UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2007, Número 10, páginas 37-51
ISSN: 1815-0640

¿Conocía Sherlock Holmes la Teoría de Grafos?

Francisco M. Canto Martín, Juan Núñez Valdés y Serafín Ruiz Cabello

Resumen

En este artículo se muestran las ventajas que ofrece la Teoría de Grafos a la hora de resolver determinados problemas clásicos de Matemáticas, que normalmente se suelen intentar probando una a una las diferentes posibilidades existentes, o bien por el conocido método de la "cuenta de la vieja". Su principal objetivo es mostrar cómo esta Teoría facilita una gran cantidad de estrategias útiles para la resolución de estos problemas, de manera más rápida, elegante y sencilla de la habitual. Uno de estos problemas trata precisamente de cómo Sherlock Holmes pudo resolver un caso de asesinato, utilizando los grafos.

Abstract

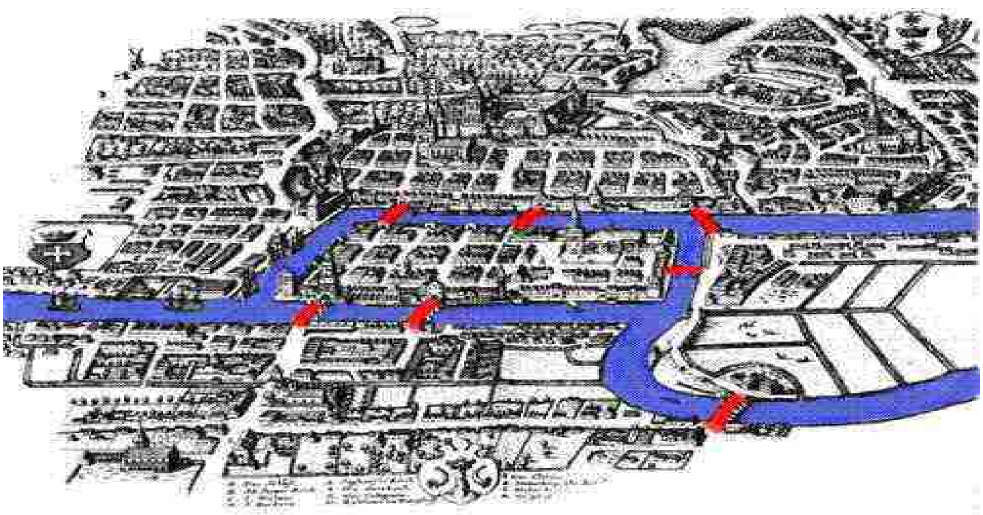
In this paper, we show the advantages offered by Graph Theory to solve some classic mathematical problems, which are normally solved by using other non systematic techniques, such that to go one to one testing different possibilities or to use what in Spain is called "la cuenta de la vieja". Its main goal is to show how Graph Theory allows to systematize and formalize a lot of useful strategies to find the solution of those problems in an easier, smarter and faster way than usual. One of these problems deals with the solution given by Sherlock Holmes to a case of murder by using graphs.

Introducción

Creemos que no es aventurado afirmar que, prácticamente, todos los que nos dedicamos actualmente a la enseñanza de las Matemáticas en cualquiera de sus niveles hemos tenido la experiencia de asistir cuando éramos alumnos a clases de esta disciplina en las que nuestro Profesor, con mayor o menor intención didáctica por su parte algunas veces, o simplemente para pasar el rato en las más de las ocasiones, nos planteaba una serie de problemas totalmente diferentes de los que estábamos habituados a resolver en el aula, a los que no siempre el más listo o empollón de la clase conseguía dar con su solución.

Estos problemas, como los que trataremos en este artículo, eran denominados por el profesor *problemas de ingenio*, o *problemas de razonamiento,* o *pasatiempos,* o simplemente, *problemas curiosos*, y ciertamente que atraían la curiosidad de los más de los alumnos, que nos dedicábamos de lleno a intentar resolverlos, utilizando para ello todo tipo de razonamientos o estrategias particulares de cada uno que, extrañamente, no nos habían sido comentadas en clase y que cuando el primer afortunado en encontrar la solución de alguno de ellos la exponía al resto de sus compañeros, a petición del profesor, naturalmente, y con la lógica timidez, aunque también con el orgullo personal que ello conllevaba, comentaba que su principal argumentación era que había utilizado la *cuenta de la vieja* para resolverlo.

Sin embargo, esto que decimos, que podemos narrar como una experiencia propia, y por tanto, bastante moderna, fue precisamente lo que también le sucedió al genial matemático suizo Leonhard Euler (1707-1783), cuando en 1735 un grupo de jóvenes de la por aquel entonces ciudad prusiana de Königsberg fue a visitarle para pedirle que resolviera una cuestión que inquietaba sobremanera a los habitantes de la misma y sobre la que no llegaban a ponerse de acuerdo: saber si era posible encontrar un camino que atravesase las cuatro zonas de la ciudad en las que ésta quedaba dividida como consecuencia del paso del Río Pregel por la misma, pasando una y sólo una vez por cada uno de los siete puentes que existían para cruzarlo (véase la figura de abajo, que muestra un plano de la ciudad de Königsberg en tiempos de Euler, en la que los siete puentes aparecen coloreados de rojo y el Río Pregel de azul).



