

O Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas e os Processos Cognitivos Superiores¹

Edna Maura Zuffi y Lourdes de la Rosa Onuchic

Resumo

Neste trabalho apresentamos uma experiência de prática contínua da metodologia de ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas, em uma escola pública do Ensino Médio, no Brasil. Apresentamos dados coletados em observações filmadas em sala de aula e através de entrevistas com a professora parceira. Concluímos pela viabilidade de tal metodologia para a realidade cultural das salas de aula de nossas escolas públicas, com melhorias no que diz respeito à aprendizagem dos alunos e o favorecimento de aspectos metacognitivos, ligados a processos mentais superiores.

Abstract

In this paper we present an experience on the teaching-learning of Mathematics through problem solving as a continued methodology, in a public Brazilian high school. We show a set of data collected in classroom, which were videotaped, or by interviews with the participating teacher. We concluded for the viability of such a methodology for the cultural reality of such classrooms, which reached better level of students' learning, as well as improvement of their metacognitive activity, related to superior mental processes.

Introdução

Neste artigo, trataremos da aplicação de atividades de ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas, como parte do projeto "DESENVOLVIMENTO E AVALIAÇÃO DE UMA PEDAGOGIA UNIVERSITÁRIA PARTICIPATIVA NO ENSINO MÉDIO: atividades com ênfase em Matemática, Ciências e Comunicação". Este projeto originou-se no *campus* da Universidade de São Paulo, na cidade de São Carlos, Brasil, e tem o apoio de vários institutos deste campus.

Como parceira, foi selecionada uma escola da rede pública dessa cidade, devido à sua localização próxima à Universidade, à clientela de alunos bastante heterogênea, quanto ao aspecto sócio-econômico, e também pela aceitação da parceria por parte de seus diretores, coordenadores e professores.

¹ Parcialmente financiado pela FAPESP-Brasil

O projeto tem por objetivo geral promover a melhoria da qualidade do ensino de Ciências e Matemática nessa escola, em classes do Ensino Médio (alunos de 15 a 17 anos), e este fim desdobra-se na formação de aptidões para as ciências, em se tratando dos alunos, e na formação continuada dos professores envolvidos. Iniciou-se em 2000, de forma experimental, com uma turma de 40 alunos da 1ª série do Ensino Médio. No período de 2001 a 2005, o projeto contou com o financiamento da FAPESP (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo).

Nesse projeto, para o ensino de Matemática em sala de aula, foi confeccionado um texto didático, que tem como foco a *resolução de problemas* nas aulas que iniciam assuntos novos para os alunos. Não foi possível adotar esta mesma metodologia em todas as aulas do curso, devido aos seguintes fatores: i) os alunos não estavam habituados a resolver problemas naquela escola, e uma mudança total nos métodos de ensino nessas classes poderia gerar inconvenientes dentro da mesma; ii) um dos propósitos do projeto é o apoio aos alunos da escola pública que pretendem ingressar em cursos superiores públicos, através de exames vestibulares, principalmente na área de ciências exatas. Desse modo, não poderíamos desconsiderar o grande número de informações, conteúdos e processos da Matemática exigidos neste tipo de exames, no Brasil; iii) os professores envolvidos no projeto também não estavam habituados a trabalhar com a resolução de problemas, e apresentavam dificuldades iniciais em aplicar as situações-problemas.

Mesmo com as restrições acima, os resultados que encontramos na aplicação do que chamamos *metodologia de ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas*, para este projeto, foram muito promissores e acreditamos que sejam inéditos, no Brasil, para o Ensino Médio, e com o grau de continuidade com que tal metodologia tem sido aplicada. Isto traz várias reflexões acerca da melhoria da qualidade do ensino nas escolas públicas, fato que tem sido objeto de inúmeras discussões e uma meta no Brasil, para a formação de nossos alunos e professores.

Um cenário para a Resolução de Problemas

A Resolução de Problemas tem sido foco de pesquisas na área de Educação Matemática, em diversos países. Desde a tradução, no Brasil, da obra organizada por Krulik & Reys (1997), o livro do ano de 1980 do NCTM², que esta linha de ensino e pesquisa ganhou mais fôlego entre a maioria de nossos pesquisadores. Este livro traz artigos de especialistas, em sua maioria americanos, e o primeiro deles é a reprodução de um texto de George Pólya, de 1949, cujas idéias desencadearam

² National Council of Teachers of Mathematics, dos E.U.A.

maiores discussões sobre a questão da Resolução de Problemas (R.P.) em Matemática, com seu clássico “How to solve it”³.

No cenário internacional, encontramos vários trabalhos sobre essa temática, abordada sob diversos prismas e referenciais teóricos. Acabando a década de 1980, em que a ênfase em resolução de problemas era colocada sobre o uso de modelos e estratégias, novas discussões foram desencadeadas. A Resolução de Problemas passa, então, a ser pensada como uma metodologia de ensino, ponto de partida e meio de se ensinar Matemática. Sob esse enfoque, problemas são propostos de modo a contribuir para a construção de novos conceitos e novos conteúdos, antes mesmo de sua apresentação em linguagem matemática formal. A Resolução de Problemas, como uma metodologia de ensino, passa a ser o lema das pesquisas para os anos 90 (Onuchic, 1999).

English (1998) estuda, nesta temática, a proposta de atividades para os alunos nas quais eles possam gerar seus próprios problemas, em adição à resolução de outros pré-formulados. A autora investigou se crianças da 3ª série, que possuíam diferentes perfis para a noção de número, reconheciam o simbolismo formal como representando uma gama de situações-problemas, e como respondiam a atividades de proposição de problemas em contextos formais e informais.

