100/2)$, quedando las asignaciones, respectivamente, en 50, 100 y 150.

Caso IV. $E \geq D/2$ y $E \geq (D - n\, d_1/2)$.

En este caso, el estado E, es suficiente para igualar las pérdidas de todos los acreedores. De aquí que el remanente de E sea igualmente distribuido entre todos los acreedores. Este último caso puede resumirse en

$$(E-D + nd_i)/n$$

Este IV caso no se presenta en el Talmud. Los resultados de la aplicación de esta regla al problema del Talmud se mostraron en la introducción de este artículo, tabla 1.

El reparto realizado a través de la regla del bien disputado es el mismo que se obtiene a través del nucleolo. El nucleolo es el conjunto de repartos que minimiza los excesos. Mediante el concepto de nucleolo se busca el reparto socialmente más justo en el sentido de que la coalición que resulte más desfavorecida en el reparto esté lo menos perjudicada posible.

2. Discusiones y ejemplos

Las cinco reglas de reparto consideradas en este trabajo conllevan asignaciones a los demandantes que aplican un determinado principio (igualar pérdidas, igualar ganancias o proporcionalidad), también se pueden definir nuevas reglas que se consideren justas según otros principios o según el objetivo o ambiente donde se plantee el reparto. Veamos algunas cuestiones que pueden resultar paradigmáticas.

La regla proporcional verifica la propiedad de no manipulabilidad, esto es, ningún acreedor mejorará su asignación uniéndose a otros acreedores o dividiendo sus demandas en otras más pequeñas. De las cinco reglas descritas, el reparto proporcional es la única no manipulable.

Veamos un ejemplo, para un estado, E = 40, con tres demandas individuales: 10, 30, 100. Por tanto, D = 140. Usando la regla de ganancia igualitaria, los demandantes consiguen 10, 15 y 15 respectivamente. Sin embargo si la persona que demanda 30 decide separarse en dos de 20 y 10, surgen cuatro demandas individuales: 10, 10, 20 y 100 el reparto de ganancia igualitaria asigna: 10, 10, 10 y 10. Así el demandante que pedía 30 y que conseguía 15, al separar su demanda consigue 20.

	10	30	100
40	10	15	15

	10	10	20	100
40	10	10	10	10

Esta paradoja no afecta al reparto proporcional. Cada acreedor obtiene una fracción del estado que es proporcional a su participación en las demandas totales.

Reparto entre dos

Algunos problemas de reparto que se recogen en textos antiguos aluden a una situación en la que dos individuos demandan partes de un solo bien, por ejemplo de una pieza de tela. De ahí procede el nombre de la regla del “bien disputado”.

El Mishna plantea y resuelve el siguiente problema para dos acreedores. Dos tienen una tela, uno de ellos la reclama entera, el otro reclama la mitad. Entonces al primero se le concede ¾ de la tela, al otro ¼ .

Veamos otros casos para dos acreedores y cómo se ve la regla talmúdica o del bien disputado. Si uno de los acreedores pide la pieza entera y el otro 3/2, la regla talmúdica le da la mitad a cada uno. Si embargo para el caso en que un acreedor pide 1/5 y el otro 3/2, la regla le da al primero sólo 1/10 y al segundo casi todo el bien: 9/10. En la tabla 7 se recogen estos tres casos, como modelos A, B y C. Además se muestra las asignaciones a los tres modelos por medio de las cinco reglas de reparto.

E = 1	Modelo A		Modelo B		Modelo C	
	d_1	d_2	d_1	d_2	d_1	d_2
Regla	1 / 2	1	1	3 / 2	1 / 5	3 / 2
Proporcional	1 / 3	2 / 3	2 / 5	3 / 5	2 / 17	15 / 17
Ganancia Igualitaria	1 / 2	1 / 2	1 / 2	1 / 2	1 / 5	4 / 5
Perdida Igualitaria	1 / 4	3 / 4	1 / 4	3 / 4	3 / 20	17 / 20
Orden Llegada	1 / 4	3 / 4	1 / 2	1 / 2	1 / 10	9 / 10
Bien Disputado	1 / 4	3 / 4	1 / 2	1 / 2	1 / 10	9 / 10

Tabla 7

Nótese que el método del orden de llegada y la regla del bien disputado en los tres modelos dan la misma solución. Esto no es casual, las dos soluciones de estas reglas coinciden siempre cuando hay dos acreedores. En ninguno de los tres modelos la regla de reparto proporcional coincide con la del bien disputado, de hecho el reparto proporcional no es una regla talmúdica.

Obsérvese cómo para el Modelo C, a excepción de orden de llegada y bien disputado, todas las reglas dan soluciones distintas.