Cuando esta cuestión, conocida actualmente con el nombre de *Problema de los Puentes de Königsberg*, le fue formulada a Euler, él mismo comentó:

> *"Se me ha informado que, mientras unos dudaban la posibilidad de hacerlo y otros lo negaban, nadie sostenía que fuese posible realmente. El problema podría resolverse haciendo cuidadosamente una tabla de todos los recorridos posibles, asegurándose así, por inspección, de cuál de todos ellos, si es que alguno hay, satisface lo requerido. Este método de solución, sin embargo, es demasiado tedioso y difícil a causa del gran número de combinaciones posibles… Por tanto, lo descarté y traté de buscar otro que mostrase solamente si se puede descubrir un camino que satisfaga la condición prescrita"*

por lo que, como se puede apreciar, el propio Euler trató de resolver el problema de una forma algo más precisa y metódica que por la simple experimentación de todos los casos posibles. Para ello, Euler pasó primeramente a *modelizar* la situación, prescindiendo de la naturaleza física del problema y sustituyendo las cuatro zonas habitadas de la ciudad por *puntos* y los siete puentes por *líneas* entre esos puntos, con lo cual creó un diagrama geométrico, que constituyó el germen de lo que actualmente conocemos como un grafo. De hecho, esta resolución del problema por Euler, que dio además una solución general al problema, independientemente del número de zonas o de puentes que hubiese en la ciudad, supuso el nacimiento de una nueva rama de las Matemáticas, la *Teoría de Grafos,* distinta de las tradicionales conocidas hasta el momento. Ésta es la razón por la que a Euler se le suele denominar el "*padre de la Teoría de Grafos*", si bien es preciso constatar, en honor a la verdad, que actualmente se admite que esta teoría tiene también otros precursores distintos a Euler, como pueden ser Kirchhoff (problemas de redes eléctricas), Guthrie (problema de los cuatro colores) o Cayley (teoría de árboles). Una visión más completa del problema de los puentes de Königsberg puede ser consultada en Alfonso y otros (2004).

Siguiendo entonces por nuestra parte la metodología de Euler, vamos a resolver en este artículo algunos de aquellos pasatiempos o problemas de ingenio, de los comentados anteriormente, empleando únicamente la Teoría de Grafos como herramienta para su resolución. El principal objetivo de este artículo es, por tanto, hacerle ver al lector que la Teoría de Grafos permite sistematizar y formalizar una gran cantidad de estrategias válidas para la resolución de estos tipos de problemas, que habitualmente suele encontrar el lector resueltos por otros métodos.

No obstante, es también conveniente indicar que, a pesar de su sencillez y de la sin duda, potencial ayuda que esta teoría puede ofrecer como herramienta a utilizar a la hora de resolver ese tipo de problemas antes comentado, el estudio de esta teoría no está contemplado formalmente en ninguna de las etapas del Plan de Estudios español: ni en la Enseñanza Secundaria Obligatoria (12 a 16 años), ni por supuesto en la etapa anterior de Primaria (6 a 12 años), ni siquiera en las Facultades Universitarias de Matemáticas, en las que esta teoría no aparece como asignatura en muchas de ellas, o si aparece, lo hace en forma de asignatura optativa o de Libre Configuración, en el 2º Ciclo (a partir del tercer año de la licenciatura), o bien, como curso, también optativo por regla general, en los estudios de Máster o de Doctorado.

La estructura de este artículo es la siguiente: en primer lugar se recuerdan en una primera sección los aspectos más básicos y elementales de esta teoría, que serán los que se utilicen en las citadas resoluciones, a las que va dedicada íntegramente la segunda sección. Para una visión más global y completa de la Teoría de Grafos, puede consultarse Harary (1991) o Bollobás (1979), por ejemplo.

Aspectos básicos de la Teoría de Grafos

Un *grafo* es un par G = (V, A), donde V es un conjunto numerable (no vacío) y A es un conjunto de pares no ordenados de elementos de V (eventualmente vacío). Los elementos de V se denominan *vértices* (o puntos o nodos) y los de A se denominan *aristas* (o líneas). Un grafo se dice *etiquetado* si en él se distinguen sus vértices, es decir, si se ha asignado un cierto nombre a cada uno de sus vértices. En caso contrario, el grafo se dice *no etiquetado*.

Un ejemplo de grafo sería: G = (V, A), tal que V = {a, b, c, d}, A = {ab, ac, ad}.

En lo que sigue, denotaremos por G al grafo, por V = V(G) al conjunto de sus vértices y por A = A(G) al conjunto de sus aristas. Un grafo se puede representar de varias formas. De ellas, las más frecuente e intuitiva, aunque no operativa para el uso del ordenador, es mediante un *diagrama* en el que aparezca un punto por cada vértice y una línea entre cada dos vértices unidos. Así por ejemplo, el grafo anterior puede venir representado según:

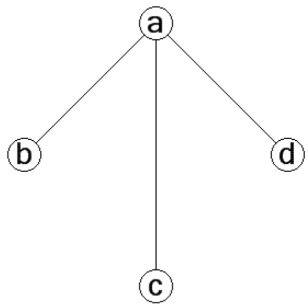


Figura 1

Para el propósito de lo que sigue, exigiremos que en un grafo no existan ni aristas repetidas (en cuyo caso se hablaría de *multigrafos*) ni lazos (aristas del tipo aa, en cuyo caso se hablaría de *seudografos*). No obstante, si se considera A como un conjunto de pares ordenados, es decir, si se les ha dado un cierto sentido a todas las aristas de un grafo, puede hablarse entonces de *grafos dirigidos o digrafos*.

Dos vértices de un grafo se dicen *adyacentes* si ambos definen una arista en el grafo. En este caso, dichos vértices se dicen *extremos* de la arista. Una arista se dice que es *incidente* con cada uno de sus vértices extremos y dos aristas que comparten un extremo se dicen *incidentes*. En el grafo de la Figura 1 puede verse que los vértices a y d son adyacentes, pero b y c no lo son. Por otra parte, todas las aristas de dicho grafo son incidentes (en el vértice a).

