UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2007, Número 11, páginas 113-132
ISSN: 1815-0640

Análisis de una propuesta didáctica para la enseñanza de límite finito de variable finita

A. Engler, S. Vrancken, M. Hecklein, D. Müller y M. I. Gregorini

Resumen

El concepto de límite es uno de los que más dificultades de aprendizaje traen aparejadas. En este trabajo analizamos la puesta en marcha de una secuencia didáctica diseñada teniendo en cuenta las nuevas tendencias de la didáctica y las dificultades recogidas de trabajos de investigación avalados por nuestra práctica de años con grupos de alumnos que inician su formación en el cálculo. Trabajamos: aproximaciones, límites laterales, la existencia de límite, la existencia o no de la imagen de la función en el valor hacia el cual tiende la variable, el valor de la función y el valor del límite.

Abstract

The limit concept is one of those that more learning difficulties presents. In this work we analyze the implementation in the classrooms of a didactic sequence designed with the new tendencies of the Didactics and the difficulties found in years of reserch, that students that begin studying Calculus showed. We work: approaches, lateral limits, the limit existence, the existence or not of the image of the function in the value toward which spreads the variable, the value of the function and the value of the limit.

Deja que los estudiantes hagan conjeturas antes de que tú les des apresuradamente la solución, déjales averiguar por sí mismos tanto como sea posible; deja a los estudiantes que hagan preguntas; déjales que den respuestas. A toda costa evita responder preguntas que nadie haya preguntado, ni siquiera tú mismo.
(Polya, 1957)

Introducción

Enseñar Matemática resulta un desafío importante. La necesidad del empleo de esta ciencia para el desarrollo del pensamiento lógico, la capacidad de razonamiento y la comprensión dinámica y cambiante de la realidad objetiva, obligan a perfeccionar cada vez más rápidamente los métodos y procedimientos de su enseñanza a fin de obtener logros de aprendizaje.

Hace más de veinte años, autores como Radatz (1980), consideraban el análisis de errores como "una estrategia de investigación prometedora para clarificar cuestiones fundamentales del aprendizaje matemático". También Rafaela Borassi (1987) presentaba el análisis de errores en educación matemática "como un recurso motivacional y como un punto de partida para la exploración matemática creativa, implicando valiosas actividades de planteamiento y resolución de problemas". Todos los estudiantes no construyen los mismos conocimientos sobre un mismo objeto matemático, es más, algunos pueden asignarles rasgos o características no pertinentes desde el punto de vista matemático. Es importante entonces reconocer sus diversos puntos de vista, conocimientos y creencias. Desde la psicología educativa se recomienda buscar la forma de conocer lo que el alumno ya sabe para poder enseñar adecuadamente. Este principio sirve de sustento para justificar el interés reciente de los estudios de la didáctica por las concepciones de los alumnos (Confrey, 1990). Para que los estudiantes cambien sus creencias, es necesario confrontar estas concepciones preexistentes.

Los obstáculos y errores en general juegan un rol muy importante en la organización de nuestra tarea docente que no siempre le asignamos.

La mayoría de las últimas teorías sobre educación son muy generales y no se dedican específicamente al estudio del saber matemático. Brousseau (1997, 1998) es el primero en desarrollar un modelo teórico de las situaciones didácticas.

La teoría de situaciones didácticas se ocupa de modelar situaciones de enseñanza de modo de permitir una elaboración y una gestión controlada y se fundamenta en un enfoque eminentemente constructivista, partiendo del principio que los conocimientos se construyen por adaptación a un medio que aparece problemático para el sujeto.

Esta teoría forma parte de la Matemática Educativa que Cantoral (2003) define como la disciplina que "estudia los procesos de constitución, transmisión y adquisición de los diferentes contenidos matemáticos en situación escolar". Surge de la necesidad de disponer de un modelo de enseñanza y aprendizaje de la matemática en el que se encuentren representadas todas las relaciones y operaciones que intervienen en este proceso. En ella quedan comprendidos los contenidos matemáticos, las problemáticas del profesor y del alumno y todo lo relacionado con el estudio de la matemática.

La elaboración de las situaciones de actividades en el aula exige un análisis riguroso ya que deben ser ricas por la cantidad de conocimientos implicados pero no excesivos para que el alumno pueda relacionarlos y gestionar su aprendizaje. También deben ser abiertas para que puedan plantearse cuestiones no incluidas originalmente y utilizar distintos procedimientos.

La enseñanza y el aprendizaje de los contenidos básicos del cálculo es un proceso complejo. Las creencias de cómo se aprende el cálculo influyen sobre todos los aspectos de la enseñanza, gobiernan lo que se incluye en el currículum y cuándo deben enseñarse los contenidos, determinan la importancia que un educador da al empleo de técnicas o en aprovechar la curiosidad, el interés y la motivación del alumno e influyen en la forma en la que los docentes desarrollan metodologías, presentan conceptos, evalúan logros y corrigen errores y dificultades. Estas creencias guían la toma de decisiones e influyen en la eficacia de cómo los docentes enseñan el cálculo, es decir el tratamiento de las variables que inciden en el aprendizaje de los contenidos. A lo largo de nuestra experiencia docente y de investigación pudimos corroborar que son numerosas las variables que inciden en el rendimiento de nuestros alumnos: naturaleza de la matemática (disciplina con un simbolismo especial como lenguaje de abstracciones), tipos de aprendizajes matemáticos (axiomas, conceptos, definiciones, algoritmos, principios, teoremas, resolución de problemas), el ambiente escolar, el profesor (sus conocimientos, experiencia, afectividad, creatividad), el alumno (sus actitudes, motivación, valoración de sí mismo, responsabilidad, creatividad, nivel de ansiedad, dedicación), las variables cognitivas del alumno (capacidad de atención, de retención, nivel de desarrollo del pensamiento, transferencia), las variables del currículum escolar (contenidos y plan de estudio), la metodología de trabajo y finalmente la evaluación.

Michéle Artigue (1995) manifiesta: "Las dificultades de acceso al cálculo son de diversa índole y se imbrican y refuerzan en redes complejas. Por lo tanto es posible reagruparlas en grandes categorías". Las organiza en tres grupos diferentes asociadas con:

- la complejidad matemática de los objetos básicos del cálculo,
- la conceptualización y formalización de la noción de límite en el núcleo de su contenido y a su tratamiento en la enseñanza, y
- la ruptura álgebra / cálculo, la brecha entre el pensamiento analítico y el algebraico.

Al referirse a los trabajos de Cornu (1991) y Sierpinska (1985), Azcárate y cols. (1996) manifiestan, que la enorme dificultad de la enseñanza y del aprendizaje del concepto de límite se debe a su riqueza y complejidad tanto como al hecho de que los aspectos cognitivos implicados no se pueden generar puramente a partir de la definición matemática.