La regla de reparto proporcional para dos acreedores se puede mostrar en un sistema cartesiano donde los ejes representan a los dos acreedores. La asignación que le corresponde a cada acreedor se obtiene como el punto donde se corta la recta de posibles asignaciones con la recta que une la respectiva demanda con el origen. Así la intersección de la recta $d_1 + d_2 = 1$ con la recta $d_2 = 2\, d_1$ da la solución (1/3, 2/3) que corresponde al Modelo A.

Equidad para cuatro acreedores

A lo largo del artículo se han estudiado problemas de Bancarrota para dos acreedores y tres acreedores mediante el Talmud. A continuación se muestra un ejemplo con cuatro acreedores y distintos estados con el objetivo de comparar cómo actúan las cinco reglas de reparto.

Se consideran cuatro acreedores con deudas, $d_1 = 100$, $d_2 = 200$, $d_3 = 300$, $d_4 = 400$, por tanto, una deuda total, D = 1000 (1000 = 100 + 200 + 300 + 400).

En las siguientes tablas se muestran los repartos correspondientes según cuatro estados, E = 60, 400, 700 y 850.

E = 60	100	200	300	400	
Proporcional	6	12	18	24	60
Ganancia Igualitaria	15	15	15	15	60
Pérdida Igualitaria	0	0	0	60	60
Orden Llegada	15	15	15	15	60
Bien Disputado	15	15	15	15	60

E = 400	100	200	300	400	
Proporcional	40	80	120	160	400
Ganancia Igualitaria	100	100	100	100	400
Pérdida Igualitaria	0	0	150	250	400
Orden Llegada	41.66	71	125	158.33	400
Bien Disputado	50	100	125	152	400

E = 700	100	200	300	400	
Proporcional	70	140	210	280	700
Ganancia Igualitaria	100	200	200	200	700
Pérdida Igualitaria	100	200	200	200	700
Orden Llegada	66.66	141.66	191.66	300	700
Bien Disputado	50	116.6	216.6	316.6	700

E = 850	100	200	300	400	
Proporcional	85	170	255	340	850
Ganancia Igualitaria	100	200	275	275	850
Pérdida Igualitaria	25	125	225	325	850
Orden Llegada	75	164.583	252.083	358.333	850
Bien Disputado	62.5	162.5	262.5	362.5	850

Tabla 8

Las asignaciones que aparecen en la tabla 8 nos permiten observar la táctica de estas reglas.

Mientras el estado crece es posible mediante cualquiera de las cinco reglas satisfacer la demanda de los acreedores. Si hay dinero es fácil contentar a todos los demandantes.

Cuando el bien a repartir es escaso, la dificultad es evidente, pues estamos ante el reparto de la “miseria”. Es evidente que la regla de pérdida igualitaria perjudica a los acreedores con bajas demandas. Seguro que, en este sentido, la forma que parece más natural para abordar situaciones de reparto es la proporcionalidad.

Si bien aun aplicando reglas diferentes se puede obtener la misma solución. Para E=60, las soluciones de tres reglas coinciden con una asignación de 15 para cada acreedor. Para E=700, la regla de ganancia igualitaria y la regla de pérdida igualitaria asignan el mismo reparto. El método del orden de llegada y la regla del bien disputado coinciden en sus asignaciones cuando el estado es 60 y en los otros tres estados el valor de las soluciones es bastante parecido.

3. Algunas reflexiones y la resolución de problemas

El artículo se ha escrito pensando en posibles aplicaciones en la Enseñanza Secundaria. Los sistemas de reparto justo y en concreto el problema de bancarrota, ofrecen la oportunidad de plantear problemas en el aula de secundaria donde los alumnos no les baste con aplicar una regla aritmética, sino que se reclame de ellos una defensa y justificación a las soluciones aportadas. Los problemas de reparto, y la búsqueda de métodos justos puede ser un gran incentivo para estudiantes avanzados o talentosos en matemáticas. En los cursos de secundaria obligatoria los estudiantes tienen los conocimientos matemáticos suficientes para captar cada una de las reglas aquí descritas. Los estudiantes pueden aportar sus propias reglas de reparto, comparar con las que ofrecen sus compañeros y discutir las soluciones.

Las cinco reglas de reparto introducidas nos invitan a reflexionar sobre cuál es el reparto razonable, especialmente si nosotros mismos nos viéramos involucrados en una situación dispondríamos de pautas para defender nuestros propios intereses. Y al mismo tiempo hacer un reparto compatible con lo que cada una de las personas implicadas cree merecer. Así que con la resolución de este tipo de problemas estamos aportando estrategias y métodos de resolución de problemas. Y constatar que en lugar de poner de acuerdo a los demandantes para repartir los bienes abundantes o escasos, es importante fijar previamente una buena y razonable regla de reparto. Estando la regla fijada es más fácil resolver los conflictos personales.