Numa outra perspectiva, Lawson & Chinnappan (2000) examinaram a relação entre o desempenho na resolução de problemas e a qualidade de organização do conhecimento de 36 (trinta e seis) estudantes da 10ª série, em tarefas de geometria, na Austrália. Estes foram classificados em dois grupos (um de alto e outro de baixo rendimento) e os autores reportam suas análises estatísticas quanto a indicadores de conteúdo e conexão (“content” & “connectedness”) para os dois grupos. Os indicadores de conexão de conhecimentos mostraram que os alunos de alto rendimento, em comparação aos outros, podiam retomar mais conteúdos espontaneamente e ativar mais ligações entre esquemas de conhecimentos dados e informações relacionadas. Comentam que estes indicadores de conexão foram mais determinantes para diferenciar os grupos quanto à base de seu sucesso na resolução de problemas.

Van Dooren, Verschaffel & Onghena (2002) investigaram estratégias e habilidades na resolução de problemas aritméticos e algébricos, com professores em formação inicial, para escolas primárias e secundárias da Bélgica, comparando-os no início e no final de seu curso. Analisaram aspectos de seu comportamento ao resolverem os problemas propostos e a maneira pela qual avaliavam a solução de seus alunos. Verificaram que os futuros professores da escola secundária preferiam usar a álgebra, tanto para suas soluções quanto para avaliar o trabalho dos alunos, mesmo quando uma solução aritmética parecia mais evidente. Alguns professores da escola primária tendiam a aplicar exclusivamente métodos aritméticos, mas, tomadas como um todo, concluíram que as avaliações dos professores primários estavam mais adaptadas à natureza da tarefa.

³ No Brasil, “A Arte de Resolver Problemas”.

Ainda, no IX Congresso Internacional de Educação Matemática (IX ICME), realizado em 2000, no Japão, instalou-se um grupo de discussão sobre a “Resolução de Problemas na Educação Matemática”⁴. Um dos pontos enfatizados nestas discussões foi quanto à pesquisa sobre a prática e os trabalhos desenvolvidos para ensinar através de, e sobre, a resolução de problemas.

González (2005) retoma a temática das investigações sobre a resolução de problemas e procura identificar suas tendências predominantes, refletidas nos títulos dos trabalhos apresentados em 5 (cinco) importantes reuniões de Educação Matemática, que ocorreram na América Latina entre 1998 e 2001. Isto reforça nossa hipótese de que a comunidade de pesquisadores em Educação Matemática ainda considera relevante e profícua esta temática.

No cenário brasileiro, Alves (2004) também coloca como um dos objetivos da Educação Básica, desenvolver no aluno a capacidade de solucionar problemas. Utiliza o “modelo de prontidão” para uma atividade matemática, proposto por Krutetskii (1976), para analisar como a habilidade para perceber um tipo generalizado de problema se manifesta em estudantes do Ensino Médio, com diferentes desempenhos na solução de problemas matemáticos. Esse componente, segundo a autora, seria responsável pela generalização rápida e imediata da estrutura do problema, que ocorre no momento em que o sujeito percebe e seleciona as características essenciais daquele tipo de problema, na leitura inicial. Os resultados da autora indicaram que os estudantes investigados não apresentavam tal componente desenvolvido satisfatoriamente.

O GTERP - Grupo de Trabalho e Estudo em Resolução de Problemas – coordenado por Onuchic desde 1992, Na Universidade Estadual Paulista, em Rio Claro, Brasil, tem sido o núcleo gerador de atividades de aperfeiçoamento, investigações e produção científica nesta linha e adota a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da resolução de problemas para todos os níveis de escolaridade. Algumas dissertações, teses e artigos produzidos sob a orientação da coordenadora desse grupo são: Pironel, 2002; Azevedo, 2002; Bolzan, 2003; Paulette, 2003; Pereira, 2004; Allevato (2005); Huaman, 2006; Onuchic & Allevato (2005)). Obviamente, nesta retomada de alguns trabalhos acerca da Resolução de Problemas como um objeto de estudos consistente dentro da Educação Matemática, deixamos de abordar muitos outros (Oliveira, 2000; Utsumi, 2000; Medeiros, 2001). Nossa intenção com tais citações é mostrar que o tema continua atual nas discussões junto a pesquisadores da área. Porém, no que diz respeito à real capacidade da metodologia de ensino-aprendizagem *através da* resolução de problemas provocar mudanças de longo prazo nas salas de aula de Matemática, principalmente no Brasil, e com todas as condições peculiares de nossa educação, ainda há investigações a se fazer. É nesta perspectiva que trazemos esta pesquisa ao debate.

⁴ TSG-11: Problem Solving in Mathematics Education.

Aspectos teóricos da pesquisa

Em nosso projeto, tendo em vista que desejávamos um bom desenvolvimento junto aos alunos, tanto da linguagem matemática, quanto de sua aplicação para resolver problemas nas mais diversas áreas, optamos pelo desenvolvimento dos conceitos e conteúdos de Matemática *através da Resolução de Problemas*.

Encaramos nossa proposta como uma *metodologia*, porque ela não deve ser confundida com a mera introdução de problemas de aplicação, geralmente encontrados nos finais dos capítulos dos livros-textos de Matemática. Ela consiste em apresentar aos alunos, *já no início do tratamento* de um dado conteúdo, uma ou mais situações-problemas que possam levá-los a raciocinar sobre a necessidade de construir novos conceitos e processos, bem como a de associar outros periféricos, que venham a se conectar numa rede de significados (Machado, 1996, p. 117-176) e, também, para que possam trazer à tona as concepções prévias que eventualmente eles tenham sobre os campos conceituais envolvidos na resolução. Assim, este processo “requer um amplo repertório de conhecimento, não se restringindo às particularidades técnicas e aos conceitos, mas estendendo-se às relações entre eles e aos princípios fundamentais que os unificam. O problema não deve ser tratado como um caso isolado, mas como um passo para alcançar a natureza interna da matemática, assim como seus usos e aplicações” (Onuchic, 1999, p. 199-218). A partir, então, de seu envolvimento significativo com essas situações-problemas, e de uma síntese dos resultados alcançados pelos alunos, é que o professor pode ir à lousa e sistematizar os novos conhecimentos matemáticos discutidos e pesquisados durante o processo de busca das soluções, para depois retomá-los, então, em outros problemas e exercícios.