Se denomina *grado* de un vértice v de V(G) y se representa por d(v) o bien al número de aristas del grafo que son incidentes con él o bien al número de vértices del grafo que son adyacentes con él. Por convenio, un vértice no se considera adyacente consigo mismo. Los vértices de grado 0 se denominan *aislados* y los de grado 1, *hojas o finales*. Nótese que d(a) = 3, y d(c) = 1, en la Figura 1.

Un grafo se denomina *regular* si todos sus vértices tienen el mismo grado. Si este grado es 2, el grafo se denomina *ciclo* (los ciclos se representan por C_n, siendo n el número de vértices del grafo). Se denomina grafo *completo* (y se representa por K_n) a todo grafo regular de n vértices y grado n-1 cada uno de ellos, es decir, al grafo que tiene todas las aristas posibles. En la Figura 2 aparecen representados C_4 y K_5, respectivamente, de izquierda a derecha.

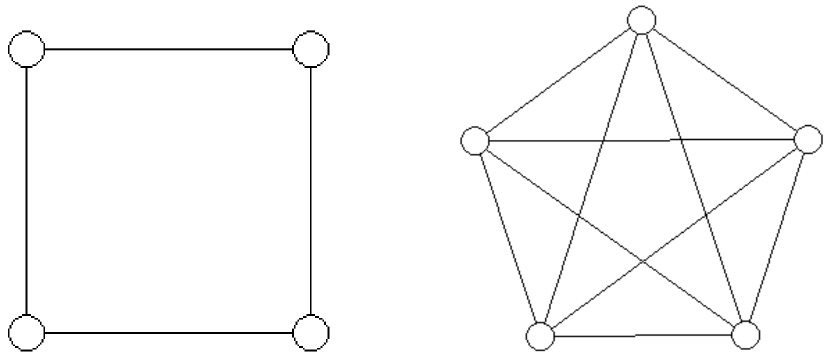


Figura 2

Un grafo G se dice *bipartito* si su conjunto de vértices V se puede descomponer en dos subconjuntos disjuntos no vacíos V1 y V2 de modo que toda arista de G tenga un extremo en V1 y el otro en V2. Si el grafo bipartito tiene todas las aristas posibles, se denomina grafo *bipartito completo*. Si los cardinales de V1 y de V2 son m y n, respectivamente, entonces el grafo bipartito completo se representa por $K_{m,n}$.

Sea G = (V, A) un grafo. Un grafo G' = (V', A') se dice *subgrafo* de G si V' está contenido o es igual que V y A' está contenido o es igual que A. De entre los posibles subgrafos de un grafo, tienen especial trascendencia los subgrafos maximales o spanning. Un subgrafo G' = (V', A') de un grafo G = (V, A) se denomina *maximal o spanning* si V = V', es decir, si G' tiene los mismos vértices que G.

Sea G = (V, A) un grafo. Se denomina grafo *complementario* de G al grafo que tiene el mismo conjunto de vértices que G y verifica que entre cada dos de esos vértices existe una arista si y sólo si dicha arista no existe en G. Nótese que el grafo complementario de un grafo no es un subgrafo de dicho grafo.

Sea v un vértice del grafo G. Se denota por G-v al subgrafo de G que se obtiene eliminando el vértice v y todas las aristas incidentes con él (aunque el otro extremo de tales aristas permanezca).

Sea G = (V, A) un grafo. Un *camino* en G es una sucesión finita de vértices y aristas alternados, cuyo primer elemento es un vértice, tal que dos elementos consecutivos de la misma sean siempre incidentes. Un camino en el que todas sus aristas sean distintas se denomina *recorrido*. Un *arco* en G es un recorrido en el que todos los vértices que lo forman son distintos, y finalmente, un *ciclo* en G es un camino cerrado en G que es un arco excepto en el hecho de que el primer y último vértice coinciden. En el grafo de la Figura 3, la sucesión de vértices (se omiten las correspondientes aristas) a,c,d,g,d,b, sería solamente un camino, mientras que los vértices a,c,d,g,h,e,b ya formarían un arco. Por otra parte, d,e,h,g,d sería un ciclo.

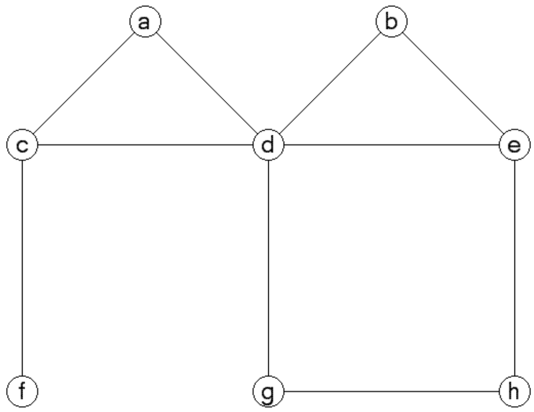


Figura 3

Un camino en un grafo se dice *euleriano* si en él entran todas las aristas y además una sola vez cada una de ellas (puede ser abierto o cerrado), mientras que se dice *hamiltoniano* si en él entran todos los vértices y además una sola vez cada uno de ellos. Nótese que en el grafo de la Figura 3 no hay caminos eulerianos (en Teoría de Grafos se prueba que para que existiesen, el número de vértices de grado impar debería ser 0 (y entonces el camino sería cerrado: empezaría y terminaría en el mismo vértice) ó 2 (camino abierto: empezaría en un vértice y terminaría en otro distinto)). Sin embargo, en el grafo de la figura hay 4 vértices de grado impar.

