UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2007, Número 10, páginas 5-12
ISSN: 1815-0640

Intuición, innovación y resolución de problemas en Leonard Euler

Juan Antonio García Cruz

Resumen

En este pequeño artículo presentamos y comentamos la solución dada por L. Euler a un acertijo del siglo XVIII conocido como "el problema de los puentes de Konisberg". Es un ejemplo paradigmático de puesta en funcionamiento de técnicas de resolución de problemas y de generalización.

Leonard Euler fue un matemático muy prolífico. Durante su vida abordó temas de campos tan diversos como la geometría, el álgebra o el análisis. Fue también un innovador, pues fue capaz de abordar nuevos problemas y sentar las bases de partida para nuevos campos de la matemática. Como todo creador tuvo intuiciones brillantes y fue capaz de realizar demostraciones que maravillan por su sencillez y elegancia.

También introdujo varias notaciones en matemáticas que son, hoy día, de uso generalizado. Por ejemplo, utilizó por primera vez la letra e, como base para los logaritmos neperianos, en manuscritos durante los años 1727-1728. En el campo de los números complejos designó una letra para representar la unidad imaginaria. Así, en una memoria presentada a la Academia de San Petersburgo en 1777, pero no publicada hasta después de su muerte, utiliza la letra *i* como símbolo de $\sqrt{-1}$. Esta notación no volverá a utilizarse hasta 1801, año en que Gauss empieza a hacer un uso sistemático de la misma, entre otras obras, en sus célebres *Disquisitiones Arithmeticae*.

En la correspondencia que mantuvo, con importantes matemáticos y filósofos, hay resultados sin probar, que han traído de cabeza a varias generaciones de matemáticos brillantes. Uno de los más célebres es la conjetura que relaciona las caras, los vértices y las aristas en todo sólido de caras planas. En carta a C. Goldbach, fechada en Berlín en noviembre de 1750, entre otros resultados le refiere algunos sin probar: “encuentro sorprendente que estas propiedades de la geometría sólida no hayan sido vistas por nadie hasta ahora, siendo tan tarde cuando yo lo he hecho. Es más, que los importantes teoremas 6 y 11, sean tan difíciles que todavía no ha sido posible probarlos satisfactoriamente”. El teorema 6 es la famosa propiedad que involucra las caras, las aristas y los vértices de un sólido limitado por caras planas y cuya formulación es CARAS + VÉRTICES = ARISTAS + 2. En su formulación Euler, en lugar de vértices, habla de ángulos sólidos.

En una carta enviada a J. Bernoulli en 1740, Euler le comunica que las expresiones $y = 2\cos x$ e $y = e^{\sqrt{-1}x} + e^{-\sqrt{-1}x}$, verifican ambas la ecuación diferencial $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$, y por lo tanto deben ser idénticas. Más tarde en su obra *Introductio in Analysin Infinitorum* deduce por primera vez, esta expresión que relaciona la función exponencial con las razones trigonométricas, a través de, sorprendentemente, la unidad imaginaria. Allí aparecen, deducidas, las siguientes expresiones:

$$\cos v = \frac{e^{+v\sqrt{-1}} + e^{-v\sqrt{-1}}}{2} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} v = \frac{e^{+v\sqrt{-1}} - e^{-v\sqrt{-1}}}{2}$$

Expresiones que conducen mediante un simple cálculo a la célebre fórmula $e^{v\sqrt{-1}} = \cos v + \sqrt{-1}\operatorname{sen} v$. Aunque Euler proporciona dos expresiones, una para el argumento positivo y otra para el negativo, nosotros aquí nos hemos tomado la libertad de, utilizando la misma notación, refundir las dos fórmulas en una.

Uno de los resultados más interesantes es la resolución del famoso “acertijo” conocido con el nombre de los “puentes de Köningsberg”.

Leibniz, en carta a Huygens el 8 de septiembre de 1679, le transmitía la necesidad que sentía de un nuevo *analysis*: “Incluso no me quedo satisfecho con el Álgebra ya que no proporciona ni la más corta ni la más maravillosa construcción geométrica. Es por ello por lo que creo que necesitamos de otro *Analysis*, puramente geométrico o lineal, que exprese directamente la posición (*situs*) como el Álgebra expresa la magnitud”. Parece ser que Huygens se mostró escéptico con la propuesta de Leibniz. Quizás la idea de un *analisys situs* o *geometria situs* llegó ([1]) a los oídos de Euler a través de uno de los Bernoullis como era la tradición oral en la época.