Los estudios de Cornu (1991) demostraron que los alumnos tienen “concepciones espontáneas personales” que provienen de su experiencia cotidiana. Las concepciones espontáneas personales son muy resistentes al cambio y permanecen durante mucho tiempo de manera que pueden contener factores contradictorios que se manifiestan según las situaciones.

Las investigaciones de Orton (1980) concluyen que los alumnos mostraron dificultades significativas en la conceptualización de los procesos de límite que sustentan el concepto de derivada y en la utilización apropiada de las representaciones gráficas.

El desarrollo de la investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje de temas relacionados con el cálculo con las especificidades observadas en cada caso está abriendo la posibilidad de nuevas propuestas didácticas fundamentadas en el análisis de los procesos cognitivos involucrados en el aprendizaje de estos temas.

Para abordar el estudio del cálculo se requiere cierta madurez que permita abrir la mente a distintas formas de proceder. Esta madurez no siempre es alcanzada por los estudiantes. Por esto los docentes debemos propiciar cambios metodológicos que permitan que los alumnos descubran cómo se construyen los conceptos a partir de sus conocimientos previos.

El objetivo del presente trabajo es analizar una secuencia de actividades en el aula de modo que los alumnos gestionen con sentido el conocimiento matemático para que resulte un conocimiento vivo (que pueda evolucionar) y además que sea funcional (que permita resolver problemas).

Metodologia

Los contenidos básicos comunes de matemática para la Educación Polimodal[1] contemplan el estudio del límite de funciones, no desde un punto de vista formal sino realizando un trabajo dirigido a comprender su significado matemático. Plantean la importancia de estudiar este concepto con ejemplos de funciones elementales, introduciendo luego los conceptos de continuidad y derivada. Sin embargo, en la práctica, nuestra experiencia nos muestra que los contenidos relacionados con el cálculo no son incorporados. En realidad, el primer contacto directo con esta rama de la matemática lo tienen en este momento.

Diseñamos una situación didáctica orientada a que los alumnos estén suficientemente preparados para abordar el aprendizaje de límite finito de variable finita teniendo en cuenta el trabajo que realizaron con funciones considerando especialmente las distintas formas de representación y algunas cuestiones relacionadas con las aproximaciones. Se favoreció el trabajo en forma verbal, tabular, numérica, analítica y gráfica. Las actividades se organizaron para favorecer el desarrollo de habilidades para poder pasar sin inconvenientes de un sistema de representación a otro buscando que el estudiante entre en acción.

El trabajo se desarrolló considerando tres momentos: el diseño y discusión de las actividades según dificultades y errores observados en trabajos recogidos de años anteriores, la ejecución de las actividades diseñadas durante momentos determinados de clases en el aula y, finalmente, la valoración de los resultados obtenidos en función del objetivo general del proyecto de investigación que estamos realizando, "Errores y dificultades: organizadores didácticos en el aprendizaje del Cálculo en carreras no matemáticas", que es analizar errores y dificultades en el aprendizaje de los contenidos básicos del cálculo de alumnos de carreras universitarias no matemáticas.

Para la preparación de las diferentes actividades que forman parte de la propuesta de clase se tuvieron en cuenta contenidos ya trabajados por los alumnos. Ellos ya conocían la teoría de números, las distintas formas de trabajo sobre la recta real, la representación gráfica, el trabajo con desigualdades, la notación conjuntista,

[1] La reforma en educación comenzada en Argentina en los años 90, con la implementación de la Ley Federal de Educación nº 24.195 modificó la tradicional estructura de escuela Primaria y Secundaria. Incorpora como obligatorio el Nivel Inicial, establece un sistema llamado Educación General Básica (E.G.B.) dividido en tres ciclos de tres años cada uno, y completa con el nivel Polimodal de tres años de duración.

el manejo de intervalos y el concepto de valor absoluto y la noción de distancia asociada, funciones, la noción de dominio, aproximaciones, la idea de "tiende a", dado que para cursar Matemática I, en el momento de ingresar como alumnos a la carrera Ingeniería Agronómica deben, tener aprobada el área Matemática en el marco del Programa de Articulación Disciplinar exigido por la Universidad Nacional del Litoral a todos sus alumnos. Todos estos contenidos están desarrollados con claridad en el material que deben estudiar para aprobar la evaluación propuesta y así comenzar su trabajo como alumnos universitarios.

Además de esto, durante el cuatrimestre anterior, estos alumnos habían cursado y regularizado o aprobado Matemática I, materia en la cual se desarrolla ampliamente el tema Funciones Escalares haciendo hincapié en las distintas formas de representación, conocimiento previo con el que contaban para la resolución de la secuencia. El concepto de función es imprescindible para el aprendizaje de límite y es importante utilizar para su enseñanza las diferentes representaciones: gráfica, tabla numérica, algebraica y simbólica.

Además, de la experiencia de tantos años en el aula, de los resultados observados en distintas evaluaciones y del diálogo e intercambio de ideas entre todos los docentes de la cátedra se incluyeron aspectos que sabemos "generan dificultades".

La secuencia de actividades para el aula elaborada se aplicó a ciento dieciocho alumnos inscriptos en Matemática II de la carrera Ingeniería Agronómica. Se organizaron en grupos de a dos, por lo que se obtuvieron cincuenta y nueve producciones. El objetivo que perseguimos es que al resolverla los alumnos se encuentren lo suficientemente preparados para lograr el aprendizaje de este concepto que, en general, les resulta árido, poco atractivo y demasiado abstracto si se lo aborda desde lo formal.

Los alumnos se mostraron muy dispuestos al trabajo y, en especial, valoraron la posibilidad de discusión en la devolución donde los errores no estaban corregidos por el docente sino solamente observados. Posteriormente, los docentes analizamos y discutimos los resultados obtenidos. Los mismos se tuvieron en cuenta y favorecieron la toma de decisiones para la continuidad en el desarrollo del tema y las acciones futuras.

Presentación de la propuesta y análisis de los resultados

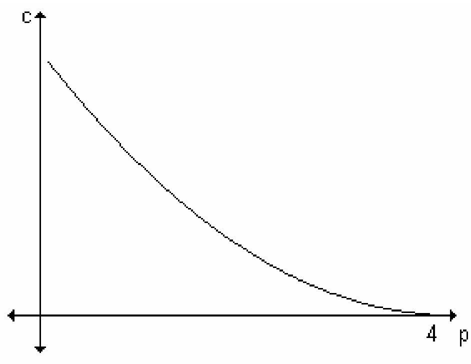
- De la observación y análisis de los trabajos detectamos errores comunes en determinados ejercicios. Realizamos el conteo de las respuestas discriminándolas en: correcta, incorrecta, no responde, regular e incompleta.
- A continuación, enunciamos algunas de las actividades propuestas y detallamos los principales errores detectados.

Actividad 1: Cada una de las funciones que se presentan a continuación describen la relación entre el precio p en pesos por kilogramo de tres productos diferentes y la cantidad c en kilogramos que los consumidores comprarán a ese precio.