Un grafo se dice *conexo* si dos cualesquiera de sus vértices pueden unirse mediante un arco. Si un grafo no es conexo, se dice *disconexo*. El grafo de Fig. 3 es claramente conexo.

Algunos Problemas resueltos por Teoría de Grafos

Se presentan en esta sección una serie de problemas clásicos, del tipo de los comentados en la introducción, que pueden ser resueltos utilizando la teoría de grafos. Muchos de ellos son problemas ya conocidos y suelen aparecer en otros textos resueltos por otros métodos. En todos ellos vamos a comprobar que la teoría de grafos nos ayuda a resolverlos de forma más sencilla.

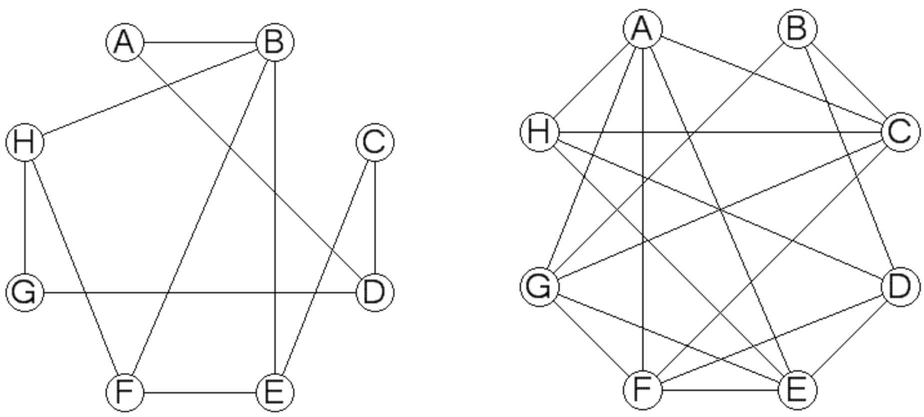
Problema 1.- ***Vecinos incompatibles.***

Se desea sentar a 8 personas en los vértices de una mesa octogonal, pero prestando atención a la siguiente condición: cada uno de ellos no acepta sentarse junto a algunos de los demás. Deducir si es posible hacerlo, respetando que A no quiere sentarse junto a B ni D; B no quiere sentarse junto a A, E, F ni H; C no quiere sentarse junto a D ni E; D no quiere sentarse junto a A, C ni G; E no quiere sentarse junto a B, C ni F; F no quiere sentarse junto a B, E ni H; G no quiere sentarse junto a D ni H; y, por último, H no quiere sentarse junto a B, F ni G.

Normalmente, este problema se intenta resolver probando una a una las posibilidades que a cada uno se le ocurran, sin orden ni concierto, es decir, sin emplear ni una estrategia ni un procedimiento sistemático de actuación. Por otra parte, dado que el número total de posibilidades que hay para sentar a las 8 personas en una mesa octogonal es 5040 ((8-1)! = 7!), sería un esfuerzo bastante improductivo intentar escribirlas todas e ir eliminando una a una aquéllas que no satisficiesen las condiciones exigidas. Sin embargo, veremos que la Teoría de Grafos nos ofrece una forma de resolver el problema muy corta, sencilla y elegante.

Para ello, construiremos un grafo asociado al enunciado de tal forma que cada persona será un vértice y dos vértices compartirán arista en caso de que sus representantes no acepten sentarse juntos (grafo de la izquierda de la figura).

Basta tomar entonces el grafo complementario del anterior, en el que las aristas representarán ahora las posibles compatibilidades. Es muy fácil encontrar entonces en este último grafo un 8-ciclo que nos proporciona la solución. Una posible configuración de la mesa sería la siguiente: [B, C, H, A, F, G, E, D].



Problema 2.- ***Personas que se conocen.***

Dada una reunión de personas, probar que siempre habrá dos de ellas que conozcan al mismo número de personas.

Nótese que un enunciado equivalente al anterior, pero usando terminología de grafos, sería el siguiente: *dado un grafo cualquiera, de n vértices, probar que al menos dos de ellos tienen el mismo grado.*

Ahora es muy sencillo de resolver. Supongamos que no existe tal grafo. Como el grado máximo de cada vértice será (n-1), al no poder ser un vértice adyacente consigo mismo, y el grado mínimo será 0, en caso de que ser aislado, el número de valores distintos que pueden tomar los grados de los vértices es exactamente n. Entonces, al haber también n vértices, la única posibilidad de que no haya vértices con el mismo grado es que un vértice tenga grado 0, otro 1, otro 2, y así sucesivamente hasta otro que tenga grado (n-1).

Sin embargo, aquí se observa una contradicción, pues si hay un vértice de grado 0, esto significa que dicho vértice es aislado, por lo que ningún otro vértice podrá ser adyacente con él. O lo que es lo mismo, ningún vértice podrá tener grado (n-1), como habíamos supuesto. Por tanto, al menos dos vértices tendrán el mismo grado, o volviendo al enunciado original, siempre habrá dos personas (puede haber más, lógicamente) que conozcan al mismo número de otras personas.

Problema 3.- ***Seis personas.***

Probar que en toda reunión de seis personas, siempre habrá tres que se conozcan, o bien tres que no se conozcan entre sí. Probar también que esto no ocurre siempre en grupos de cinco personas.

Para resolver este problema traducimos de nuevo su enunciado a Teoría de Grafos (de hecho, este problema es conocido en esa teoría con el nombre de "*Problema de Ramsey*"). La cuestión es, si dado un grafo cualquiera de seis vértices, será siempre posible encontrar un triángulo en él (un C_3) o en su complementario.