“Además de la rama de la geometría relativa a las magnitudes, que ha recibido siempre la mayor atención, hay otra, casi desconocida antes de Leibniz, que este mencionó por primera vez y denominó *geometria situs*. Tiene sólo que ver con la determinación de la posición y sus propiedades: no trata de las magnitudes ni de los cálculos que pueden hacerse con ellas ([2]). Así comienza el artículo *Solutio problematis as geometriam situs pertinentes*, publicado en 1736, volumen 8 de *Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae.*

El artículo de Euler tiene el sabor de la ciencia en estado naciente y de la ejecución de técnicas heurísticas para la resolución de problemas. En su introducción, no repara en avisarnos, de que no ha sido posible todavía determinar la clase de problemas que son relevantes para este nuevo campo, ni qué métodos deben emplearse para resolverlos. El artículo trata de un problema, quizás más un acertijo para la época, en el que Euler muestra el método encontrado por él para su

[1] Struik, 1986, página 183.
[2] Para una versión en español completa de artículo de Euler consúltese de Armas Cruz y García Cruz, 1983, páginas 15-23.

solución, y no duda en calificar, tanto al problema como al método, como un ejemplo de *geometria situs* ya que no requiere ni de medir ni de calcular distancias.

El problema en palabras de Euler: "En Köningsberg, Prusia, hay una isla A, llamada der Kneiphof, quedando dividida por el río que la rodea en dos ramas, y estas ramas son cruzadas por siete puentes, a, b, c, d, e, f, g. Se pregunta si se puede planear un paseo de tal manera que cruce por cada puente una y sólo una vez" (Figura 1).

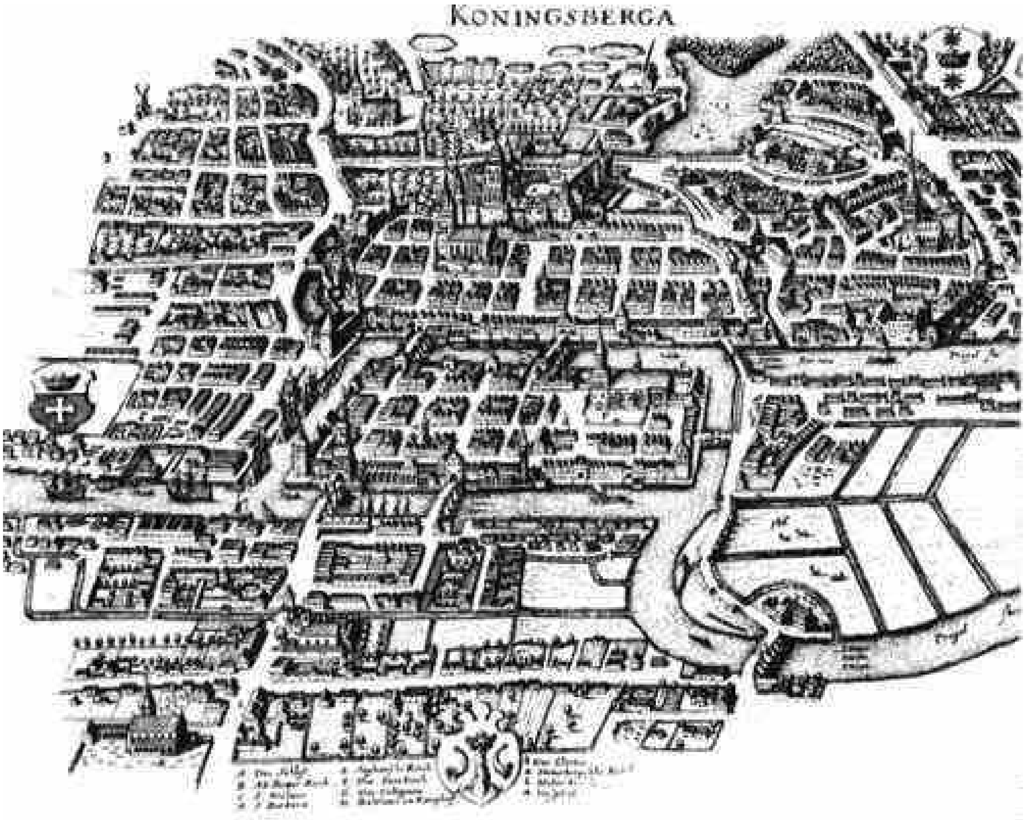

Figura 1

Euler añade una formulación general del problema: "Cualesquiera que sea la disposición y división del río en ramas y el número de puentes, ¿puede saberse si es o no posible cruzar cada puente exactamente una vez?