Producto A

P	c
3	15,4
3,9	15,485
3,99	15,530
3,999	15,5254
3,9999	15,5015
3,99999	15,50001

Producto B

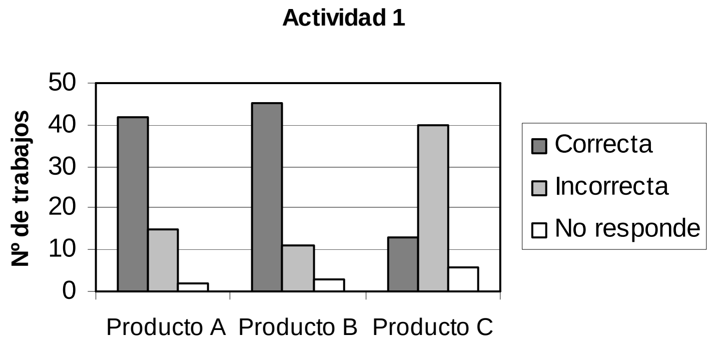


Producto C

$$c(p) = \frac{\sqrt{p} - 2}{p - 4}$$

Para cada uno de los productos, ¿a qué valor se aproxima la cantidad de kilogramos que los consumidores comprarán a medida que el precio por kilogramo se acerca a $ 4?

Los resultados se muestran en el siguiente diagrama:



Con relación al producto C, las cuarenta (67,8%) respuestas incorrectas fueron:

Respuesta	**Cantidad**
"se aproxima a cero" ó "se acerca a cero" ó "c tiende a 0" ó "0 kg."	32
"cuando el precio tiende a 4 la cantidad no tiene valor"	1
"se acerca a ∞" ó "c tiende a infinito"	2
"indeterminado" ó "es una indeterminación 0/0"	4
"tiende a 4"	1

Se observa que los alumnos no tuvieron mayores inconvenientes con la representación tabular (numérica) y la gráfica. Un alto porcentaje de alumnos no interpretan el significado al trabajar con la representación algebraica. En general, del diálogo posterior mantenido con ellos comprobamos que, para identificar la tendencia de una función, es decir, su límite, les resulta más sencillo en forma numérica o gráfica que en la algebraica. El sistema algebraico muestra una concepción formal de límite, estático y abstracto. En cambio, el numérico sugiere una forma dinámica vinculada con la realidad. Entre ambos tipos de representaciones se encuentra la gráfica que es más estática que la numérica y menos formal que la algebraica.

Actividad 2: A partir de la tabla, responda:

a) ¿A qué número a se acerca x?

b) ¿A qué número L se acerca f(x)?

c) Escriba una conclusión sobre el comportamiento de la función cuando x se aproxima a 3.

x	f(x)
2,9	14,21
2,99	14,9201
2,999	14,992001
2,9999	14,99920001
…………..	…………
3,0001	15,00080001
3,001	15,008001
3,01	15,0801
3,1	15,81

En esta actividad si bien se busca que los alumnos logren una idea numérica del límite. No les resulta sencillo determinar a qué valor se aproxima una secuencia de números. Tienen dificultades para identificar, por ejemplo, que el número creado por el proceso 2,9999... o 3,0001 es 3. En general se observan dificultades para expresar verbalmente lo que está expresado en la tabla.

Actividad 3: Si $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2-4}$ complete:

x tiende a .... $\longrightarrow$ | x tiende a .... $\longleftarrow$

x	1,9	1,99	1,999	1,9999
f(x)				

2,0001	2,001	2,01	2,1

$\longrightarrow$ f(x) tiende a .... | $\longleftarrow$ f(x) tiende a ....

En esta actividad se tienen en cuenta dos tipos de representaciones, simbólica y numérica. Los alumnos debían calcular las imágenes para valores de x dados y determinar a qué valor se aproxima cada secuencia de números. Observando los trabajos de nuestros alumnos, llama la atención que cometen más errores para encontrar a qué valor tiende la variable dependiente que para determinar a qué valores se aproxima la abscisa. Consideramos que esto se debe a la expresión de los números. Esta es una limitación del sistema numérico, además tal vez el hecho de que una tabla no proporciona suficientes valores para determinar a qué número tienden las variables o qué número es el límite. Estamos convencidas de que esta situación se puede abordar más satisfactoriamente si se complementa la actividad con la representación gráfica.

Algunas de las respuestas obtenidas son las siguientes:

3) Si $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2-4}$ complete:

x tiende a ~~[illegible]~~ AUMENTAR A 2

x	1,9	1,99	1,999	1,9999
f(x)	0,2564	0,2506	0,25006	0,250006

f(x) tiende a ~~[illegible]~~ DISMINUIR A 0,25

x tiende a AUMENTAR A 2

x	2,0001	2,001	2,01	2,1
f(x)	0,2499	0,2499	0,2493	0,2439

f(x) tiende a AUMENTAR A 0,24.

3) Si $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2-4}$ complete:

x tiende a 2

x	1,9	1,99	1,999	1,9999
f(x)	0,25641	0,250626	0,250062	0,2500061

f(x) tiende a 0,2500062

x tiende a 2

x	2,0001	2,001	2,01	2,1
f(x)	0,249993	0,24993	0,249376	0,2439

f(x) tiende a 0,249993

3) Si $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2-4}$ complete:

x tiende a 1,9999

x	1,9	1,99	1,999	1,9999
f(x)	0,25641	0,25062	0,25062	0,250006

f(x) tiende a 0,25006

x tiende a 2,0001

x	2,0001	2,001	2,01	2,1
f(x)	0,24999	0,24993	0,24937	0,24390

f(x) tiende a 0,24999

3) Si $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2-4}$ complete:

x tiende a 2

x	1,9	1,99	1,999	1,9999
f(x)	0,256	0,2506	0,25006	0,250006

f(x) tiende a 0,25

x tiende a 2

x	2,0001	2,001	2,01	2,1
f(x)	0,24993	0,2499	0,2493	0,2439

f(x) tiende a 0,25

En las respuestas se observa dificultad para percibir que 1,9999 representa 2 y desligarlo de un proceso que no se detiene. Diversas investigaciones en pensamiento matemático avanzado muestran cómo muchas de las dificultades en el aprendizaje del cálculo están relacionadas con la comprensión de un concepto como proceso o como objeto. En general, los alumnos comienzan manipulando objetos físicos o mentales construidos previamente para llegar a comprender el concepto como un proceso. Llega un momento en que esta concepción es insuficiente y es necesario considerar los conceptos como objetos.

En su teoría APOE (acción, proceso, objeto, esquema), Dubinsky (1991) analiza cómo se pasa de un estado de conocimiento a otro. Plantea que la construcción de conocimiento se da a través de un mecanismo de abstracción reflexiva, como un proceso que permite al individuo, a partir de las acciones sobre los objetos, inferir sus propiedades o las relaciones entre objetos en un cierto nivel de pensamiento, lo que implica la organización o toma de conciencia de esas acciones, separando la forma de su contenido e insertando esta información en un marco intelectual reorganizado en un nivel superior.