Sea entonces A un vértice cualquiera del grafo, que fijaremos a partir de ahora. Supongamos que A es adyacente con al menos tres vértices distintos, que podemos decir, sin pérdida de generalidad, que son B, C y D. Entonces, si existe una arista entre dos cualesquiera de dichos vértices, habríamos acabado tomando el triángulo formado entre A y dichos dos vértices. En caso contrario, entonces B, C y D no compartirán arista alguna, por lo que en el grafo complementario formarán forzosamente un triángulo.

Por otro lado, si A no fuese adyacente con al menos tres vértices, tomaríamos el grafo complementario. Al haber cinco vértices más, y dado que al menos tres de ellos no eran adyacentes a A en el grafo original, es seguro que A será adyacente a al menos tres vértices en éste. Podemos proceder de manera análoga, con lo que queda probado el problema en todo caso.

Es inmediato demostrar que esto no se cumple en general para cinco vértices. Basta tomar como ejemplo el C_5, es decir, el grafo ciclo de cinco vértices.

Problema 4.- ***La mesa redonda.***

4.1.- *Un grupo de 9 personas se reúne todos los días alrededor de una mesa redonda. Queremos saber cuántos días podrán hacerlo de modo que cada nuevo día tengan al lado a dos personas diferentes. ¿Qué pasaría si fueran 10 personas? ¿Y un número cualquiera de personas?"*

Consideremos el grafo completo K_9, que representa la mesa y todas las posibles relaciones entre sus miembros. Elegir una configuración en la mesa es equivalente a tomar un camino hamiltoniano sobre el grafo (es decir, uno que pase por cada vértice una y sólo una vez). Si dos caminos distintos comparten una arista, eso significa que en las dos configuraciones de la mesa que representan, hay dos personas juntas. Esto es lo que queremos evitar. La cuestión es entonces calcular cuántos caminos hamiltonianos disjuntos podemos encontrar en K_9. Ya que éste posee en total 9 • 8 / 2 = 36 aristas y cada ciclo necesita 9, es inmediato ver que el máximo posible de configuraciones distintas es de 4. Una posible solución es:

[1 2 3 9 4 8 5 7 6] – [1 3 4 2 5 9 6 8 7] – [1 4 5 3 6 2 7 9 8] – [1 5 6 4 7 2 8 3 9]

Ahora veamos el caso de 10 personas. Ya sabemos cómo hay que operar. El K_{10} tiene 10 • 9 / 2 = 45 aristas y cada ciclo necesita 10, luego el máximo posible será 4 configuraciones distintas. Una posible solución sería:

[1 2 3 10 4 9 5 8 6 7] – [1 3 4 2 5 10 6 9 7 8]
[1 4 5 3 6 2 7 10 8 9] – [1 5 6 4 7 3 8 2 9 10]

Es inmediato hacer los cálculos para un n cualquiera (excluyendo los casos triviales n = 1, 2 ó 3). En general, son posibles k soluciones distintas para n = 2k + 1 ó n = 2k + 2.

4.2.- *Supongamos ahora que el grupo es de 12 personas, de las cuáles 6 son hombres y el resto, mujeres. Se desea sentarlos en una mesa redonda atendiendo a la misma regla del apartado anterior y teniendo en cuenta, además, que cada mujer debe estar sentada entre dos hombres y viceversa. ¿Cuántas configuraciones diferentes pueden darse?*

Este apartado es prácticamente similar al anterior, salvo que ahora trabajaremos con grafos bipartitos completos. En este caso particular, con el $K_{6,6}$. Este grafo posee 36 aristas, y un ciclo hamiltoniano cualquiera comprende 12. Luego ya sabemos que, como máximo, habrá 3 configuraciones distintas, Y, en efecto, ésta es la solución pedida. A continuación se muestra una posible configuración:

[M1 – H1 – M2 – H2 – M3 – H3 – M4 – H4 – M5 – H5 – M6 – H6]
[M1 – H3 – M2 – H4 – M3 – H5 – M4 – H6 – M5 – H1 – M6 – H2]
[M1 – H5 – M2 – H6 – M3 – H1 – M4 – H2 – M5 – H3 – M6 – H4]

Problema 5.- ***El zorro, el conejo y la lechuga.***

Un pastor (P) necesita cruzar un río junto con sus tres pertenencias: un zorro (Z), un conejo (C) y una lechuga (L). Para ello dispone de una pequeña barca de remos en la que sólo cabe él junto con una sola de sus pertenencias. Sin embargo, no puede dejar solos en una misma orilla al mismo tiempo ni al zorro con el conejo, ni al conejo con la lechuga, para evitar una catástrofe. ¿Le será posible al pastor cruzar el río en estas condiciones? En caso afirmativo, dar los pasos que debe seguir.

Éste es un problema clásico y muy conocido, y no es difícil comprobar que tiene solución, aunque deben darse palos de ciego hasta encontrarla. Sin embargo, veamos que la resolución mediante un grafo de este problema y de otros similares simplifica mucho el proceso de hallar la solución, o de demostrar que no existe.

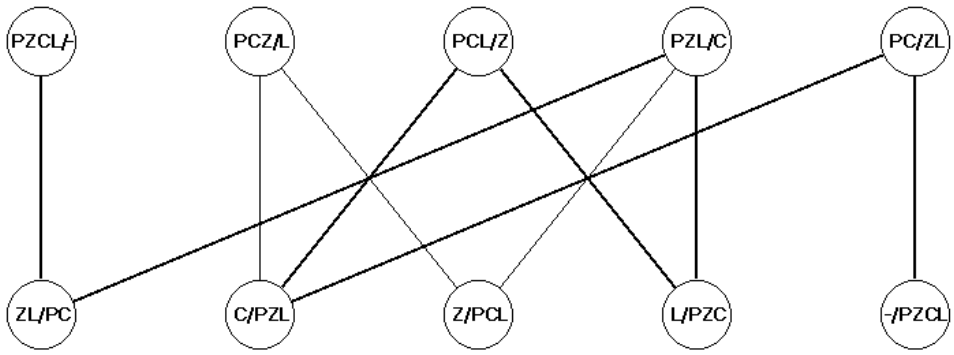
Para ello, sea pues G = (V, A) un grafo tal que cada vértice v_i esté formado por un par (a_i , b_i), de tal modo que cada uno de los elementos del conjunto {P, Z, C, L} esté contenido en a_i ó en b_i para cada i. El primer elemento de cada par representará la orilla izquierda del río y el segundo, la orilla derecha.