Adotamos a concepção de Onuchic (1999), segundo a qual se entende por *problema*, “tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em resolver”, isto é, qualquer situação que estimule o aluno a pensar, que possa interessá-lo, que lhe seja desafiadora e não trivial. Também é desejável que ela tenha reflexo na realidade dos alunos a que se destina.

Compreender os dados de um problema, tomar decisões para resolvê-lo, estabelecer relações, saber comunicar resultados e ser capaz de usar técnicas conhecidas são aspectos que devem ser estimulados em um processo de aprendizagem *através da resolução de problemas*. No decorrer desse processo, a formalização, o simbolismo e as técnicas precisas são introduzidas depois da resolução trabalhada, dando-se liberdade aos alunos, evitando-se direcioná-los para “o que pensar” ou “o que fazer”, conduzindo-os somente em casos de maiores dificuldades, ou seja, quando eles não sabem como agir.

Nossa concepção aproxima-se daquilo que ressalta Contreras (1987, apud González, 1998, p. 71): uma situação constitui-se num problema para uma pessoa quando não lhe é familiar; quando a novidade é sua característica fundamental e quando ela requer um tratamento distinto de uma mera aplicação rotineira. Em termos de sua execução, quando esta necessita deliberação, identificação de

hipóteses e comprovação de factibilidade, tendo o indivíduo que pôr em prova suas habilidades de raciocínio autônomo.

Também entendemos que nossa concepção de situação-problema reflete aquilo que González (1998, p.67) considera como uma Tarefa Intellectualmente Exigente (TIE), ou seja, “aquela que propicia um esforço de raciocínio e que não se realiza com o mero exercício de recordação e memória, nem com a utilização mecânica de esquemas algorítmicos, nem com a aplicação de receitas pré-concebidas; ao contrário, deve propiciar a realização de certo esforço intelectual”.

Segundo este autor, a vivência e realização de tais tarefas pelos alunos constituem-se numa oportunidade para aprender e estimular a ativação de seus processos de pensamento de ordem superior, levando-os a maior chance de se tornarem indivíduos intelectualmente competentes.

Seguindo a linha de Aguilar (1994), González (1998, p. 60) considera que as características cognitivas dos aprendizes se distinguem em dois níveis: o primeiro, considerado como *destrezas cognitivas de ordem inferior*, está constituído pelos processos associados com a codificação, armazenamento, recuperação e transformação de informações. O segundo se refere aos *processos mentais de ordem superior* (metacognitivos e auto-reguladores), usados para planejar, ativar, monitorar, avaliar e modificar os processos de nível inferior.

Desse modo, a Teoria Cognitiva pode dar suporte para se abordar o desempenho humano na realização de tarefas complexas, levando em conta as especificações do acionar cognitivo de quem executa tais tarefas.

Para González (1998, p.69-70), a prática reiterada de TIE's oferece a oportunidade de exercitar tais processos superiores, porém a possibilidade de transformá-la em uma experiência generalizável e transferível requer tanto a realização de um grande número de tarefas, como a tomada de consciência do que se fez, e de como se fez, em cada uma delas. Isto é, para a adequada transferência, não basta a aplicação reiterada de um procedimento associado com a tarefa, mas é imprescindível que quem a executa preste atenção à sua própria atuação durante a mesma, e conscientize-se das relações entre as estratégias aplicadas e os resultados obtidos, positivos ou negativos. Isto tem a ver com a reflexão sobre os processos de pensamento implicados durante a execução da tarefa. A vinculação entre a metacognição e a TIE se estabelece quando o executor: (a) toma consciência dos objetivos que pode alcançar com a tarefa; (b) reconhece quando existe mais de uma via para levá-la a cabo, ou que não tem nenhuma disponível no momento, ou que o modo que conhece não é aplicável, ou se mostra inadequado; (c) identifica os aspectos da estratégia empregada que se mostram favorecedores ou obstaculizadores à solução da tarefa, estabelecendo condições para sua aplicabilidade, criando bases para a generalização e/ou transferência.

Concordamos com González (ibidem, p.74), quando este afirma que aprender Matemática consiste em apropriar-se dos processos que são próprios a essa disciplina e incrementar a experiência pessoal no manejo dos mesmos. Em

conseqüência, de um ponto de vista cognitivo, o desempenho em Matemática está associado à ativação, por parte do aprendiz, de processos intelectuais de ordem superior demandados por tarefas próprias desta disciplina (especialmente a resolução de problemas) e a tomada de consciência de tais processos.

Isto não significa que desprezemos os aspectos da realidade sócio-cultural em que os alunos estão imersos, durante seu envolvimento na resolução de tarefas escolares. Aqui, procuramos também levar em conta como o ambiente cultural da escola pública brasileira pode influenciar os alunos em sua motivação para a dedicação às tarefas de resolver problemas.