Artigue (1995) señala la "dificultad de separarse de una visión de límite en simples términos de proceso para disociar con claridad el objeto límite del proceso que ha permitido construirlo para dotarlo de una identidad propia".

En sus investigaciones referidas a las ideas relacionadas con proceso/ objeto para el caso del límite, Cottrill y cols. (1996) señalan que la dificultad en comprender el concepto de límite radica en que esto requiere la reconstrucción de dos procesos coordinados ($x \to a$, $f(x) \to L$) como un proceso descrito como $0 < |x - a| < \delta$ implica $|f(x) - L| < \varepsilon$. Este proceso coordinado tiene dificultad en sí mismo y no todos los alumnos pueden construirlo inmediatamente.

Actividad 4: Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$

a) Determine su dominio.

b) Complete:

x	2,9	2,99	2,999	2,9999
f(x)				

3,0001	3,001	3,01	3,1

c) Represente gráficamente la función.

d) Considere el intervalo $\left(6 - \frac{1}{2}, 6 + \frac{1}{2}\right)$ alrededor de $y = 6$. Encuentre un intervalo abierto sobre el eje x alrededor de $x = 3$ que verifique que para cualquier x de ese intervalo, salvo quizás para 3, sus imágenes se encuentran en el intervalo dado. Interprete gráficamente.

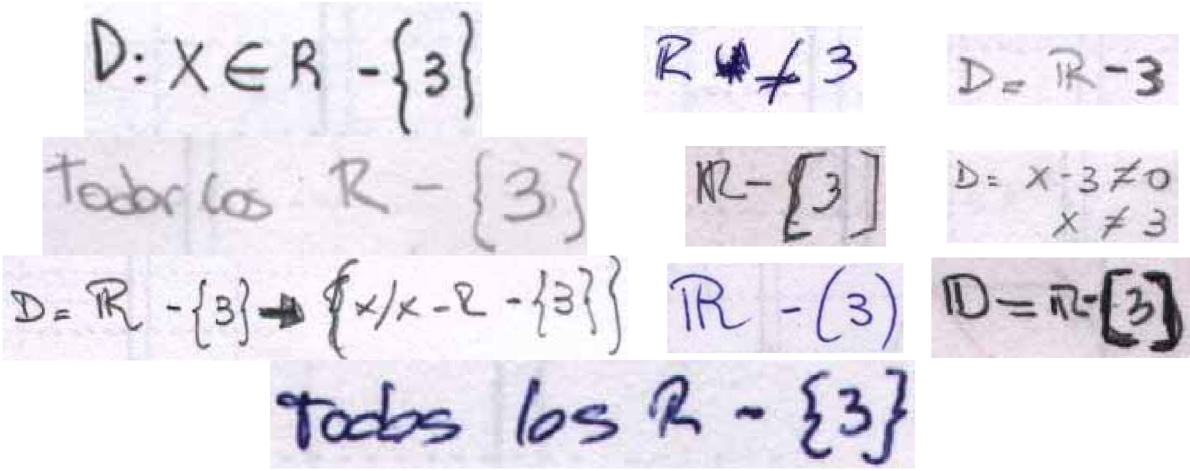
e) Realice el mismo procedimiento que en el inciso **c)** con el intervalo $\left(6 - \frac{1}{4}, 6 + \frac{1}{4}\right)$. ¿El intervalo encontrado es mayor o menor que el anterior? Interprete gráficamente.

f) Considere ahora el intervalo $\left(6 - \frac{1}{10}, 6 + \frac{1}{10}\right)$. ¿Qué puede observar?

g) ¿Podría repetir el procedimiento con cualquier intervalo que incluya a 6?

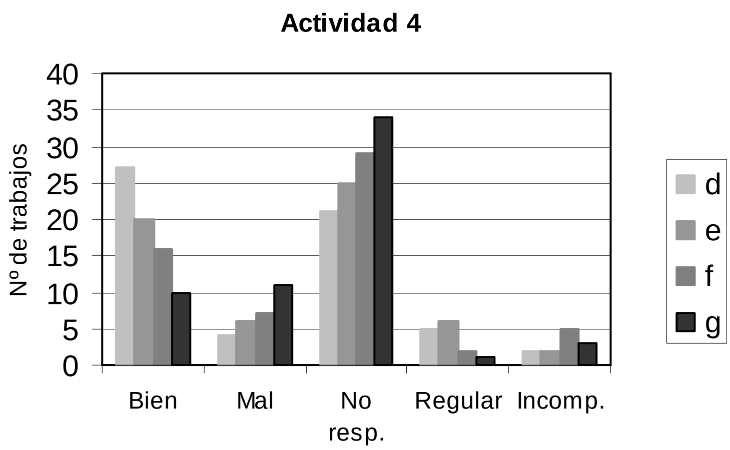
Esta actividad es muy importante y en ella se plantean diferentes interrogantes buscando preparar al alumno para llegar a la definición formal de límite.

En relación al ítem a, si bien se observa que logran formar una idea del dominio de la función presentan dificultades en el momento de su notación. Las expresiones y notaciones utilizadas por los alumnos son de lo más disímiles, como por ejemplo:



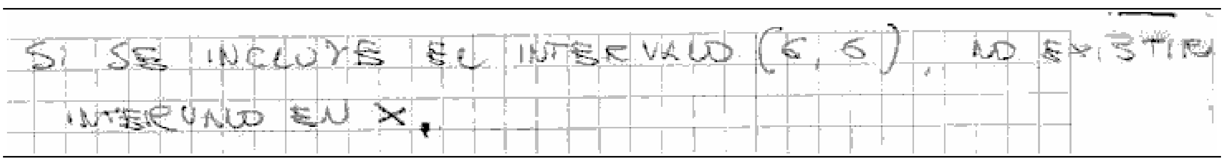
En el gráfico de barras se muestran los resultados obtenidos en los diferentes ítems.

Como se puede observar son numerosos los alumnos que no respondieron lo solicitado en **d**, **e**, **f** y **g**.



Estas cantidades denotan la falta de abstracción para la construcción de intervalos cada vez más pequeños y así poder observar qué sucede con su imagen, si bien el ítem **c** donde se solicitaba la gráfica de la función fue realizado correctamente en cincuenta y siete trabajos.

Algunas producciones de los alumnos son las siguientes:

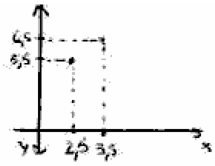


---

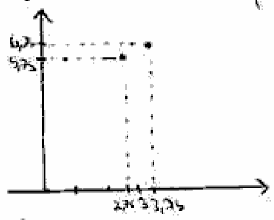
8 * No, con el 6 no se podría, porque y=6, no posee dominio.

