UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2007, Número 10, páginas 19-26
ISSN: 1815-0640

Euler y el Análisis Matemático

José M. Méndez Pérez

Leonhard Euler (1707, Basilea, Suiza - 1783, San Petersburgo, Rusia) es quizás el matemático más prolífico de toda la historia, equiparable sin duda en importancia al trío de matemáticos por excelencia: *Arquímedes, Newton y Gauss.* Su vasta obra ha originado una ingente empresa editorial que, bajo el nombre de *Opera Omnia*, pretende reproducir fielmente toda su producción científica. Se inició en 1911 y está aún sin concluir. La Comisión de Euler de la Academia Suiza de Ciencias y la editorial Birkhäuser han realizado el ímprobo esfuerzo de reeditar, con absoluto respeto a las fuentes originales, todos los trabajos de Euler organizándolos en cuatro series. La primera está dedicada a sus trabajos matemáticos; la segunda y tercera, a sus contribuciones a la mecánica, la astronomía y otras ramas de la física; y la cuarta, a su extensa correspondencia científica y epistolar. ¡En total, 86 volúmenes, cantidad que probablemente sea superada!

En lo que respecta al *Análisis Matemático* nos centraremos expresamente en tres obras:

Introductio in Analysin Infinitorum[1]

Institutiones Calculi Differentialis

Institutiones Calculi Integralis

La primera, *Introductio in Analysin Infinitorum* —publicada en dos volúmenes en 1748— se puede considerar por los temas tratados como una preparación o introducción para las otras dos. En esta obra maestra el concepto básico es el de función. Euler define una función de la siguiente forma

> *Una función de una magnitud variable es cualquier expresión analítica formada con la cantidad variable y con números o cantidades constantes…*

Desde luego, no coincide exactamente con la definición actual de función. Pero más allá del rigor de la definición, el hecho destacable y realmente significativo es que Euler convirtió a la función en el objeto fundamental del Cálculo, que hasta entonces se basaba esencialmente en las propiedades de las curvas.

Euler estudia todas las funciones elementales, las funciones polinómicas, trigonométricas, exponenciales y logarítmicas. Insistimos, por una parte, que Euler

---

[1] Existe una magnífica edición facsímil del primer volumen de esta obra con su versión en castellano. Véase la referencia bibliográfica [E]

marcó un hecho revolucionario: a partir de él ya no se hablará —por ejemplo— de curvas o líneas trigonométricas, sino de funciones trigonométricas. Por otra parte, Euler se da cuenta de la naturaleza inversa de las funciones logaritmo y exponencial. Los logaritmos no sólo tienen importancia porque permiten simplificar cálculos complicados; ahora adquieren el status de función, la función inversa de la función exponencial. Una vez que Euler ha introducido la función exponencial $y = a^z \ (a > 1)$, y habla del grado en el que *y* depende de *z,* resulta esclarecedora su afirmación

> *… daremos un valor a z tal que* $a^z = y$ *. Este valor de z, considerado como función de y, se llama el logaritmo de y*

Actualmente escribiríamos

$$z = \log_a y \Leftrightarrow a^z = y$$

Otros aspectos que llaman poderosamente la atención en esta obra son cómo Euler trabaja con unas cantidades infinitamente pequeñas y otras cantidades infinitamente grandes, cómo pasa de los desarrollos finitos a los desarrollos infinitos, cómo encuentra los desarrollos en serie de las funciones elementales sin utilizar la derivación y cómo la función logaritmo aparece en las cuestiones más insospechadas. C. B. Boyer asegura que *Introductio* es el estudio de las funciones por medio de procesos infinitos, especialmente a través de series infinitas [E].

Una muestra de la poderosa imaginación de Euler fue su deducción del desarrollo en serie de la función exponencial $y = a^z \ (a > 1)$. No podía recurrir a la derivación, concepto que aparece en su obra posterior *Institutiones Calculi Differentialis*. Entonces procede considerando una cantidad positiva infinitamente pequeña ω, que, sin llegar a ser cero, le permite escribir

$$a^\omega = 1 + \psi \ ,$$

donde ψ denota otra cantidad infinitamente pequeña. A continuación postula que

$$a^\omega = 1 + k\omega \ ,$$

siendo *k* un número que depende de la base *a*. Seguidamente introduce una nueva variable[2]

$$j = \frac{x}{\omega}$$

y utiliza el desarrollo del binomio de Newton para obtener

[2] Ponemos j en lugar de la i, inicial de la palabra infinito, de la versión original de Euler, a fin de evitar confusiones con la notación habitual de la unidad imaginaria.