Obsérvese que no todas las configuraciones son posibles. Por ejemplo, ({P, Z}, {C, L}) no cumple las hipótesis porque el conejo podría comerse la lechuga. Por comodidad y para simplificar la notación, podemos suponer que v_i = (a_i), ya que el segundo elemento del par es evidente si se conoce el primero. No es muy difícil ver entonces que V tendrá 10 elementos:

V = {Ø, {L}, {C}, {Z}, {Z, L}, {P, C}, {P, Z, C}, {P, Z, L}, {P, C, L}, {P, Z, C, L}}

Dos vértices estarán unidos si puede pasarse de una situación a otra. Por ejemplo, Ø y {P, C} estarán unidos porque el pastor puede llevarse a la otra orilla al conejo en un solo movimiento sin desembocar en una posición de peligro, pero Ø y {L} no compartirán arista porque la lechuga no puede cruzar sola el río.

Ya sólo nos queda representar el grafo G y ver que, efectivamente, existe un camino entre {P, Z, C, L} y Ø. Por lo que el problema tiene solución y, además, es posible darla explícitamente (véase el grafo de la figura).



Problema 6.- ***Las dos jarras.***

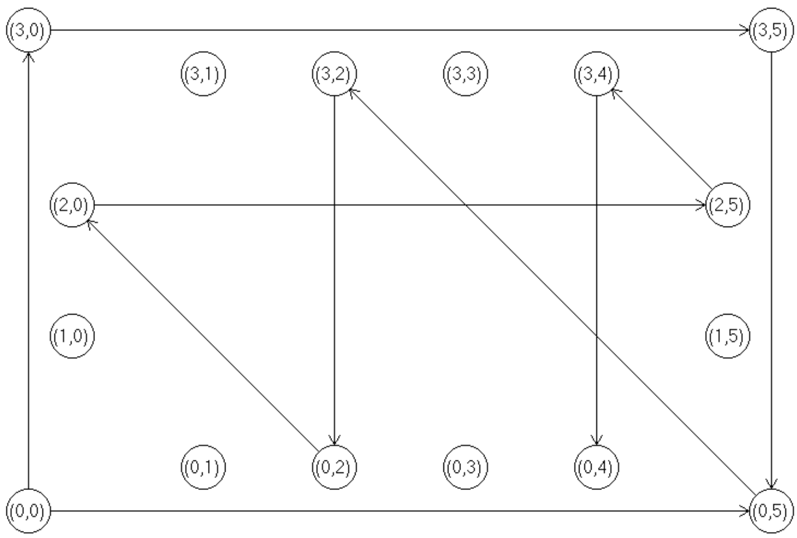
Tenemos un gran bidón de agua del que queremos sacar exactamente cuatro litros. Para ello se dispone únicamente de dos jarras de tres y cinco litros de capacidad, respectivamente, sin medida alguna. Probar que es posible hacer esta operación, mostrando además alguna forma de realizarla.

Nuevamente se trata de un problema clásico y que puede resolverse fácilmente por tanteo, aunque nosotros vamos a valernos de los grafos para resolverlo. Es importante indicar además que aunque la solución que nosotros vamos a dar se ciñe a este enunciado particular, un análisis sencillo de la misma serviría para resolver el caso más general de cualesquiera dos capacidades de las jarras.

Vamos a crear entonces un grafo G que tenga (3 + 1)(5 + 1) = 24 vértices (véase la figura de abajo). Cada uno de ellos se notará como v_{ij}, donde i varía entre 0 y 3 y j varía entre 0 y 5. El par (i, j) corresponde a la configuración en la que la jarra pequeña contiene i litros y la grande j litros. No hace falta decir que el grafo contempla todas las posibles configuraciones de agua en las dos jarras, y los dígitos indican la cantidad de agua contenida en cada jarra. Sería necesario probar que estas cantidades no pueden tomar valores fraccionarios, pero podemos suponerlo cierto, ya que por construcción se verá que es evidente.

En esta figura puede contemplarse dicho grafo que, inicialmente, no contiene aristas. Vamos a construir un nuevo grafo sobre éste, de forma que cada posible trasvase de agua quede representado por una arista. Este grafo va a ser orientado, es decir, los vértices tendrán un único sentido. Esto es fácil de ver con el siguiente ejemplo: podemos pasar de la configuración (2,0) a la (0,0), que no es más que vaciar la jarra pequeña. Pero es imposible pasar de (0,0) a (2,0) en un solo movimiento. En general, dado v_{ij}, existirán aristas con él de origen y destino los siguientes vértices (siempre que tengan sentido y sean distintos al de origen): v_{i0}, v_{0j}, v_{3j}, v_{i5}, v_{a5}, y v_{3b}, donde a = 5 – i –j, b = 3 –i –j. Las operaciones asociadas son: vaciar una de las dos jarras, llenar una de ellas, o volcar el contenido de una en la otra. Por supuesto, no siempre van a ser posibles las seis operaciones. Por ejemplo, si partimos de (0,2) podemos llegar a (0,0), (3,2), (0,5) ó (2,0). Esto nos permite ver que todo vértice que no cumpla i = 0, 3 ó j = 0, 5 va a ser un vértice aislado si partimos de (0,0). Por tanto, no podríamos llegar nunca a (1, 4) ni (2, 4), solamente a (0, 4) ó (3, 4). La idea es encontrar un camino que partiendo de v_{00} llegue a v_{i4}, para un i cualquiera (ya que no podemos tener 4 litros en la jarra pequeña).