Acreditamos, também, que a introdução da resolução de problemas como uma metodologia, no sentido que aqui expressamos para a área de Matemática, possa colaborar para que haja alguma mudança na perspectiva da ação docente, para além da organização do conhecimento em disciplinas. Pode-se dizer que esta intervenção é modesta, pois a organização da escola escolhida permanece pautada no modelo disciplinar. No entanto, com a aplicação reiterada desta metodologia, esperamos que os alunos sejam estimulados a relacionar os conhecimentos escolares adquiridos, não só à resolução de problemas matemáticos e suas generalizações, mas também com problemas relativos a outras áreas do conhecimento e outras disciplinas escolares.

Isto reforça nossa compreensão de que uma situação-problema aproxima-se daquilo que González (1998, p. 67-80) considera como uma Tarefa Intelectualmente Exigente (TIE). Este autor propõe um modelo para a Metacognição e a Resolução de Problemas (MRP), que compreende quatro componentes fundamentais:

- (i) **os fins**, representados pelos propósitos que se deseja alcançar e, no caso da resolução de problemas, a obtenção de uma solução para os mesmos;
- (ii) **as ações**, que englobam os desdobramentos de ordem intelectual que o resolvidor faz para atingir os fins (análises minuciosas de dados e partes do problema para elaborar um modelo matemático correspondente para o mesmo; análises de possíveis recursos e estratégias disponíveis; realização das decisões tomadas em termos de operações e procedimentos; verificação de resultados, parciais ou finais, e das condições iniciais da situação-problema);
- (iii) **os conhecimentos**, que incluem as informações que a pessoa tem sobre si mesma como resolvidora de problemas; as exigências cognitivas para o processo de resolução e os fatores que os tornam mais ou menos difíceis; suas crenças sobre si mesmo e o processo de resolução e os recursos de que dispõe para abordá-lo;
- (iv) **as experiências**, que se referem às vivências acumuladas, com base em seu envolvimento em tarefas análogas e à consciência do êxito ou fracasso experienciado ao aplicar alguma estratégia.

Podemos observar que a natureza metacognitiva desse modelo se manifesta nestas quatro componentes, as quais estão inter-relacionadas e não se dispõem

linearmente. Quando se aplica a metacognição no processo de resolver problemas, se faz referência ao conhecimento consciente que o resolvidor tem acerca da especificidade desse processo e da auto-regulação deliberada que tem no mesmo, levando em conta os fatores que condicionam a situação-problema, planejando suas ações, executando e avaliando os resultados. Esta capacidade de dar conta de seu próprio processo de resolução marcaria, segundo González (ibidem, p. 81), a diferença entre os resolvidores exitosos e os não-exitosos. E mais ainda, quem teria “aprendido a aprender” e os que não são capazes de gerenciar sua própria aprendizagem, de modo que o bom resolvidor de problemas, assim como o aprendiz autônomo, tem consciência e é capaz de regular sua ação cognitiva durante esse processo.

Os participantes da pesquisa e a escola parceira

As três turmas participantes de nosso projeto (1^a, 2^a e 3^a séries) são formadas a partir da escolha espontânea dos alunos da série anterior ao Ensino Médio, tendo estes tomado prévio conhecimento de suas características. Também é levado em consideração o nível de empenho desses alunos em anos anteriores (13-14 anos), relativamente à Matemática e às Ciências, em casos de demanda excedente ao número máximo de 40 (quarenta) alunos por turma. Este número é determinado pela Secretaria Estadual de Educação.

Desde a implantação do projeto piloto em 2000, com a abertura da classe de 1^a série, temos acompanhado, através de entrevistas com os professores e coordenadores pedagógicos, o andamento do mesmo. Ao final do ano letivo de 2002, com a conclusão da primeira turma, após três anos de participação, foram aplicados questionários aos alunos e a seus pais, para se obter a percepção dos mesmos sobre o andamento do projeto. Os resultados foram divulgados por Zuffi, Barreiro & Mascarenhas (2003), mostrando um alto grau de satisfação dos participantes: pais, alunos e professores.

Destacamos que os dois professores de Matemática que trabalharam no projeto consideravam nossa proposta como algo novo, pois nunca haviam desenvolvido suas aulas com esta metodologia, anteriormente, de forma contínua e regular.

Para a análise que aqui apresentaremos, vamos utilizar dados coletados com a professora Isa, em filmagens realizadas em sala de aula, durante a execução de atividades de ensino através da resolução de problemas. A filmagem foi realizada em junho de 2004, na 1^a série, com uma atividade introdutória ao estudo de gráficos de funções. Houve uma outra filmagem, realizada em outubro de 2004, na 2^a série, com problemas introdutórios ao estudo de sistemas lineares. A turma do segundo ano já havia trabalhado com a metodologia de ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas no ano anterior. Para a 1^a série, foi também solicitado que os alunos respondessem à pergunta de como a atividade contribuiu para sua compreensão sobre funções, para o que obtivemos as respostas por

escrito. A professora também fez um relato sobre o desempenho dos alunos, após a realização da atividade filmada.

Na 1ª série estavam presentes, durante a filmagem, 35 (trinta e cinco) alunos e, na 2ª, 32 (trinta e dois). Eles foram convidados a formar grupos de quatro pessoas e prontamente atenderam à solicitação. Na 1ª série, houve um constrangimento inicial maior, com a presença da filmadora, assim como maior demora para que os alunos efetivamente iniciassem a resolução dos problemas. Na sala da 2ª série, os alunos mostraram-se mais à vontade com as atividades e iniciaram as discussões para a resolução mais rapidamente.

A partir dos dados obtidos, pretendemos explorar as seguintes questões: é possível implementar com êxito, e mais continuamente, a metodologia adotada através da R.P. nas condições atuais de ensino oferecidas pela escola pública brasileira? Quais as formas de ação e respostas dos alunos na implantação dessa metodologia de uma forma contínua? Quais características do modelo MRP, proposto por González (1998), para a resolução de problemas foram contempladas em nosso projeto e o que isto significou em termos da aprendizagem matemática dos alunos participantes?