$$a^x = (a^\omega)^{\frac{x}{\omega}} = (1+k\omega)^j = \left(1+\frac{kx}{j}\right)^j =$$

$$= 1 + j\left(\frac{kx}{j}\right) + \frac{j(j-1)}{2.1}\left(\frac{kx}{j}\right)^2 + \frac{j(j-1)(j-2)}{3.2.1}\left(\frac{kx}{j}\right)^3 + \cdots =$$

$$= 1 + kx + \frac{(j-1)}{j}\left(\frac{k^2x^2}{2.1}\right) + \frac{(j-1)(j-2)}{j.j}\left(\frac{k^3x^3}{3.2.1}\right) + \cdots$$

A continuación argumenta que *j* = *x/ω* tiene que ser una cantidad infinitamente grande, puesto que ω es infinitamente pequeño, lo cual le autoriza a poner

$$\frac{j-1}{j} = 1 \quad , \quad \frac{j-2}{j} = 1 \quad , \quad \frac{j-3}{j} = 1 \quad \ldots$$

llegando a que

$$a^x = 1 + kx + \frac{k^2x^2}{2.1} + \frac{k^3x^3}{3.2.1} + \cdots$$

En particular, si *x=1* y *k=1*, obtiene

$$a = 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \cdots + \frac{1}{1.2.3 \ldots n} + \cdots$$

Esta base, que surge de forma tan *natural*, la representa por *e* —posiblemente porque es la vocal que sigue a la *a*— y determina numerosas cifras decimales

e = 2'718281828459…

En definitiva, Euler ha deducido el célebre desarrollo exponencial

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \cdots + \frac{x^n}{1.2.3 \ldots n} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad (1)$$

Desde una perspectiva actual, la deducción de este desarrollo no ha sido muy rigurosa. Hay que tener presente que en esa época, incluso hasta finales del siglo XIX, se manipulaban las series sin preocuparse de su convergencia. Euler llama *naturales* o *hiperbólicos* a los algoritmos asociados con la base *e*.

Si se pone $a^y = e^x$, al tomar *logaritmos hiperbólicos* resulta $y \ln a = x$ [E, p. 115]. Sustituyendo este valor de *x* en (1) se tiene finalmente

$$a^y = 1 + (\ln a)y + \frac{(\ln a)^2}{1.2}y^2 + \frac{(\ln a)^3}{1.2.3}y^3 + \cdots + \frac{(\ln a)^n}{1.2.3...n}y^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln a)^n}{n!}y^n ,$$

que representa el desarrollo de la función exponencial de base arbitraria.

La correspondiente función inversa es el *logaritmo neperiano, hiperbólico* o *natural*, en nuestra notación $y = \ln x$. Igual de milagrosa parece la forma en que Euler infirió el desarrollo en serie de la función logarítmica [Dun].

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

Veamos ahora un maravilloso resultado que constituyó la consagración definitiva de Euler, la resolución del conocido como *problema de Basilea*. Jakob Bernoulli (1654-1705) fue —entre otras cosas— un estudioso de las series y había obtenido la suma de muchas de ellas. Esto le animó a considerar series de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots \qquad (2)$$

y, en particular, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots \qquad (3)$$

Esta serie era, en apariencia, más sencilla que alguna de las que Jakob Bernoulli había conseguido sumar. Pero tras fracasar en cuantos intentos efectuó para determinar su suma, se vio obligado a lanzar el siguiente mensaje a la comunidad matemática pidiendo ayuda

> *Grande sea nuestra gratitud si alguien encuentra y nos comunica lo que hasta ahora se ha escapado a nuestros esfuerzos…*

Así nació el famoso *problema de Basilea*. Euler, no podía ser otro, abordó este problema y después de algunas tentativas fallidas, llegó a su solución. Para ello procedió en las siguientes etapas

(i) Considera la función

$$P(x) = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots$$

Obsérvese que $P(0)=1$.

(ii) Fácilmente establece que

$$P(x) = \frac{sen\ x}{x}$$

Nótese que los ceros de esta función son $x = k\pi$, para $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3...$, no aportando k=0 ninguna raíz.

