UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2007, Número 10, páginas 27-35
ISSN: 1815-0640

¡Feliz cumpleaños, Leonhard!

Vicente Meavilla

1. Introducción

El 15 de abril de 2007 se cumplió el tricentésimo aniversario del nacimiento de Leonhard Euler, uno de los científicos más notables de toda la historia de la humanidad.

Leonhard Euler (1707-1783). Dibujo de Vicente Meavilla

En las líneas que siguen, a modo de homenaje, ofrecemos cuatro teoremas geométricos incluidos en la memoria *Variae demonstrationes Geometriae* (Algunas demostraciones de Geometría), publicada en 1750.[1] Con ello, pretendemos que los profesores noveles de los niveles no universitarios se sientan animados a incluir en

[1] Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae 1, pp. 49-66.

sus programaciones de aula algunos tópicos de *geometría sintética* (tan olvidados en los actuales currículos de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas) siguiendo el mismo discurso que utilizaron los grandes maestros. A tal fin, también incluimos una actividad de enseñanza-aprendizaje inspirada en el trabajo de Euler.

Apunte biográfico

Leonardo Euler nació en Basilea (Suiza) en 1707.

Su padre, pastor calvinista, se preocupó de que la formación intelectual de su hijo fuese de gran calidad. Leonardo estudió matemáticas con Jean Bernoulli, física, astronomía, medicina, teología y lenguas orientales.

En 1727, animado por sus amigos y compatriotas Daniel y Nicolás Bernoulli, ingresó en la Academia de San Petersburgo. En 1730 ocupó la cátedra de filosofía natural y a los veintisiete años, después de que Nicolás y Daniel dejasen San Petersburgo, se convirtió en el matemático más relevante de la Academia. A los veintiocho años perdió la vista de su ojo derecho.

En 1741 se incorporó a la Academia de Berlín, pero en 1766 volvió a Rusia. En 1771 se quedó ciego pero ello no impidió que Euler siguiera publicando e investigando.

Leonhard murió en 1783 mientras se estaba tomando una taza de té y jugando con uno de sus nietos.

Se cuenta que cuando el filósofo ateo D. Diderot visitó la corte rusa fue informado de que un matemático suizo había demostrado la existencia de Dios mediante razonamientos de tipo algebraico. Interesado por dicha noticia y esperando rebatir tales argumentos, Diderot concertó una entrevista con Leonardo. Puesto en contacto con Euler, éste le dijo: “Señor $(a + b^n)/n = x$, entonces Dios existe”. Diderot, cuyos conocimientos de álgebra eran nulos, se quedó sin respuesta y regresó a Francia.

Euler escribió sobre temas relativos a todas las ramas de las matemáticas. A lo largo de su vida publicó más de quinientos libros y artículos y fue padre de trece hijos.

Entre sus numerosísimas contribuciones destacamos las referentes al simbolismo matemático. Así, Euler introdujo el símbolo **e** para la base de los logaritmos naturales; π para la razón de la circunferencia al diámetro; **i** para la unidad imaginaria; **a**, **b**, **c** para los lados de un triángulo; **A**, **B**, **C** para los ángulos de un triángulo; Σ para la suma; **f(x)** para una función de x.

En geometría elemental es famosa su fórmula **c + v = a + 2**, que relaciona el número de caras (**c**), vértices (**v**) y aristas (**a**) de cualquier poliedro convexo.

La expresión $e^{\pi i} + 1 = 0$, que aparece en su *Introductio in analysin infinitorum* (1748), incluye los cinco números más importantes de las Matemáticas.

2. Los teoremas

49

VARIAE DEMONSTRATIONES
GEOMETRIAE.

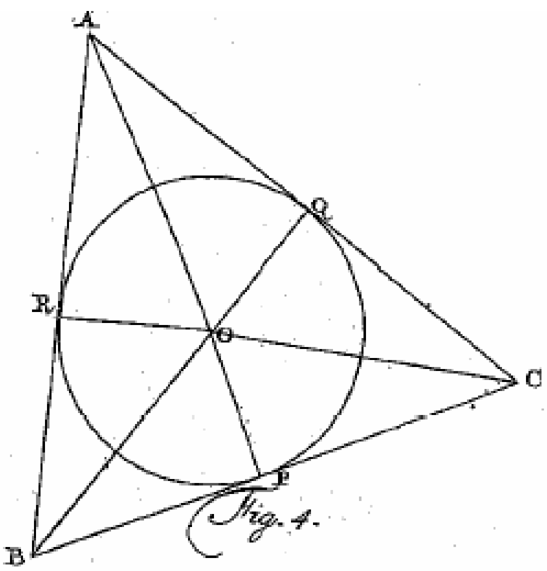
AVCTORE
L. EVLERO.

Advirtamos que en los cuatro teoremas siguientes hemos respetado la numeración que aparece en el texto original, utilizado las figuras que le acompañan y, además, intentado ser fieles al estilo del autor.