Euler sugiere, como primera aproximación a la solución, realizar una lista exhaustiva de todas las rutas posibles y ver, entonces, si hay alguna que satisfaga la condición. Debido al número de posibilidades existentes, el procedimiento le parece difícil y laborioso. Además, sería impracticable ([3]) para un número mayor de puentes.

"El método que he desarrollado consiste y se apoya en la forma más conveniente de *representar* el cruce de puentes" (Figura 2).

[3] Euler dice "imposible".

Utiliza las letras mayúsculas, de forma que la secuencia ABCD, significa que se pasa de la zona A a la B, no importa por qué puente, y luego se va de B a D y, por último de D a C. De forma análoga, los cruces de cuatro puentes se representan por cinco letras. En general, "la representación de un itinerario cualquiera contiene un número de letras mayor en una unidad que el número de puentes cruzados".

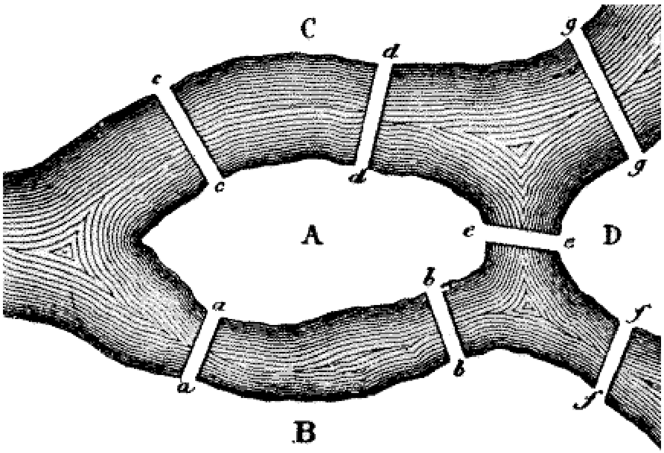

Figura 2

Con este método es irrelevante por qué puente se cruza, lo que *simplifica el problema*. Si existiera una ruta a través de los siete puentes, entonces se representaría por una lista de ocho letras, en las que las letras AB y CA, aparecerían dos veces adyacentes en la lista, mientras que las otras combinaciones sólo aparecerían una vez.

Euler ha reducido el problema a encontrar una lista de ocho letras, formada por las letras A, B, C y D, en las que varios pares de ellas han de aparecer un número requerido de veces.

Ahora, se pregunta: ¿es posible disponer las letras de tal forma?

Sugiere, buscar una *regla* al respecto.

Para tal fin, introduce una *simplificación* en el dibujo y considera el caso de un área simple formada por dos regiones separadas por un río, que se conectan por varios puentes (Figura 3).

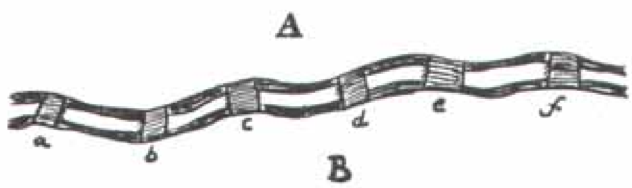

Figura 3

Continua su razonamiento así: “Tomemos el puente *a*, si una persona cruza este puente es que viene de A o tiene que llegar a A; en cualquier caso la letra A aparecerá una vez en la representación. Si cruza tres puentes apoyados en A, esta letra aparecerá dos veces, tanto si el viaje comienza en A como si no. De forma similar, si son cinco los puentes, en la representación del itinerario a través de ellos se encontrará tres veces la letra A.” Una vez dispuesto este razonamiento, está en condiciones de formular la *regla general*: “si el número de puentes es impar, y se aumenta en uno, el número de apariciones de la letra A, es la mitad de esta suma”.