(iii) Conocidos sus ceros, factoriza la función *P(x)* como si se tratara de un polinomio, así

$$P(x) = \left(1-\frac{x}{\pi}\right)\left(1+\frac{x}{\pi}\right)\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)\left(1+\frac{x}{2\pi}\right)\left(1-\frac{x}{3\pi}\right)\left(1+\frac{x}{3\pi}\right)\cdots =$$

$$= \left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots$$

En realidad, Euler ha expresado la función *P(x)* mediante un producto infinito.

(iv) Ahora realiza operaciones en (iii) y el resultado lo iguala con la otra expresión de *P(x)* dada en (i)

$$1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\cdots = 1-\left(\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{4\pi^2}+\frac{1}{9\pi^2}+\cdots\right)x^2+(\cdots)x^4+\cdots$$

(v) Finalmente iguala los coeficientes de x^2 en el primer y segundo miembros de (iv) para colegir que

$$-\frac{1}{3!} = -\left(\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{4\pi^2}+\frac{1}{9\pi^2}+\cdots\right)$$

de donde

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

¡Con qué ingenio y finura probó Euler que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots = \frac{\pi^2}{6}$$ ¡

El *problema de Basilea* estaba resuelto. Con sus propias palabras, *He encontrado que seis veces la suma de la serie (3) es igual al cuadrado de la longitud de la circunferencia de un círculo cuyo diámetro es uno…* Y asevera *…se hace patente así que todas las series contenidas en la forma general*

$$1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\&c$$

que, cada vez que p *fuere un número par, se podrá expresar mediante la periferia del círculo* π *; en efecto, la suma de la serie mantendrá siempre una proporción racional con* π^p [E, p. 170]. Después relaciona la suma de las series (2) para todos los valores pares de *p* desde 2 hasta 26. Por simple curiosidad escribimos la última [E, p. 171]

$$1+\frac{1}{2^{26}}+\frac{1}{3^{26}}+\frac{1}{4^{26}}+\&c=\frac{76977927\cdot 2^{24}}{27!}\pi^{26}$$

Más adelante, Euler obtuvo —con la ayuda de los números de Bernoulli— la fórmula general que suministra la suma de la serie (2) en el caso de que *p* sea un número natural par arbitrario. Aunque no tuvo el mismo éxito para valores impares de *p*, en realidad ningún matemático lo ha tenido hasta ahora, fue capaz de ofrecer valores aproximados de la suma de la citada serie para muchos valores impares de *p*.

En *Institutiones Calculi Differentialis* (1755) Euler mostró mayor preocupación por la relación entre las cantidades infinitesimales que por saber en qué consistían. Así, el cociente de dos cantidades infinitamente pequeñas puede ser una cantidad finita bien definida. De este modo considera el cociente incremental

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

(expresión indeterminada del tipo $0/0$) que originaría el concepto de derivada [Dur, p. 168] desplazando las diferenciales de Leibniz. Otras aportaciones de Euler en este libro son un teorema (que lleva su nombre) sobre la caracterización de las funciones homogéneas, una fórmula para derivar cierta clase de funciones compuestas y el empleo del desarrollo de Taylor para hallar los extremos de una función.

Resulta ilustrativo en este punto detallar cómo obtiene la derivada de la función logarítmica. Si ponemos en la notación actual, $y=\ln x$, recurriendo al desarrollo en serie ya visto y a las propiedades de los logaritmos, Euler escribió

$$dy=\ln(x+dx)-\ln x=\ln\frac{x+dx}{x}=\ln\left(1+\frac{dx}{x}\right)=$$

$$=\frac{dx}{x}-\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{x}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{dx}{x}\right)^3-\frac{1}{4}\left(\frac{dx}{x}\right)^4+\cdots$$

y, arguyendo que las potencias $(dx)^2, (dx)^3, (dx)^4 \ldots$, de la magnitud infinitamente pequeña dx son despreciables cuando se comparan con la propia cantidad dx, concluyó que

$$dy = \frac{dx}{x} \text{ , así que } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \text{ .}$$

La última obra de esta trilogía, *Institutiones Calculi Integralis*, publicada entre los años 1768 y 1770 en tres volúmenes —cuando estaba a punto de perder completamente la vista— está dedicada al cálculo de integrales (determinando primitivas mediante funciones elementales) y a la resolución de algunas ecuaciones diferenciales ordinarias y en derivadas parciales, como la ecuación de la cuerda vibrante.