Com a apresentação de alguns dados da 1ª série, na próxima seção, pretendemos dar mostras de como o modelo teórico MRP auxiliou-nos na análise sobre o modo como os alunos, ao trabalharem em grupos, alcançaram uma reflexão sobre os processos de pensamento implicados durante uma tarefa de resolver problemas. Ou seja, sobre como suas falas, acertos, dúvidas e angústias revelam uma tomada de consciência, em menor ou maior grau, para os vários grupos observados, daquilo que estavam fazendo para atingir os objetivos propostos na tarefa, já no primeiro ano de aplicação da metodologia, e como isto se consolidou para os alunos mais experientes com a mesma.

Entendemos que o modelo MRP, talvez, tenha sido concebido para analisar cada sujeito, individualmente, em seus processos cognitivos. Porém, a metodologia por nós utilizada previa o trabalho em grupos, justamente por acreditarmos que a comunicação intragrupal poderia estimular mais os processos metacognitivos individuais. Assim, optamos por aplicá-lo na análise de uma situação decorrida no ambiente natural de sala de aula, a fim de elucidar como o trabalho em grupos poderia contemplar as componentes previstas no modelo, para os indivíduos engajados na resolução de um problema, e como os processos superiores de pensamento (metacognição e auto-regulação) estiveram presentes, de modo a caracterizar a resolução como uma Tarefa Intelectualmente Exigente.

O ensino através da resolução de problemas e o desempenho dos alunos

Como comentado anteriormente, no episódio gravado com a 1ª série, os alunos mostraram maiores dificuldades em se engajarem imediatamente na resolução do

problema proposto (abaixo) e apresentaram maiores resistências iniciais ao tipo de atividade:

“Numa certa empresa, há dois tipos de despesas mensais: uma fixa, de R\$ 50.000,00 e outra variável, que depende da produção da firma e representa um quarto da arrecadação das vendas mensais. Sabendo-se que a arrecadação das vendas é igual às despesas mais o lucro obtido, montar uma relação entre vendas e lucros e esboçar o seu gráfico”.

De início, a professora tinha que pedir várias vezes para lerem e interpretarem o enunciado, ao passar pelos grupos, porque vários deles mostraram demora em anotar os dados e discutir sobre o problema. Depois de algum tempo, todos, sem exceção, estavam engajados na resolução, porém dois grupos (G2 e G7) mostraram grande dificuldade em desenvolver uma estratégia para identificar variáveis e suas relações, no problema:

[O grupo G2 conversa, tentando trocar idéias. Uma das alunas fala para o colega da frente]: “1/4 das despesas...Ai tá errado”. [O colega da frente]: “1/4 das despesas...” [O colega da frente havia escrito apenas “50.000” em sua folha de anotações. Depois escreve “1/4” na frente de “50.000”, sem saber por quê. Eles trocam dúvidas sobre o que seriam as despesas e continuam por longo tempo no mesmo ponto, sem alterar as anotações].

[O grupo G7 recebe auxílio da professora, após alguns minutos de tentativas de escrever algo sobre o problema, sem êxito. A professora lê novamente o enunciado com eles e vai perguntando o que significa cada informação. Quando se refere à despesa variável, ela completa]: “...tem uma outra [despesa]. Ela é variável e depende da produção, e representa $\frac{1}{4}$ da arrecadação das vendas mensais. E dependendo das vendas, como é que varia essa outra despesa? Do que ela depende?” [Aqui a professora tenta fazer com que alunos atribuam a idéia de variável para as vendas, mas um aluno responde apenas “1/4”. [Professora]: “1/4 de quê?... [pausa para esperar a resposta, **que não vem**]. [Professora] Da arrecadação das vendas mensais...então, o que for a variável do exercício, associem a alguma letra, traduzindo o enunciado de uma situação matemática”. [A professora lê novamente o enunciado completo, evitando dar a resposta aos alunos. Eles voltam a pensar sozinhos, enquanto ela vai atender outro grupo. O aluno que havia falado antes, escreve em seu caderno:

“R\$50.000”. Depois de pensar um pouco, escreve: “ $\frac{50.000}{x} = \dots$ ” [Pára, olha

para o caderno da outra colega, mas não trocam idéias. A colega da frente havia escrito]: “ $\frac{50000}{x} \times \frac{1}{4}$ ”. [Depois o menino escreve “50000. $\frac{1}{4}$ ” ao lado e

conclui que “ $1x = 200.000$ ”. O menino volta a escrever: “ $\frac{2}{\frac{1}{4}} = R\50.000 ”

(Note que o número “2” aparece simplesmente por ele ter a informação de que há dois tipos de despesa - o aluno tem necessidade de operar com todos os números que aparecem, sem exceção). “Ah tá! As despesas mensais não são 50.000?” [Continua lendo o enunciado, sem relacionar com as variáveis...]

Os trechos anteriores ilustram que a primeira dificuldade mostrada para esses dois grupos foi quanto à interpretação do enunciado do problema e à seleção de seus fins e de dados relevantes a serem destacados para compor relações que levassem a uma estratégia de solução (componentes (i) e (ii) do modelo MRP). Isto revela, para estes grupos, relativamente iniciantes com a metodologia, pouca familiaridade com os processos metacognitivos envolvidos na resolução do problema, bem como com a auto-regulação dos seus conhecimentos prévios, que poderiam ser acionados (componente (iii) do MRP).