Una vez establecida la regla general, esta se aplica al problema en cuestión. Como en el área A se apoyan cinco puentes, A tiene que repetirse tres veces en la representación del itinerario. Para B resultan, dos apariciones, puesto que hay tres puentes que se apoyan en B. Lo mismo ocurre para C y D. Luego el total de apariciones es de 9 letras en la secuencia, y hemos visto que ésta sólo consta de 8. Luego tal itinerario no puede efectuarse a través de los siete puentes de Köningsberg.

Euler no se contentó con resolver el “acertijo” de los puentes de Köningsberg, sino que avanzó hacia una generalización del problema.

Estudiemos su forma de proceder.

Lo primero que hace es afirmar que la regla dada para hallar el número de apariciones de la letra A, es también válida si todos los puentes vienen de otra área B o de otras áreas. Pues allí, consideró sólo el área A independientemente de a que área vienen o van los puentes.

¿Qué ocurre si el número de puentes que se apoyan en A es par?

Si el número de puentes que se apoyan en A es par, debe tenerse en cuenta si se parte o no de A. Si se parte de A, esta letra aparecerá dos veces en la secuencia, una para indicar la partida y otra la llegada. Pero si se parte de otra área, entonces sólo aparecerá una vez, para indicar tanto la llegada como la salida. Imagine el lector las situaciones en que haya cuatro y seis puentes que se apoyen en A, y considérese si se parte o no de A. En tal caso habrá si se parte de A, la letra A aparecerá tres o cuatro y si no se parte habrá dos o tres apariciones respectivamente.

De estos dos ejemplos, Euler, induce la siguiente regla general: “Para un número par de puentes si se sale de A, el número de veces que aparece esta letra es igual a la mitad del número de puentes aumentada en uno; pero si se sale de un área distinta es igual a dicha mitad”.

Como sólo puede iniciarse una ruta desde un área única, resulta que: si el número de puentes es impar, el número de apariciones de la letra que denota un área es la mitad del número de puentes más uno; pero si es par, el número de apariciones es justo esa mitad. Por consiguiente se tiene la siguiente regla para la posibilidad de ruta en cualquier caso:

Si el total de apariciones es igual al número de puentes más uno, el itinerario pedido es posible y tendrá que iniciarse en un área con un número impar de puentes; si, por el contrario, el número total de letras es el de puentes disminuido en uno, también es posible el itinerario, pero ha de partirse de un área el la que se apoye un número par de puentes, pues el número de letras se verá así incrementado en uno.

Como ejemplo de aplicación de esta regla, Euler elabora un método que utiliza para resolver una nueva situación (Figura 4).

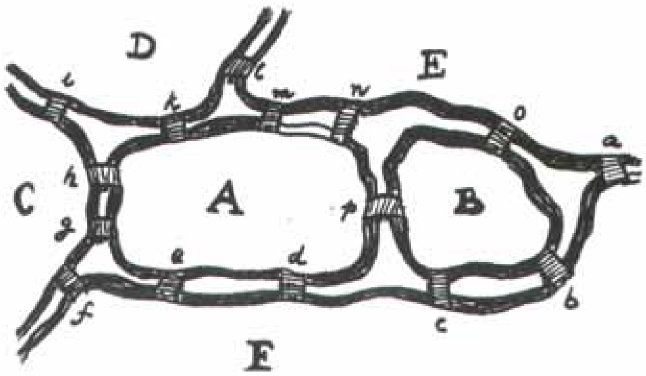

Figura 4

Método

Primero. Designa por letras mayúsculas A, B, C, D, E, F, las seis áreas.

Segundo. Construye una tabla en la que asigna a cada letra el número de puentes que se apoyan en ella, marcando con * las áreas con número par de puentes.

Tercero. Añado una columna en la que junto a cada par pongo su mitad, y junto a cada impar el resultado de aumentar en uno y hallar la mitad de la suma.

Cuarto. Sumo esta última columna y comparo con el número de puentes de la situación incrementado en 1.

áreas	*nº puentes*	*cálculo*
A*	8	4
B*	4	2
C*	4	2
D	3	2
E	5	3
F*	6	3
		16

Quinto. Si hay igualdad en los valores determinados en el apartado cuatro, entonces es posible el itinerario que pasa una y solo una vez por cada puente.

¿De qué área hay que partir?

Hay más de una solución que el lector alcanzará fácilmente.