---

d) el intervalo es (2,5 , 3,5)



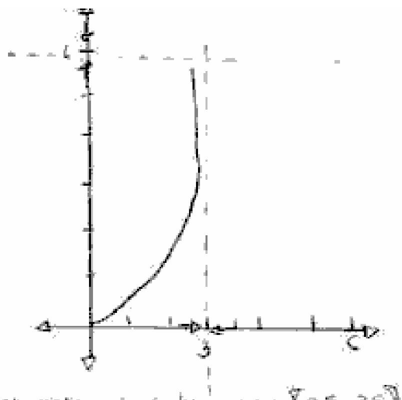
e) el intervalo es (2,75 ; 3,25) ⇒ el intervalo es menor q' el anterior.



f) El intervalo sobre el eje x es menor q' los dos anteriores. g) Sí

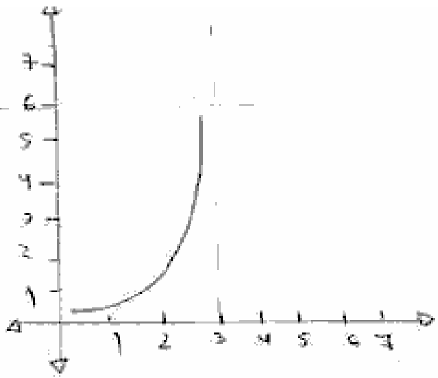
---

d)



Los valores de x deben estar [2,5 , 3,5]

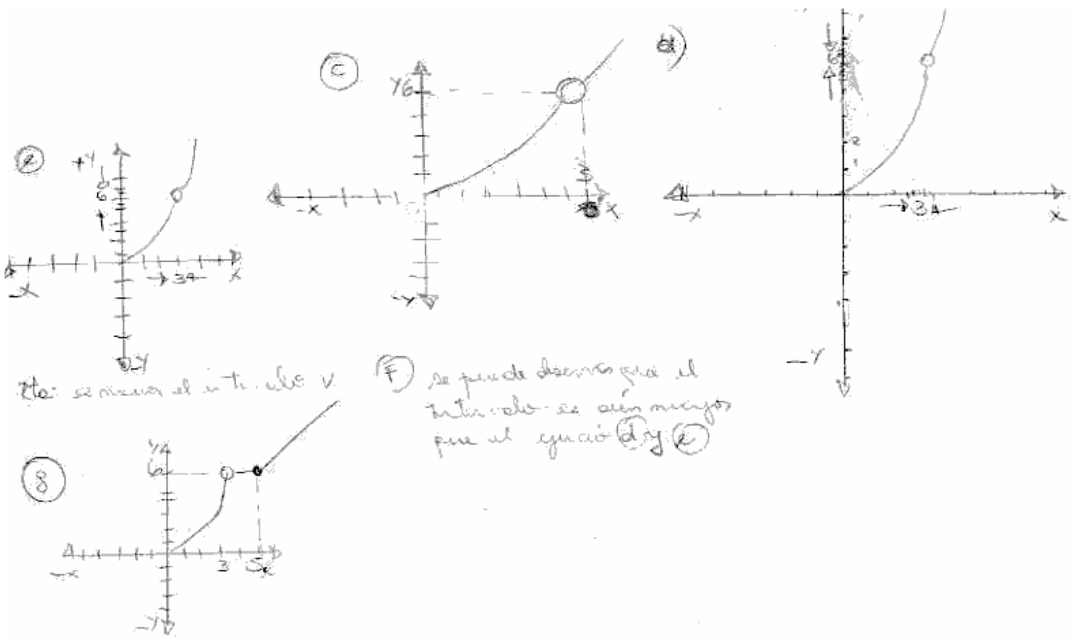
e)



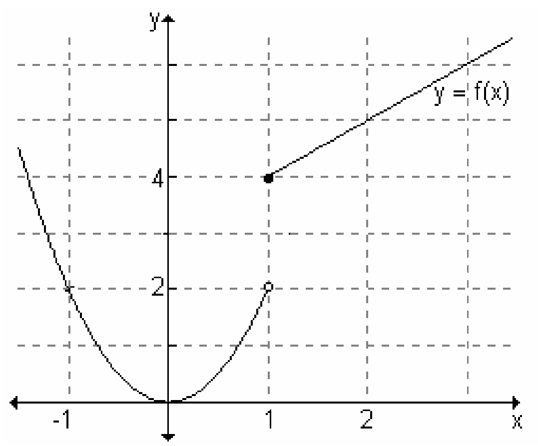
Los valores de x deben estar entre [2,75 , 3,25]
El intervalo encontrado es menor.

f) Podemos observar que ese intervalo tiende a x=3

g) Sí, ya que si incluye a 6, siempre va a tender a x=3.



Actividad 5: Dada la función definida gráficamente, ¿a qué valor se acerca f(x) cuando x tiende a 1?



a) Si en el eje y consideramos un intervalo alrededor de 2, por ejemplo $\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)$. ¿Es posible encontrar un intervalo alrededor de x = 1 tal que sus imágenes estén en $\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)$?

b) Si en el eje y consideramos un intervalo alrededor de 4, por ejemplo $\left(\frac{7}{2},\frac{9}{2}\right)$. ¿Es posible encontrar un intervalo alrededor de x = 1 tal que sus imágenes estén en $\left(\frac{7}{2},\frac{9}{2}\right)$?

En relación a la consigna *Dada la función definida gráficamente, ¿a qué valor se acerca f(x) cuando x tiende a 1?*, las respuestas fueron:

Correcta	Incorrecta	No responde
11,9 %	81,3 %	6,8 %

Algunas de las respuestas incorrectas encontradas son:

Respuesta	Cantidad	Respuesta	Cantidad
“se acerca a 4”	13	“f(x) se acerca a 2 y a 4”	1
“(2, 4] ”	1	“cuando x tiende a 1 f(x) tiende a 2 e incluye a 4”	1
“a 2 y a 4”	1	“ si $x \to 1^- \Rightarrow$ f(x) = 2 si $x \to 1^+ \Rightarrow$ f(x) = 4”	2
“se acerca a 2”	20	“f(1)= 4”	1
“se acerca a 2 pero toma el valor 4”	1	“$x^- \Rightarrow 1$ $y^+ \Rightarrow 2$” — “$x^+ \Rightarrow 1$ $y^- \Rightarrow 4$”	1
“ $x \to 1^-$, $f(x) \to 4^-$ $x \to 1^+$, $f(x) \to 2^+$”	1	“$x \to 1^+ = 4$ $x \to 1^- = 2$”	1
“ si $x \to 1^-$, $y \to 2^-$ si x = 1, y = 4”	1	“f(x) = 2 $x \to 1$”	1
“se acerca a –2”	1	“$f(1) \to 4$”	1

Se destacan las respuestas en las que confunden:

- el límite lateral por derecha con la imagen de la función en el punto $x = 1$ (que es 4); esto surge pues gráficamente el punto (1, 4) está marcado y “relleno”, ó
- el límite lateral por izquierda con el punto (1, 2) que en la gráfica está marcado aunque no “relleno”.