Teorema 6

El área de cualquier triángulo ABC es igual a la del rectángulo cuyos lados son la semisuma de las longitudes de los lados del triángulo y el radio de su circunferencia inscrita. Es decir:

$$\text{Área}_{ABC} = \frac{1}{2}(AB + AC + BC) \cdot OP$$



Demostración

Desde el centro O de la circunferencia inscrita trácense las perpendiculares OP, OQ y OR a cada uno de los lados. Estas líneas serán iguales al radio de la circunferencia inscrita. Desde O, trácense las líneas OA, OB y OC que dividen al triángulo propuesto en tres triángulos AOB, AOC y BOC, cuyas alturas son iguales OR = OQ = OP y cuyas bases son los lados AB, AC y BC del triángulo.

Entonces:

$$\text{Área}_{\ ABC} = \text{Área}_{\ AOB} + \text{Área}_{\ AOC} + \text{Área}_{\ BOC} =$$

$$= \frac{1}{2}AB \cdot OR + \frac{1}{2}AC \cdot OQ + \frac{1}{2}BC \cdot OP = \frac{1}{2}(AB + AC + BC) \cdot OP$$

Teorema 7

Si desde el centro O de la circunferencia inscrita al triángulo ABC se trazan las perpendiculares OP, OQ y OR a los lados, entonces:

$$AR = AQ = S - BC$$

$$BR = BP = S - AC$$

$$CP = CQ = S - AB$$

$$AR + BP + CQ = S,$$

siendo $S = \frac{1}{2}(AB + AC + BC)$.

Demostración

Dado que las perpendiculares OP, OQ y OR son iguales, es claro que

$$AQ = AR, \quad BP = BR \quad \text{y} \quad CP = CQ$$

Entonces:

$$AB + AC + BC = 2 \cdot AR + 2 \cdot BP + 2 \cdot CQ \Rightarrow AR + BP + CQ = \frac{1}{2}(AB + AC + BC) = S$$

Por tanto:

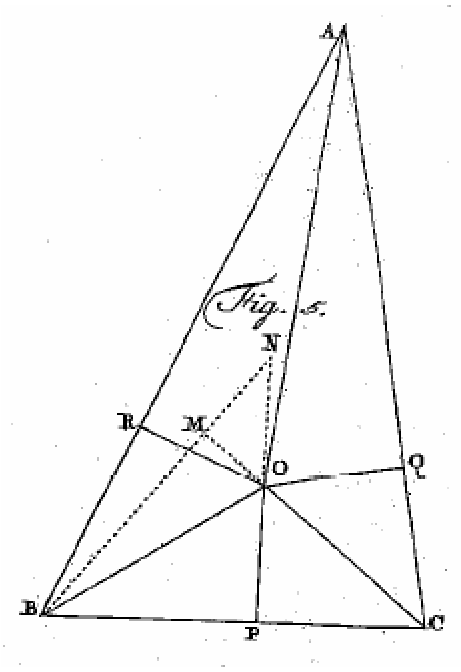
$$AR + BC = S \Rightarrow AR = AQ = S - BC$$

$$BP + AC = S \Rightarrow BP = BR = S - AC$$

$$CQ + AB = S \Rightarrow CQ = CP = S - AB$$

Teorema 8

Si, como antes, desde el centro O de la circunferencia inscrita al triángulo ABC se trazan las perpendiculares OP, OQ y OR a los lados, entonces el producto AR · BP · CQ es igual al producto de S por el cuadrado del radio OP de la circunferencia inscrita. Es decir: AR · BP · CQ = S · OP^2.



Demostración

Desde el centro de la circunferencia inscrita dibujemos las líneas OA, OB y OC a cada uno de los vértices del triángulo ABC. Tracemos la perpendicular BM a CO o a su prolongación. Esta línea cortará a OP (o a su prolongación) en el punto N.

Como los ángulos A, B y C son bisecados por las líneas OA, OB y OC,

resulta que:

$$\text{áng. BOM} = \frac{\text{áng. B}}{2} + \frac{\text{áng.C}}{2},$$

dado que el ángulo BOM es exterior al triángulo BOC.

Además:

$$\text{áng. BOM} + \text{áng. OBM} = 90^{\circ}$$

Por tanto:

$$\frac{\text{áng. B}}{2} + \frac{\text{áng.C}}{2} + \text{áng. OBM} = 90^{\circ}$$

Por otro lado:

$$\text{áng. A} + \text{áng. B} + \text{áng. C} = 180^\circ \Rightarrow \frac{\text{áng. A}}{2} + \frac{\text{áng. B}}{2} + \frac{\text{áng. C}}{2} = 90^\circ$$

Luego:

$$\frac{\text{áng. B}}{2} + \frac{\text{áng.C}}{2} + \text{áng. OBM} = \frac{\text{áng. A}}{2} + \frac{\text{áng. B}}{2} + \frac{\text{áng. C}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{áng. OBM} = \frac{\text{áng.A}}{2} = \text{áng. OAR}$$

Entonces, los triángulos rectángulos BOM y AOR son semejantes.