A seqüência seguinte do diálogo do G7 ilustra bem a dificuldade deste grupo com a idéia de variável, a qual já havia sido detalhada em sala de aula, em outros problemas e pela sistematização da professora:

[Após escrever: " $\frac{2}{1} = R\$50.000$ " e reler o enunciado, o mesmo aluno

mencionado anteriormente, do G7, fala]: "Sei lá... As vendas são iguais. Esses dois tipos são iguais... E as vendas também". [A colega da frente pergunta se é " $\frac{1}{4}$ ".] "Não, porque... quer ver..." [não consegue explicar e apaga o que havia escrito. Depois escreveu]: " $50.000 + \frac{1}{4}$ ". [Uma aluna do

grupo pergunta para a outra:] "você lembra como é que faz aqui?" [Tenta recorrer a algum procedimento já conhecido, mas este tipo de problema não havia sido tratado em atividades anteriores. Finalmente, a colega responde]: "A gente tem que substituir, se a gente não sabe o... a... [encabulada com a câmera]. Tem que colocar x ou y para a gente conseguir achar o valor". [A pesquisadora pergunta ao grupo o que eles acham que é "variável", na tentativa de aproximá-los dessa idéia. A menina que estava com dúvidas antes, responde]: "É a mesma coisa que ela falou..." [Mas não dá maiores explicações. O outro garoto]: "Variável? ...É... Espera aí! Por exemplo, uma despesa vai ser R\$50.000, a variável, acho que ela não vai ser modificada, ela vai ser outra..." [A pesquisadora diz que não entendeu sua resposta]. "É assim, se uma despesa fixa mensal vai ser de 50.000, essa outra despesa vai variar, entendeu?" [A pesquisadora pergunta como representa uma coisa que vai ser variável]. Finalmente, a aluna que havia mencionado 'x' e 'y', anteriormente responde]: "Com letras! Tem que procurar quando a professora fala 'variável x', 'variável y'". [O aluno escreve]: " $2 = 50.000 = x$ " [e logo abaixo de 50.000, escreve 100.000, provavelmente multiplicando 2 x 50.000] A pesquisadora pergunta de onde vem esse '2'. "Vem de 'dois tipos de despesas mensais'". [Volta a escrever]: " $50.000 = \frac{1}{4}$ " [...]

Notamos, com esta seqüência, que o acesso a, e a auto-regulação dos conhecimentos prévios (componentes (iii) e (iv) do modelo MRP) sobre "variáveis" eram bastante precários para o grupo G7, enquanto outros grupos acionavam rapidamente estes conhecimentos. Mesmo após as tentativas da aluna que mencionou o uso de letras "x" e "y", o grupo não conseguiu incluir adequadamente esta informação em seus registros escritos e, no final deste excerto, aquele aluno com mais dificuldades abandona novamente a letra "x", que ainda não parecia fazer sentido para o grupo, naquele enunciado. Isto pode ser explicado, em parte, pela pouca experiência, neste momento, dos alunos da 1ª série com a resolução de

problemas. Embora não os apresentemos aqui⁵, nossos dados mostram que, na 2ª série, onde essa experiência era maior, a autonomia dos alunos para buscarem conhecimentos prévios mostrou-se bem maior.

Uma característica que permeou todos os grupos foi a dificuldade de trocas de informações entre seus componentes, evidenciando que a ação mental consciente de buscar outras experiências já vivenciadas (componente (iv) do modelo MRP) ainda era pouco acessada pelos alunos, no início de suas atividades envolvendo a Resolução de Problemas. Mesmo naqueles em que houve maiores discussões, geralmente as trocas eram feitas aos pares de alunos, sem perceberem a importância de uma socialização maior dos resultados alcançados, internamente ao grupo.

Observamos que em vários deles houve uma demora significativa para que os alunos chegassem a um modelo matemático que retratasse a situação de dependência entre os lucros obtidos e as vendas da empresa, relatados no problema, mostrando dificuldades nas ações e também com a regulação dos seus conhecimentos prévios (componentes (ii) e (iii)). Depois que alcançaram este nível de transcrição para a linguagem matemática simbólica, dois grupos tiveram dificuldades em efetivar o cálculo " $x - \frac{1}{4}x$ ", obtido ao se isolar uma das variáveis do problema ('x' foi, em geral, a variável escolhida para representar o montante de vendas, embora alguns grupos tenham usado letras como "a" para vendas e "L" para o lucro) (componente (ii) do MRP).

Finalmente, a segunda parte do problema, que pedia uma interpretação gráfica da situação de dependência entre as duas variáveis envolvidas, constituiu-se numa grande dificuldade para a maioria dos grupos, uma vez que o assunto "gráficos", ainda não havia sido detalhado previamente em classe. Anteriormente à situação-problema trabalhada, os alunos haviam tido apenas informações sobre o plano cartesiano, as coordenadas e a localização de pontos isolados no mesmo. Neste momento, observamos que vários alunos (seis, em grupos distintos) procuravam em suas anotações de classe, algum modelo que lhes permitisse prosseguir na atividade. Isto gerou certa frustração visível em suas faces, pois não encontravam "pistas" previamente discutidas, que os pudessem auxiliar. Dois alunos do G2 chegaram a desenhar um sistema de eixos ortogonais (olhando para suas últimas anotações sobre o plano cartesiano), mas a idéia de variável ainda lhes parecia ser precária, pois não conseguiam avançar atribuindo valores para uma, para verificar o que aconteceria com a outra e, eventualmente, montar uma tabela ou um gráfico. Isto se explica pela falta de experiências anteriores vivenciadas com este objeto matemático, mas mostra a tentativa de acionamento consciente da componente (iv) proposta por González, em seu modelo.