La proporcionalidad es la regla más conocida y es la que aplican los estudiantes, pues se incentiva desde la enseñanza oficial. De hecho, hay en España un atractivo casi enfermizo por aplicar la “la regla de tres”. O bien, según el desarrollo del currículo que los alumnos tengan más reciente, aplican el álgebra. Así, por ejemplo, para resolver el reparto de 100 entre tres demandantes que aportaron 100, 200 y 300, denominan por x al porcentaje que le corresponde a cada demandante, y formulan la ecuación: $100x + 200x + 300x = 100$, operan $600x = 100$, por tanto $x = 1/6$. Así que el pago del primer demandante es 1/6.100, el segundo recibe 1/6 .200 y el tercero 1/6. 300.

El método proporcional parece lógico y justo porque utiliza el tamaño de las demandas. Si se mira el problema de bancarrota por la proporcionalidad de las pérdidas se llega a la misma solución, algo que sería interesante incentivar desde la enseñanza. Por ejemplo, en el problema del Talmud para E = 100, el reparto proporcional que le corresponde a cada acreedor es 16.66, 33.33 y 50. La pérdida total es 500 (= 600–100). Si se realiza un reparto proporcional de esta pérdida se obtiene: 500.1/6 = 83.33; 500.2/6 = 166.66 y 3/6. 500 = 250. Así se tiene, 100-83.33 = 16.33; 200-166.66 = 33.33 y 300-250=50. Esto es, la misma solución que cuando utilizamos las demandas.

La regla de igual pérdida disminuye las demandas en igual medida entre todos los acreedores, con la única condición de que ningún acreedor le corresponda cantidades negativas. Esta regla proporciona un reparto en el que el grado de descontento de los agentes tiende a igualarse.

Como es sabido repartir nunca es trabajo fácil. Todos conocemos situaciones de reparto donde la abundancia o escasez de un bien impide un acuerdo entre las personas involucradas. Pensemos en las frecuentes disputas entre hermanos por la herencia. Para trabajar con los alumnos se puede tomar un ejemplo real o bien simular entre ellos una situación. Por ejemplo si tres compañeros participan en una actividad en la que han invertido tiempo o dinero. Pongamos una ganancia de 300 euros. Si esta cantidad no es suficiente para cubrir las aportaciones de cada uno, hay que decidir sobre cuál es el reparto razonable según el tiempo o el dinero que cada uno ha invertido. Por ejemplo Ana, Beatriz y Carlos han invertido 120, 150 y 180 euros respectivamente; podemos preguntarles si les parece justo el reparto de 80, 95 y 125 que les asigna el método de orden de llegada.

Bibliografía

- Aumann, R. J. (1982). Game Theory in Talmud. En http://dept.econ.yorku.ca/~jros/docs/AumannGame.pdf
- Aumann, R.J. y Maschler, M. (1985). Game Theory Analisis of Bankruptcy Problem from the Talmud. Journal of Economic Theory, 36, 195-213.
- Espinel, M. C. (2000). El poder de las coaliciones en algunas instituciones. UNO, 233, 57-70.
- Gallestegui, M.C.; Inarra, E. y Prellezo, R. (2001). Bankruptcy and Fishing Regulation: The Northern European Anglerfish Fishery. Marine Resource Economics, 17, 4, 291-307.
- Gámiz, L. C. Y Flores, P. (2006). Papel pericial de las matemáticas. Los repartos. http://ddm.ugr.es/personal/pflores/textos/aRTICULOS/Propuestas/REPARTOS.pdf
- González-Alcon, C. y Alemán, M. (2006). Reglas hidráulicas para problemas de bancarrota. SEIO 2006. En www.seio2006.ull.es/resumenes.php
- Gura, E. (2005). Using game theory to increase students´ motivation to learn mathematics. En www.ratio.huji.ac.il
- Malkevitch, J. (2005). Resolving Bankruptcy Claims. En http://www.ams.org/featurecolumn/archive/bankruptcy.html
- Tahan, M. (2000). El hombre que calculaba. Veron editores. Barcelona
- Thomson, W. (2003): Axiomatic and game-theoretic analysis of bankruptcy and taxation problems: a survey. Mathematical Social Sciences, 45, 249-297.

Maria Candelaria Espinel Febles. Profesora Titular de Didáctica de la Matemática, Universidad de La Laguna. Tenerife. España.
E-mail: mespinel@ull.es