A continuación mostramos el grafo final, aunque solo con parte de las aristas, ya que el número total de éstas es elevado y dificulta la visión del problema. Pero es fácil ver que, partiendo de (0, 0), podemos llegar a (3, 0) y (0, 5). Utilizamos éste último para ir a (3, 2), de éste a (0, 2), y así sucesivamente, a (2, 0), a (2, 5) y a (3, 4), que es una de las posibles soluciones, lo que completa el proceso. Conviene reseñar que se han omitido los vértices interiores del grafo original porque ninguna arista podría partir de ninguno de ellos, dado que las jarras no están graduadas y, por tanto, es imposible medir cantidades intermedias en ambas al mismo tiempo.



Problema 7.- ***¿Quién mató al duque de Densmore?***

"Un día, Sherlock Holmes recibió la visita de su amigo Watson, a quien había encargado investigar sobre un misterioso asesinato que estaba sin resolver desde hacía más de tres años.

El Duque de Densmore había muerto al explosionar una bomba que había destruido por completo el castillo de Densmore, a donde éste se había retirado. Los periódicos de aquellas fechas relataban que en su testamento, también perdido en la explosión, no había dejado nada a una de sus siete ex-mujeres. Ahora bien, antes de morir, las había invitado a todas a pasar unos días en el castillo.

-Recuerdo éste caso –dijo Holmes–. Lo curioso es que la bomba estaba diseñada especialmente para ser escondida bajo los pilares de la habitación en la que dormía el Duque. Lo que significa que la asesina tuvo que efectuar varias visitas al castillo para poder activarla.

-Ciertamente –dijo Watson–, y por ello las he interrogado a todas. Y todas me juraron que no habían estado en aquel castillo más que una vez en su vida.

-Tal vez una de ellas mienta. ¿Preguntaste a cada una de ellas que días pasó allí?

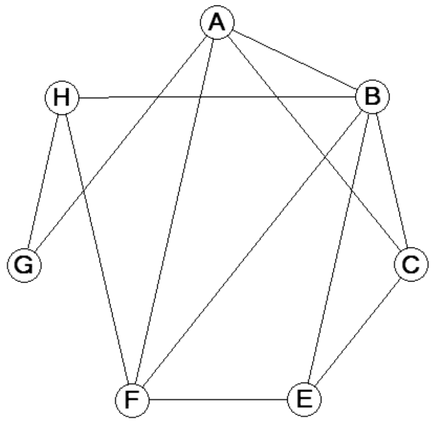
-Sí, pero desgraciadamente, después de tantos años ninguna recordaba las fechas exactas. Sin embargo, cada una de ellas sí recordaba a qué otras esposas había visto allí durante su estancia. Esto fue lo que me dijeron: Ann vio a Betty, Charlotte, Felicia y Georgina; Betty vio a Ann, Charlotte, Edith, Felicia y Helen; Charlotte vio a Ann, Betty y Edith; Edith vio a Betty, Charlotte y Felicia; Felicia vio a Ann, Betty, Edith y Helen; Georgina vio a Ann y Helen; y Helen vio a Betty, Felicia y Georgina.

¿Lo ve, mi querido Holmes? Las respuestas concuerdan unas con otras.

Entonces, Holmes cogió un lápiz e hizo un extraño dibujo, en el que colocó siete puntos con las letras A, B, C, E, F, G y H (la D la reservó para el propio Duque de Densmore), y líneas uniendo algunos de esos puntos. Luego, tras unos minutos, exclamó:

-¡Mira, Watson! Lo que acabas de decirme me conduce de manera única a la asesina.

La pregunta es ¿Quién mató al Duque de Densmore?"

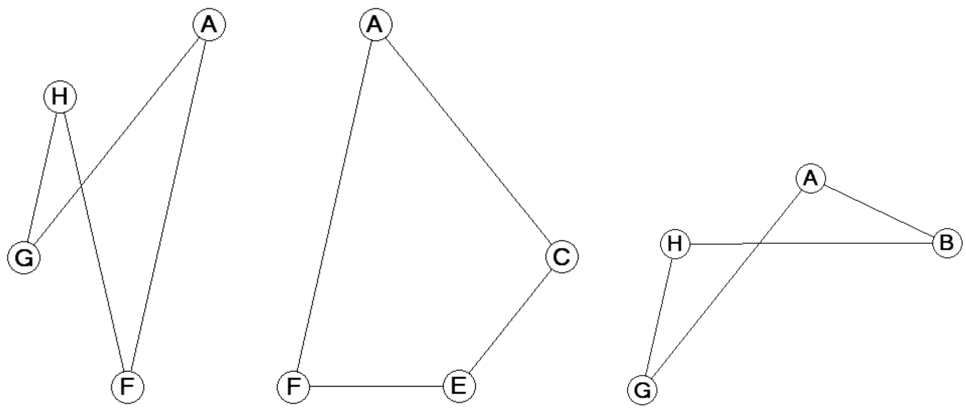


Obviamente, lo que Sherlock Holmes dibujó era un grafo que representaba las relaciones entre las siete mujeres. La estrategia de resolución está basada en una clase de grafos especiales, llamados *grafos de intervalos*. Un grafo G se dirá que es de intervalos cuando exista una colección de intervalos (cerrados y conexos) de la recta real, tales que el grafo que tiene un vértice por cada intervalo de dicha colección y en la que dos vértices comparten arista si y sólo si la intersección de sus correspondientes intervalos es no vacía sea dicho grafo G (para mayor información sobre este tipo de grafos pueden consultarse las website 1 y 2).