Neste momento, os tempos dos grupos, na resolução, eram totalmente diferentes. Enquanto alguns já faziam a tabela com valores correspondentes às

⁵ A apresentação dos dados da 2ª série alongaria em demasia este artigo. Para maiores detalhes, ver Reis & Zuffi (2007)

variáveis, outros dois ainda não haviam conseguido montar uma equação que expressasse a relação de dependência entre as duas variáveis que apareciam na interpretação da situação-problema (inclusive o G7 mencionado anteriormente). Porém, foi bastante gratificante observar que a aula fluía com o engajamento de todos os presentes, sem nenhuma exceção, na tentativa de resolver o problema, mesmo com as dificuldades mencionadas, o que mostra que a tarefa proposta efetivou-se como motivadora à ação, como uma TIE. A aula foi se aproximando do final e a professora começou a fornecer algumas informações mais diretas aos grupos que não conseguiram registrar algebricamente a relação envolvida no problema. Terminou o tempo e a professora pediu que os grupos permanecessem com seus registros, para continuarem a pensar no problema na aula seguinte.

No dia posterior, ela pediu que os grupos permanecessem com as mesmas configurações e que os alunos continuassem a discutir o problema por mais um tempo. A professora comentou que logo pediria para que cada grupo entregasse uma folha com os registros do que havia sido feito, para que pudessem socializar os resultados. Pediu que os alunos se empenhassem, então, no esboço do gráfico, mas o G7 ainda estava inerte, sem ter conseguido montar a equação relativa à função do problema.

[No início desta segunda aula, o registro de um aluno do G7 ainda constava de algo como: $2 = \frac{1}{50.000} = 50 / \frac{1}{4} = 700$ ". A pesquisadora pediu que tentassem explicar o que estavam pensando, mas esse aluno apagou seu registro e voltou a olhar suas anotações anteriores à situação-problema, como que na esperança de ter algum modelo que lhe inspirasse a resolução. A outra menina do grupo finalmente tomou a iniciativa e escreveu no caderno: $50.000 + \frac{1}{4}x$ ". Depois, ao lado, escreveu 50.000×4 " e embaixo disso, "200.000", perdendo o registro da letra "x" que, aparentemente, ainda não lhes fazia sentido como uma variável. Notamos, aqui, grande dificuldade de operacionalização algébrica para os dados que ela obteve no problema. O grupo não se comunicava. A pesquisadora tentou fazer-lhes perguntas que os aproximassem novamente da idéia de quais variáveis poderiam se relacionar com as informações do problema. Pediu que lessem o enunciado novamente e vissem como apareceu o 'x' que usaram, para o que, o aluno respondeu enfaticamente]: "Eu sou péssimo nisso!". [A pesquisadora perguntou por que, na tentativa de que ele identificasse o que não estava entendendo, ao que ele respondeu]: "Porque não entra na minha cabeça!"]].

Observamos, aqui, uma dificuldade deste aluno, que, consciente de suas lacunas para obter uma estratégia para a resolução do problema (componente (iii) do modelo MRP), simplesmente diz que não lhe entra na cabeça e acaba por abandonar, momentaneamente, a atividade. O grupo G7 mostrou ter sérias dificuldades com os registros, inclusive de compreender que a situação-problema exigia-lhe uma postura ativa, na busca do pensar demorada e criticamente, para poder sugerir estratégias compatíveis com o enunciado e com a pergunta do problema, mesmo após as "pistas" e perguntas induzidas pela professora. No entanto, a consciência do aluno para com suas lacunas sugere que ele já inicia uma

auto-regulação dos processos envolvidos na R.P., embora de forma ainda precária. Com o tempo, conforme se acumulem maiores experiências com a R.P., esperamos que essa auto-regulação se aperfeiçoe e estes alunos passem a esclarecer melhor os fins envolvidos em cada situação-problema, a mobilizar mais conhecimentos e ações com maior segurança, a buscar a memória de suas experiências anteriores com problemas similares e a ampliar suas concepções pessoais quanto à atividade matemática. A falta de comunicação entre os membros do G7 parece sugerir o quanto a troca de idéias para a resolução de problemas poderia melhorar a metacognição acerca dos processos aí envolvidos. Por outro lado, talvez a pouca experiência desses alunos com a auto-regulação de seus processos mentais, também se constituísse em obstáculos para uma melhor comunicação, o que parece revelar uma interdependência cíclica entre esses dois processos. Isto evidenciou, assim como outras manifestações isoladas de alguns alunos de outros grupos, uma certa resistência inicial para com a R.P., o que não ocorreu com nenhum aluno observado na 2ª série. Atribuímos, a este fato, motivos como a maior familiarização da série posterior, com a metodologia adotada e a criação de um hábito de resolver problemas, o que confirma as hipóteses de González, de que a prática repetida da resolução de problemas, como uma TIE, facilita o acionamento da metacognição, dos processos de auto-regulação das ações cognitivas e caracteriza-se como importante forma para o desenvolvimento de processos mentais superiores.

Na segunda metade da aula, a professora pediu para recolher um registro de cada grupo. Observamos que, mesmo neste momento, a comunicação intragrupos continuou precária. Cada aluno fazia o registro por si e os que tinham maiores dificuldades tentavam apenas copiar o que os outros membros escreviam, sem indagações. Isto evidencia uma falha no contrato didático (Brousseau, 1988) estabelecido, a qual ainda não fora totalmente solucionada para a 1ª série. Alguns alunos, talvez por não darem a devida importância ao trabalho em grupo, ou por apresentarem maiores deficiências com os processos desenvolvidos no modelo MRP, não percebiam a riqueza do ambiente de aprendizagem que os colegas ao lado poderiam lhes proporcionar, com a troca de idéias. Na 2ª série, isto não ocorreu com a mesma freqüência, embora, em certos grupos, a comunicação interna ainda fosse precária. O contrato didático em vigência também não previa nenhuma “penalidade” ou “perda” para os grupos com pouca interação. Também, o grande número de alunos nas salas não permitia que a professora conseguisse dar muito apoio a todos os grupos que apresentavam dificuldades no intercâmbio de idéias. Entretanto, vimos que os alunos mais experientes com a prática da R.P. já haviam se libertado da dependência da professora e conseguiam, com poucas aproximações da mesma, resolver intrincadas situações-problemas.