Asimismo merece la pena destacar las aportaciones de Euler a una nueva rama de las matemáticas, el *Cálculo de Variaciones*. En pocas palabras, en esta disciplina se trata de determinar las funciones $y = f(x)$ que hacen que la integral

$$\int_a^b g(x, y)dx$$

tome un valor máximo o un valor mínimo. Con estas nuevas técnicas se pudieron abordar el problema de la braquistócrona (la curva más rápida o de descenso más rápido), los problemas isoperimétricos y de las líneas geodésicas sobre superficies, entre otros. Cuando Lagrange le escribió en 1755 para explicarle su teoría general, Euler —que era un matemático completamente consagrado desde hacía tiempo— ya había obtenido muchos resultados en este campo. Además de ser un extraordinario matemático, Euler fue una persona muy generosa. Reconoció que los métodos de Lagrange eran mejores que los suyos, retrasó la publicación de alguno de sus trabajos y prefirió que el joven Lagrange se llevara todos los honores por estos descubrimientos [B]. No obstante, en la mayoría de los textos las ecuaciones que dan condiciones necesarias para la existencia de extremales —así se denominan las funciones $y = f(x)$ que minimizan o maximizan la anterior integral— llevan el nombre de *ecuaciones de Euler*. Ello se ajusta más a la historia.

Las matemáticas también deben a Euler la elección de un buen número de símbolos. No olvidemos que la adopción de una notación adecuada facilita y agiliza la escritura matemática. Así, Euler fue el primero en emplear la notación funcional $f(x)$, introdujo el número *e*, popularizó π para denotar la relación entre la longitud de una circunferencia y su diámetro (aunque su introducción se debe a W. Jones en 1706), utilizó Σ para indicar la suma de una serie, creó una notación próxima a la actual para la integración definida… También representó por *i* la unidad imaginaria, si bien en un principio *i* designaba el *numerum infinite magnum* (el infinito) y escribía explícitamente la unidad imaginaria como $\sqrt{-1}$. Por ejemplo, Euler definió en *Introductio*

$$e^{x} = \left(1+\frac{x}{i}\right)^{i} \qquad \text{y} \qquad \ln(1+x) = i\left((1+x)^{\frac{1}{i}} - 1\right)$$

en notación de hoy, cuando *n* tiende a infinito,

$$e^{x} = \lim\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n} \qquad \text{y} \qquad \ln(1+x) = \lim n\left((1+x)^{\frac{1}{n}} - 1\right)$$

respectivamente, en tanto que definía

$$sen\, x = \frac{e^{\sqrt{-1}x} - e^{-\sqrt{-1}x}}{2\sqrt{-1}} \quad , \quad \cos x = \frac{e^{\sqrt{-1}x} + e^{-\sqrt{-1}x}}{2}$$

Afirma el historiador de las matemáticas, C. B. Boyer [B] que *Introductio* hizo por el Análisis lo que *los Elementos* de Euclides por la Geometría. Ciertamente, esta obra junto con las dos *Institutiones*, esa trilogía ha ejercido una enorme influencia en las matemáticas. La mayoría de los libros de texto posteriores se basan en las mismas y todo el mundo reconoce que con estos tratados Euler transformó *el Cálculo* de Newton y Leibniz en una importante rama de las Matemáticas modernas: *el Análisis Matemático.*

Bibliografía

- [B] C. B. Boyer: Historia de la matemática, Alianza Editorial, Madrid, 1996.
- [Dun] W. Dunham: Euler. El maestro de todos los matemáticos, Nivola, Madrid, 2000.
- [Dur] A. J. Durán: Historia, con personajes, de los conceptos del cálculo, Alianza Universidad, Madrid, 1996.
- [E] Leonhard Euler: Introductio in Analisin Infinitorum. Edición de Antonio J. Durán y Javier Pérez; traducción de J. L. Arántegui. Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales y Real Sociedad Matemática Española. Sevilla, 2001.
- [N] J. R. Newman: El mundo de las matemáticas, Sigma, Ediciones Grijalbo, Barcelona, 1976.
- [RB] J. Rey Pastor y J. Babini: Historia de la matemática, Gedisa Editorial, Barcelona, 1984.
- [T] The MacTutor History of Mathematics Archive. Página web de la Universidad de Saint Andrews: http://www-history.mcs.st-and.ac.uk.

José Manuel Méndez Pérez. Licenciado y Doctor en Matemáticas por la Universidad de La Laguna, es profesor de la misma desde el año 1972. Su campo de investigación se centra en el estudio de transformaciones integrales en espacios de funciones y de distribuciones, así como sus aplicaciones.