Por tanto:

$$\frac{AR}{RO} = \frac{BM}{MO} \Rightarrow \frac{AR}{OP} = \frac{BM}{MO} \qquad [1]$$

Además, como los triángulos rectángulos CBM, NBP y NOM son semejantes, se tiene que:

$$\frac{BM}{BC} = \frac{MO}{ON} \Rightarrow \frac{BM}{MO} = \frac{BC}{ON} \qquad [2]$$

A partir de [1] y [2], resulta que:

$$\frac{AR}{OP} = \frac{BC}{ON} \Rightarrow AR \cdot ON = OP \cdot BC$$

Dado que ON = PN – OP, obtenemos que:

$$AR \cdot (PN - OP) = OP \cdot BC \Rightarrow AR \cdot PN - AR \cdot OP = OP \cdot BC \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AR \cdot PN = AR \cdot OP + BC \cdot OP = (AR + BC) \cdot OP$$

Como, en virtud del teorema 7, AR + BC = S tendremos que:

$$AR \cdot PN = S \cdot OP$$

Por otro lado, los triángulos rectángulos COP y NBP son semejantes. Entonces:

$$\frac{PN}{BP} = \frac{CP}{OP} \Rightarrow OP \cdot PN = BP \cdot CP \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AR \cdot BP \cdot CP = AR \cdot OP \cdot PN = S \cdot OP^2 \Rightarrow AR \cdot BP \cdot CQ = S \cdot OP^2$$

Teorema 9[2]

Se puede calcular el área de cualquier triángulo ABC restando la longitud de cada lado al semiperímetro, multiplicando estas tres diferencias por el semiperímetro y extrayendo la raíz cuadrada de dicho producto. Es decir:

$$\textit{Área}_{ABC} = \sqrt{S(S-AB)(S-AC)(S-BC)}$$

Demostración

En virtud del teorema 6, el área del triángulo ABC es igual a

$$\frac{1}{2}(AB + AC + BC) \cdot OP$$

Es decir:

$$\text{Área}_{ABC} = S \cdot OP$$

Pero, por el teorema 8, sabemos que:

$$S \cdot OP^2 = AR \cdot BP \cdot CQ$$

Entonces:

$$S^2 \cdot OP^2 = S \cdot AR \cdot BP \cdot CQ \Rightarrow S \cdot OP = \sqrt{S \cdot AR \cdot BP \cdot CQ} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Área ABC} = \sqrt{S \cdot AR \cdot BP \cdot CQ}$$

Además, en virtud del teorema 7, sabemos que:

$$AR = S - BC$$

$$BP = S - AC$$

$$CQ = S - AB$$

Por tanto:

$$\text{Área}_{ABC} = \sqrt{S(S-AB)(S-AC)(S-BC)}$$

[2] En este teorema Euler demuestra la conocida “fórmula de Herón” para el área de cualquier triángulo.

3. La actividad de enseñanza-aprendizaje

Apoyándonos en la demostración del teorema 6 ofrecida por Leonhard Euler, proponemos la siguiente actividad de enseñanza-aprendizaje que puede ponerse en práctica con alumnos del segundo ciclo de Educación Secundaria Obligatoria (14-16 años).

1. Dibuja un triángulo cualquiera ABC y traza las bisectrices de sus tres ángulos.

¿Cómo se llama el punto O en el que se cortan las tres bisectrices?

¿Conoces alguna propiedad de dicho punto?

2. Desde el punto O traza tres perpendiculares a AB, AC y BC, respectivamente. Sean P, Q y R los puntos en que dichas rectas cortan a los lados BC, AC y AB.

¿Existe alguna relación entre las longitudes de OP, OQ y OR?

3. Divide el triángulo ABC en tres triángulos mediante los segmentos OA, OB y OC.

Compara las longitudes de las alturas de dichos triángulos.

¿Cuáles son las longitudes de las bases de dichos triángulos?

4. Calcula las áreas de los triángulos AOB, AOC y BOC en función de las longitudes de los lados del triángulo ABC y del radio de su circunferencia inscrita.

5. Calcula el área del triángulo ABC como suma de las áreas de los triángulos AOB, AOC y BOC.

4. Una recomendación

La lectura de textos originales, sobre todo si están escritos por grandes científicos, es una rica fuente en la que todo profesor de Matemáticas debería beber en su búsqueda de nuevos enfoques, procedimientos, problemas motivadores, etc., etc.

Por esto, desde aquí una recomendación:

Leamos a los grandes maestros, son los únicos que nos pueden abrir caminos en este difícil arte de la enseñanza.

Referencias on line

▪ The Euler Archive

http://www.math.dartmouth.edu/~euler/

Vicente Meavilla
Departamento de Matemáticas
Universidad de Zaragoza (España)
E-mail: vmeavill@hotmail.com