En lo referente al trabajo con intervalos, muchos alumnos expresan que no es posible encontrarlo pero no pueden explicarlo correctamente. Para el ítem **a)** encontramos respuestas como: *“No porque* $\frac{5}{2}$ *no es imagen de ningún valor“, “No, porque* $s(x) = \frac{5}{2}$ *no existe”* y para el **b)** expresiones como: *“No.* $\frac{7}{2}$ *no es imagen de ningún valor”, “No porque* $f(x) = \frac{7}{2}$ *no existe”.*

En estos casos nos parece que entienden la situación pero justifican usando el valor extremo que no está incluido en los intervalos.

Otras respuestas que se obtuvieron son: *“No se puede encontrar un intervalo ya que la gráfica pertenece a dos funciones”*. En este caso no reconocen el concepto de función por tramos.

Algunos alumnos responden: *“No, porque no incluye al P(1, 2)”* en **a)** y *“Sí, porque incluye al P(1, 4)”* en lo solicitado en **b)**. A pesar de que los dos incisos tienen las mismas características, ya que sólo se pregunta la existencia de un intervalo, tiene mucho peso la imagen de $x = 1$ en uno de los tramos de la función.

Para continuar realizando las actividades, recibieron la siguiente consigna:

Antes de realizar la Actividad 6 tenga en cuenta la definición y las observaciones siguientes:

> *Definición.* El límite de la función f(x) cuando x tiende al número real *a* es igual al número real L si al aproximarse x a *a* por la izquierda y por la derecha, siendo $x \neq a$, resulta que f(x) se aproxima o incluso es igual a L. Se escribe: $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

La expresión "al aproximarse x a ***a*** por la izquierda y por la derecha" de la definición anterior es muy importante. La notación $\lim_{x \to a^+} f(x)$ se utiliza para indicar el límite lateral por derecha y expresa el valor al que se aproxima f(x) cuando x tiende a ***a*** tomando valores mayores que **a**, es decir valores que se encuentran a su derecha. La notación $\lim_{x \to a^-} f(x)$ se utiliza para indicar el límite lateral por izquierda y expresa el valor al que se aproxima f(x) cuando x tiende a ***a*** tomando valores menores que ***a***, es decir valores que se encuentran a su izquierda.

Para que exista el límite de una función, deben existir los límites laterales y ser iguales.

Nota. Una función puede tener límite en un punto y no estar definida en ese punto.

Actividad 6: Grafique en cada caso una función que cumpla las condiciones siguientes:

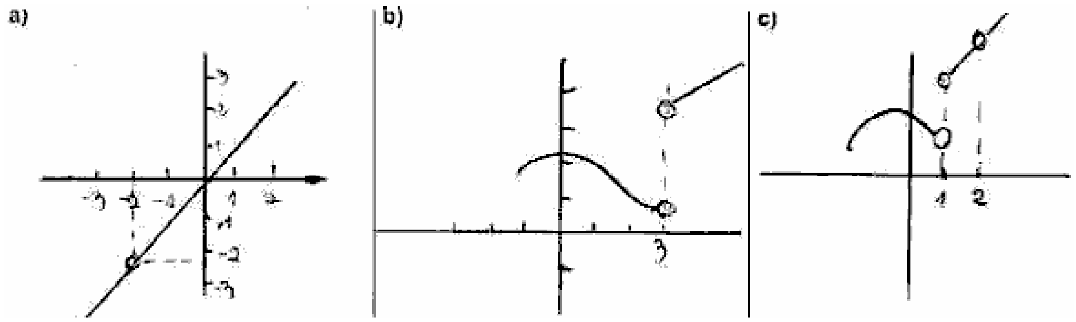
a) Dominio el conjunto de los números reales y que no tenga límite en $x = -2$.

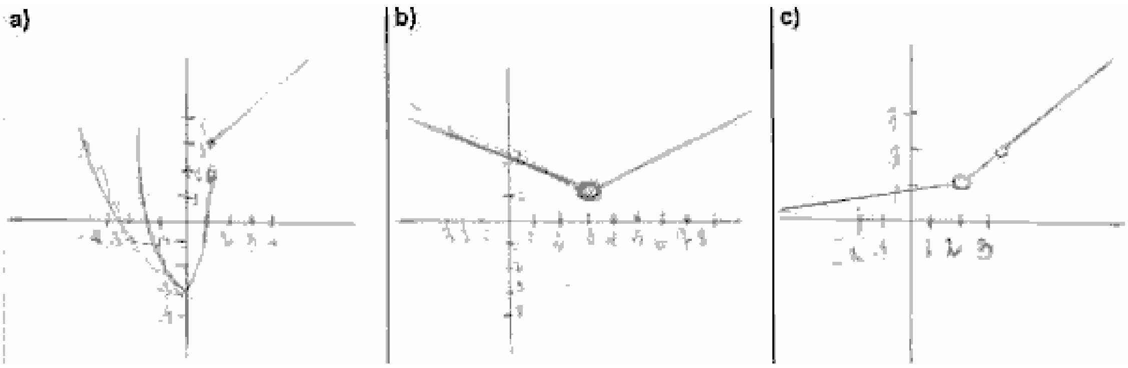
b) Dominio el conjunto de los números reales excepto $x = 3$ que tenga límite en ese punto.

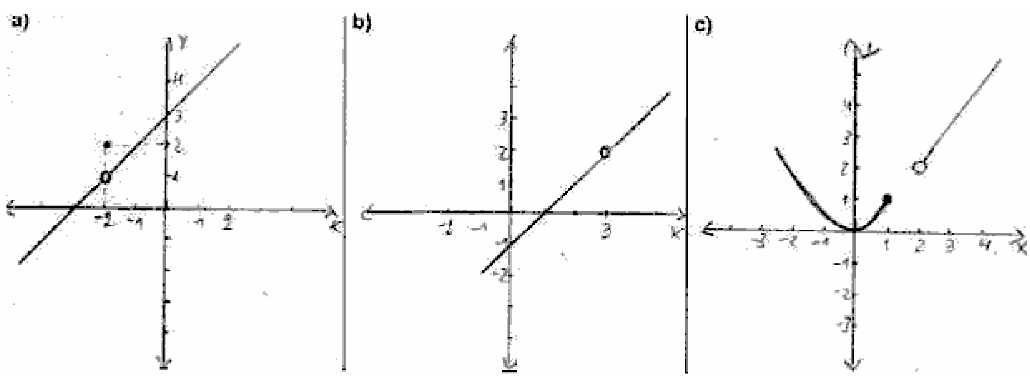
c) Dominio el conjunto de los números reales excepto $x = 2$ que tenga límite en $x = 1$ y no en $x = 2$.