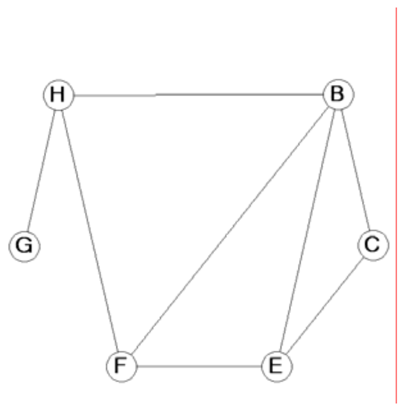
Así pues, parece lógico que el grafo de nuestro problema no vaya a ser un grafo de intervalos, y en efecto, así ocurre (probaremos esto más adelante). Ello es debido a que al menos una de las mujeres miente y estuvo varias veces en el castillo, con lo cuál su intervalo de estancia en éste no es conexo. También veremos que sólo hay un vértice tal que si lo eliminamos del grafo, el subgrafo resultante es de intervalos.

Dicho vértice nos dará la solución.

En primer lugar, necesitamos ver que el grafo ciclo C_4 no es un grafo de intervalos. La prueba es muy sencilla. Si llamamos P, Q, R y S a sus vértices, vemos que Q es adyacente con P y R, luego los conjuntos ($I_P \cap I_Q$) e ($I_R \cap I_S$) serán no vacíos. Sea x el máximo del conjunto I_P e y el mínimo del conjunto I_R. Por ser conexos los intervalos (es decir, "de una pieza"), podemos suponer que x < y (el caso opuesto, es análogo y no es necesario analizarlo), siendo además estricta la desigualdad, porque P y R no son adyacentes. Como S es adyacente con ambos, el intervalo correspondiente I_S debe cortar a los otros dos, I_P e I_R. Ello implica que x pertenezca a I_S, lo cual es una contradicción, ya que x también debe pertenecer a I_Q.



Por lo anterior, deducimos que todo grafo que contenga un 4-ciclo, en el que los dos pares de vértices no consecutivos no sean adyacentes, no puede ser un grafo de intervalos. Por tanto, el grafo de nuestro problema no puede serlo, ya que bastaría tomar el 4-ciclo que forman los vértices A, D, F y H. De idéntica manera, considerando los siete subgrafos creados al eliminar cada uno de los vértices del anterior, puede comprobarse rápidamente que sólo unos de ellos es un grafo de intervalos. Ayudándonos de los tres subgrafos arriba señalados, podemos ver que eliminar cualquier vértice que no sea A sigue dejando un grafo de intervalos en el resto. En efecto, el primer subgrafo está construido eliminando los vértices B, C y E; el segundo, B, G y H; y el tercero, C, E y F. Así pues, sólo hay un posible vértice tal que al quitarlo del grafo completo resulte un subgrafo que no sea de intervalos, que es el A. Luego fue Ann quien mató al Duque de Densmore.



Bibliografía

- M. Alfonso, S. Bueno, M. R. Diánez, M. C. de Elías, J. Núñez (2004): "Siete puentes, un camino: Konigsberg". Revista SUMA 45, 69-78.
- B. Bollobás (1979): Graph Theory. Springer-Verlag. New York.
- F. Harary (1991): Graph Theory. Addison Wesley.
- Website1 http://www.lmc.fc.ul.pt/~pduarte/tmf/Grafos/Intervalos-exemplo-5.html
- website2: www.lmc.fc.ul.pt/~pduarte/tmf/Grafos/Intervalos.html#prop-intervalos

Francisco Manuel Canto Martín, nacido el 23 de Junio de 1985 en Ronda (Málaga). Actualmente es alumno de cuarto curso de la Licenciatura de Matemáticas en la Universidad de Sevilla, habiendo obtenido numerosas matrículas en las asignaturas de cursos anteriores. Participó en la XXXIX Olimpiada Matemática, organizada por la Real Sociedad Matemática Española en el año 2003, clasificándose para la fase nacional.

Juan Núñez Valdés, nacido en Sevilla en 1952, es Licenciado y Doctor en Matemáticas por la Universidad de Sevilla, en la que trabaja actualmente como Profesor Titular del Dpto. de Geometría y Topología, con sede en la Facultad de Matemáticas. Su principal línea de investigación son los grupos y álgebras de Lie, habiendo publicado varios artículos sobre los mismos en diferentes revistas de impacto. Pertenece como vocal a la Junta Directiva de la Delegación Provincial de Sevilla de la S.A.E.M. THALES, siendo autor de varias publicaciones sobre Matemáticas Recreativas y Divulgativas, así como también sobre Historia de las Matemáticas.
Dirección: Dpto de Geometría y Topología. Facultad de Matemáticas. Universidad de Sevilla. Aptdo 1160. 41080-Sevilla (España).
E-mail: jnvaldes@us.es

Serafín Ruiz Cabello, nacido el 8 de Octubre de 1985 en Sevilla. Actualmente es alumno de cuarto curso de la Licenciatura de Matemáticas en la Universidad de Sevilla. Participó en la XXXIX Olimpiada Matemática, organizada por la Real Sociedad Matemática Española en el año 2003, clasificándose para la fase nacional. Obtuvo la máxima calificación (M.H.) en la asignatura de libre configuración de Teoría de Grafos.