Este fragmento, muestra la aplicación de varias técnicas heurística a la resolución de un problema. Primero la búsqueda de una representación, notación, adecuada y carente de ambigüedad, que contemple los elementos esenciales del problema y elimine los superficiales. Luego, un esquema o dibujo, que facilita y guía el razonamiento. La simplificación del problema para poder obtener la regla general, se limita a dos regiones y las conexiones entre ellas. Por último, una generalización y un método de solución.

En fin, toda una lección magistral de resolución de problemas.

Por último, aquí tienes un plano actual (Figura 5) de la ciudad de Köningsberg, llamada Kaliningrado. Como puedes observar algunos de los puentes, dos exactamente, no existen. La pregunta obvia es ¿se puede hoy realizar el paseo planteado en la época de Euler? Es decir, ¿es posible realizar un paseo que pase una y solo una vez por cada puente?

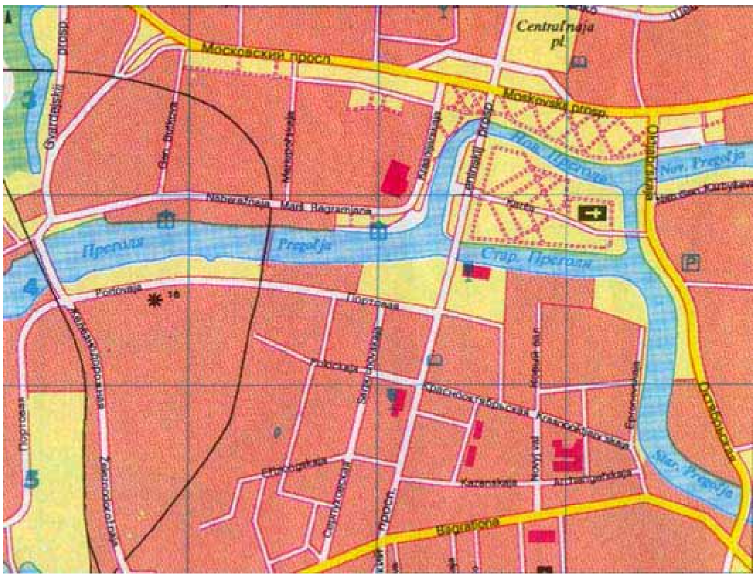

Figura 5

Para terminar una observación. Cuando nos asomamos a la historia de la matemática, solemos utilizar el presente como referente para el pasado. Así, aparecen expresiones que nos asombran, ¡qué moderno es lo que fulanito hizo hace tantos años!, o nos lamentamos de la falta de conocimiento de los “antiguos”, ¡con lo fácil que es hacer esto así! Esta forma de aproximarnos a la historia de la matemática distorsiona el pasado y nos impide evaluar los logros en su justa medida. Incluso las dificultades que entrañó determinado conocimiento nos parece algo trivial, cosa de los de antes, de los viejos. En muchos sitios se afirma que al resolver el problema de los puentes de Köningsberg, Euler inauguró la teoría de grafos. Pues bien, después de trabajar sobre el artículo original, veo a un resolutor de problemas, resolviendo uno particular y proponiendo, luego, un método general. Esta faceta, es tan educativa como puede ser sentar las bases de una nueva teoría.

Bibliografía

- Cajory, F. (1993). A History of Mathematical Notations. Dover Publications, Inc. New York.
- De Armas Cruz, M. y García Cruz, J.A. (1983): Bicentenario de la muerte de Leonard Euler, Números, 7, pág. 9-30.
- Euler, L. (1748). Introductio in analysin infinitorum. Edición facsimilar. SAEM Thales y Real Sociedad Matemática Española. Sevilla, 2000.
- Smith, D.E. (1958). History of Mathematics. Dover Publications, Inc. New York.
- Struik, D.J. (1986): A source book in Mathematics 1200-1800. Princeton University Press. Princeton, New Jersey.

Juan Antonio García Cruz Titular de Didáctica de las Matemáticas y profesor de Historia de las Matemáticas en la Universidad de La Laguna. Es Doctor en Ciencias Matemáticas por la Universidad de La Laguna y ha sido Profesor de Secundaria (Catedrático de Bachillerato en excedencia) durante veinticinco años. Se interesa principalmente por la educación matemática, y la historia de las matemáticas, de la cartografía y la navegación.
E-mail: jagcruz@ull.es