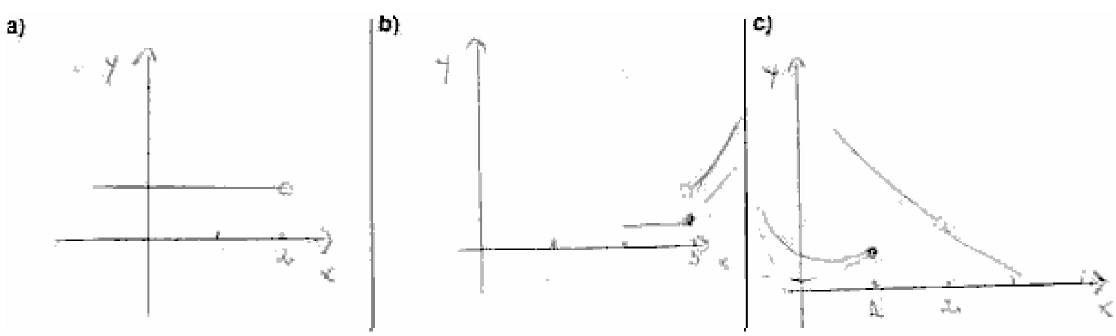
En estas actividades se relacionan los sistemas de representación verbal, simbólico y gráfico. Se busca que los alumnos se familiaricen con la idea de límite, sean capaces de representar funciones con o sin límite y de distinguir entre el límite y el valor de una función en un punto. Sólo un 45% de los trabajos presentaron correcta la opción **c** mientras que la que menos dificultades les presentó fue la **b** en la que el 79% presentaba respuesta correcta. Llama la atención los inconvenientes que tienen para la construcción de gráficos de funciones a partir de condiciones dadas en forma verbal.

Compartimos las producciones de algunos de nuestros alumnos.









Actividad 7: Determine si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones. Justifique sus respuestas utilizando gráficos:

a) Si $\lim_{x \to 2} f(x) = 3 \Rightarrow f(2) = 3$

b) Si $f(2) = 3 \Rightarrow \lim_{x \to 2} f(x) = 3$

c) Si $-3 \notin D_f$ (dominio de f) $\Rightarrow$ no existe $\lim_{x \to -3} f(x)$

d) Si no existe $\lim_{x \to -3} f(x) \Rightarrow -3 \notin D_f$

e) Si existe $\lim_{x \to -3} f(x) \Rightarrow -3 \in D_f$

Como se observa en la siguiente tabla, la mayor cantidad de errores se presentaron en los ítems **a** y **b**.

Respuestas	**Ítem a**		**Ítem b**		**Ítem c**		**Ítem d**		**Ítem e**	
	Cant	**%**	**Cant**	**%**	**Cant**	**%**	**Cant**	**%**	**Cant**	**%**
Correcta	13	22.0	3	5.1	28	47.4	22	37.3	18	30.5
Incorrecta	32	54.2	32	54.2	16	27.1	12	20.3	18	30.5
No responde	5	8.5	7	11.9	7	11.9	9	15.3	15	25.4
Regular	8	13.6	14	23.7	3	5.1	9	15.3	4	6.8
Incompleta	1	1.7	3	5.1	5	8.5	7	11.8	4	6.8

De las treinta y dos (32) incorrectas en cada ítem, veintiocho (28) en el ítem **a** y veintisiete (27) en el ítem **b** colocaron verdadero y presentaron como justificación gráficas de funciones continuas. Para ellos el concepto de límite de una función en un punto es lo mismo que la imagen en dicho punto. Teniendo en cuenta ambos ítems, consideran una doble implicación

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 3 \Leftrightarrow f(2) = 3$$

¿Cómo continuamos nuestro trabajo?

Dado que, del análisis de las producciones de los grupos de trabajo, se observan deficiencias y carencias en los conocimientos previos necesarios para abordar los temas de cálculo, poco nivel de abstracción y escaso nivel de conceptualización requerido para el desarrollo de los nuevos conceptos, y que, por manifestaciones de ellos (a través de encuestas y entrevistas), se nota algún miedo o disgusto hacia la matemática en general y el cálculo en particular, se decidió continuar la tarea con determinadas acciones.

Entre ellas, las más significativas fueron:

- propiciar el debate y discusión en forma grupal con los alumnos sobre los errores cometidos y las dificultades observadas en las clases sucesivas al reaparecer los contenidos involucrados,
- el debate y discusión en forma individual durante las clases de consulta organizadas especialmente para tratar esta situación,
- el análisis entre los docentes y con los alumnos de los resultados obtenidos en las preguntas del parcial correspondiente a estos tópicos y la discusión nuevamente sobre las producciones concretas de los alumnos,
- el trabajo continuo retomando cotidianamente estos contenidos al desarrollar los diferentes temas del programa analítico teniendo en cuenta que para lograr conocimiento matemático es necesario que se produzcan rupturas y reacomodaciones y,
- la reflexión permanente, como docentes, sobre el papel que juega el lenguaje en matemática, pues esto permitirá elaborar actividades en el aula que contribuyan a la correcta interpretación de las consignas y comunicación de los resultados.
- Es importante:
- brindar a los alumnos un espacio que les permita argumentar sobre los conceptos que se tratan en la clase exponiendo sus propias ideas,
- darles oportunidad para no estar de acuerdo ni con sus pares ni con el profesor,
- provocar y fomentar la discusión entre los estudiantes a fin de aclarar y ampliar aspectos matemáticos trabajados en esta actividad así como tomar nota de los aspectos nuevos que emerjan de la discusión de los propios estudiantes.

Reflexiones

Analizando los resultados, nos preocupan las dificultades cognitivas que presentan los alumnos ya que en general, no lograron el desarrollo del razonamiento formal requerido para comprender los conceptos de límite. Nos propusimos aprovechar los errores encontrados y de esa manera retomar los contenidos para que los alumnos descubran e identifiquen sus dificultades y organicen estrategias para superarlas. Nos preguntamos, ¿por qué tienen tantos inconvenientes? y, en especial, ¿cómo podemos ayudarlos? Estamos convencidas, entre otras cosas, que, algunas de las estrategias serían:

- favoreciendo un tratamiento curricular de los errores mediante el uso de situaciones que permitan incorporar al debate en el aula ideas correctas y equivocadas tendientes a generar un conflicto cognitivo que motive una discusión que permita la resolución del mismo,
- facilitando actividades que provoquen en el estudiante un conflicto y lo hagan reflexionar sobre sus estructuras cognitivas erróneas,
- motivando la apertura del pensamiento hacia nuevas hipótesis dado que descubrir hipótesis falsas y sus consecuencias facilita la incorporación de nuevos conocimientos y aporta nuevas ideas,
- propiciando el descubrimiento y la discusión grupal de los errores convirtiendo al alumno en un sujeto activo en busca de superación y,
- permitiendo al alumno superar el error y transformarlo gracias a situaciones de enseñanza adecuadas.

Como docentes es importante vivenciar el diseño y la puesta en marcha de diferentes actividades de aula y comprobar y reconocer la importancia de las mismas tanto como recursos valiosos para la enseñanza como para su propia formación. Si pretendemos enseñar un concepto para que nuestros alumnos lo aprendan debemos favorecer diferentes interpretaciones que puedan hacerse de los conocimientos y sus relaciones con preconceptos y conocimientos previos. Un desafío constante es poder desarrollar estrategias de enseñanza basadas en la cooperación, propiciando el trabajo en grupos a fin de reforzar conocimientos y compartir o disentir con las diferentes miradas sobre las actividades matemáticas.

Para una futura implementación y readecuación de la situación es particularmente importante la discusión en grupo de los trabajos.

Es primordial, al trabajar distintos profesores con diferentes grupos de alumnos, hacer el ejercicio de reunirnos y debatir y discutir entre nosotros buscando identificar las dificultades que consideramos tendrían nuestros alumnos al trabajar las distintas actividades propuestas. Esta instancia es tan importante como la puesta en común que se haga entre todos los docentes involucrados después de llevar al aula la situación diseñada.

Plantearnos qué enseñar y cómo hacerlo de la mejor manera, nos impone una reflexión continua sobre nuestro accionar que nos permita encontrar el significado de las distintas situaciones escolares, detectar problemas y hallar soluciones. Si las experiencias son variadas en relación a la enseñanza de un mismo concepto, aumentará la posibilidad de que el alumno actúe, realice los procesos de observación, establezca relaciones, generalice y llegue a la abstracción. Realizar una mirada reflexiva y crítica sobre nuestras acciones nos permite decidir, diseñar, implementar y experimentar estrategias de acción para obtener un aprendizaje de calidad.

Bibliografía

- M. Artigue, (1995): "La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos". En: M. Artigue; R. Douady; L. Moreno y P. Gómez (editor). Ingeniería didáctica en educación matemática, 97-140. Una Empresa Docente. Grupo Editorial Iberoamérica. Bogotá.
- M. Artigue, (2000): "Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental:¿Qué nos enseñan las investigaciones didácticas y los cambios curriculares?" En: R. Cantoral: El futuro del cálculo infinitesimal. ICME 8, Grupo Editorial Iberoamérica. Méjico.
- C. Azcárate; D. Bosch; M. Casadevall, y E. Casellas, (1996): Cálculo Diferencial e integral. Editorial Síntesis. España.
- S. Blázquez; T. Ortega (2001): "Los sistemas de representación en la enseñanza del límite". Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. 4, Nº 3, 219-236.
- R. Borassi (1987): "Exploring Mathematics through the Analysis of Errors". For the Learning of Mathematis. 7, 2-9.
- G. Brousseau (1987): "Fondements et méthods de la didactique des mathématiques". Recherches en didactique des mathématiques 7.2, 33-115.
- G. Brousseau (1998) Théorie des situations didactiques. Grenoble. La Penseé Sauvage.
- R. Cantoral (2003): "Pensamiento Matemático Avanzado" En: R.Cantoral, R. Farfán, F. Cordero, J. Alanís, R. Rodriguez y A. Garza: Desarrollo del pensamiento matemático, 205-218. Editorial Trillas. México.
- J. Confrey (1990): A review of research on student conceptions in Mathematics, Science and Programming. Review of Research in Education 16, 3-55.
- B. Cornu (1991): "Limits". En: D. Tall, (Ed). Advanced Mathematical Thinking, 153-166. Dordrecht: Kluwer Academic Press.
- J. Cottrill, E. Dubinsky, D. Nichols, K. Schwing endorf, K. Thomas y D. Vidakovic (1996): "Understanding the Limit Concept: Beginning with a Coordinated Process Schema". Journal of Mathematical Behavior. 15, 167-192
- E. Dubinsky (1991): Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. En D. Tall (ed.): Advanced Mathematical Thinking (pp 95-123).Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- H. Lara Chávez (1997): "La enseñanza de los conceptos de límite y continuidad de funciones". Memorias del Seminario Nacional: Calculadoras y Computadoras en Educación Matemática, 127-132. Sonora.
- A. Orton (1980): A cross-sectional study of the understanding of elementary calculus in dolescentes and young adults. Tesis Doctoral. University of Leed.
- G. Polya (1957): Cómo plantear y resolver problemas (Traducción castellana, 1965). México, Trillas
- H. Radatz (1980): Student's Errors in the Mathematis Learning Process: A Survey. Learning of Mathematics. 1.1, 1-20.
- A. Sierpinska (1985): "Obstacles epistémologiques relatifs a la notion de limite." Recherches en Didactique des Mathématiques 6 (1), 5-67.

Adriana Engler es Licenciada en Matemática Aplicada y Magister en Educación PsicoInformática y se dedica a la investigación en Matemática Educativa ocupándose en especial de las dificultades de enseñanza y aprendizaje de los principios del cálculo y la incorporación de las nuevas tecnologías en el aula.
Facultad de Ciencias Agrarias - Universidad Nacional del Litoral
Esperanza - Santa Fe - Argentina
aengler@fca.unl.edu.ar

Silvia Vrancken es Profesora en Matemática y actualmente alumna de la Maestría en Didáctica Específicas. Se dedica a la investigación en Matemática Educativa ocupándose en especial de las dificultades de enseñanza y aprendizaje de los principios del cálculo.
Facultad de Ciencias Agrarias - Universidad Nacional del Litoral
Esperanza - Santa Fe - Argentina
svrancke@fca.unl.edu.ar

Marcela Hecklein es Licenciada en Matemática Aplicada y actualmente integra el equipo de trabajo del proyecto de investigación "Errores y dificultades: organizadores didácticos en el aprendizaje del Cálculo en carreras no matemáticas".
Facultad de Ciencias Agrarias - Universidad Nacional del Litoral
Esperanza - Santa Fe - Argentina
mhecklei@fca.unl.edu.ar

Daniela Müller es Profesora en Matemática y actualmente alumna de la Maestría en Didáctica de las Ciencias Experimentales. Se dedica a la investigación en Matemática Educativa y en especial a la incorporación de las nuevas tecnologías en el aula.
Facultad de Ciencias Agrarias - Universidad Nacional del Litoral
Esperanza - Santa Fe - Argentina
dmuller@fca.unl.edu.ar

María Inés Gregorini es Profesora en Matemática y Computación y actualmente integra el equipo de trabajo del proyecto de investigación "Errores y dificultades: organizadores didácticos en el aprendizaje del Cálculo en carreras no matemáticas".
Facultad de Ciencias Agrarias - Universidad Nacional del Litoral
Esperanza - Santa Fe - Argentina
migrego@fca.unl.edu.ar