Finalmente, a professora comentou sobre os registros das resoluções de cada grupo, anotando-os na lousa. Alguns inverteram sinais das variáveis e os gráficos apareciam com crescimento contrário ao esperado. Surpreendentemente, sem que tivessem tido estudos prévios mais detalhados com o plano cartesiano, a não ser a localização de pontos esparsos, um grupo de alunas chegou a alterar a escala de valores obtidos (usando uma escala diferente para as abscissas e outra para as ordenadas), de maneira a facilitar a visualização da reta que representava a função.

A professora também comentou sobre o significado expresso no gráfico, para a relação entre o lucro e as vendas, no problema, e o que significava, no esboço, o lucro negativo (ou prejuízo). Observou, ainda, que não poderia haver vendas negativas, mas lucros, sim.

No dia seguinte, a professora pediu que eles respondessem, por escrito, se aquela situação-problema, ou “desafio”, lhes havia ajudado a compreender melhor o assunto “funções”. Das 30 (trinta) repostas entregues pela 1ª série, 20 (vinte) alunos expressaram alto grau de satisfação com a atividade, ressaltando pontos como: o “desafio” estimulou-os à atenção e ao esforço nos raciocínios (motivação e componente (iii) do modelo MRP); auxiliou-os na compreensão de outros problemas (auxílio para a construção de estratégias e compreensão dos processos envolvidos – auto-regulação da atividade realizada para experiências futuras – componente (iv)); também evidenciou que as “funções” podem ser aplicadas a situações práticas da vida das pessoas (aspecto utilitário da Matemática). Duas respostas, dentre esses vinte alunos, mostraram uma metacognição bastante ampliada sobre os propósitos da situação-problema e as vantagens destas para a socialização e para seu próprio aprendizado:

(A1:) “Os exercícios foram bem produtivos para a resolução de outros que exigiam também um pouco mais de raciocínio e, principalmente, para visualizar em quê a matéria pode ser aplicada no dia-a-dia” [mostra consciência de que era preciso grande esforço para alcançar resultados, neste tipo de atividade, compreensão para sua realidade pessoal e indícios de que vislumbra possibilidades de generalizar os conhecimentos adquiridos com a atividade (componentes (iii) e (iv))].

(A2:) “A resolução dos problemas nos fez enxergar as funções sendo postas como úteis em situações cotidianas. Acredito que, como início de matéria [percebeu que se tratava de conhecimento novo envolvido] ajudou-nos na compreensão da mesma, estimulando também o raciocínio lógico e o raciocínio grupal” [percebeu que alguma estratégia geral de resolução estava sendo formada a partir daquele problema e que a comunicação dentro do grupo também era importante para isso – presença das componentes (iii) e (iv) do M.R.P].

Oito alunos, em suas respostas espontâneas, evidenciaram pouco aproveitamento da situação-problema, tanto no que diz respeito à ampliação de seus conhecimentos globais, quanto à maior compreensão sobre as “funções”. E ainda, dois alunos forneceram respostas ambíguas. Estes números parecem evidenciar que a metodologia utilizada causou um impacto significativo nesta sala de aula, apesar de todas as resistências e dificuldades mencionadas anteriormente.

A professora relatou-nos que, mesmo nas ocasiões em que a pesquisadora não estava presente, o engajamento da turma da 1ª série, na resolução de problemas, era equivalente ao observado no episódio aqui descrito. Para a 2ª série, os relatos da professora confirmam também os dados que obtivemos com as filmagens, mostrando que a experiência prévia que estes alunos tiveram com a

metodologia adotada, no primeiro ano, fizera-lhes, gradativamente, desenvolver maiores habilidades auto-reguladoras e uma postura mais autônoma na busca por novos conhecimentos. O mesmo foi relatado para alunos da 3ª série, porém não fizemos filmagens nesta sala.

Considerações Finais

Neste artigo, apresentamos várias referências a pesquisas que envolvem a temática “Resolução de Problemas”, sob diferentes enfoques, em nível mundial. Porém, como uma proposta metodológica relativamente contínua, para se ensinar e aprender matemática com mais compreensão, ela muito pouco se apresenta em salas de aula, principalmente no Brasil.

Os dados aqui trazidos, tanto para os alunos como para a professora envolvida, mostram que não é uma tarefa simples mudar a tradição dos processos de ensino-aprendizagem de Matemática. Esses processos são, em geral, pautados pela reprodução de algoritmos, regras, enunciados e técnicas de resolver problemas. Geralmente, estes últimos estão desconectados da geração de significados mais amplos, do levantamento de hipóteses e conjecturas, de processos de generalização, ou de tentativas de melhoria da comunicação de idéias do mundo que nos cerca, que façam uso da linguagem matemática como uma forma de compreendê-lo.

Mostramos que a implantação da metodologia de ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas, de maneira continuada, nessa escola pública, trouxe fortes indícios de que é possível explorar tal metodologia com êxito, no ambiente natural da sala de aula, com todas as adversidades e facilidades que possamos aí encontrar. Os episódios aqui descritos levam-nos a afirmar que os alunos, embora tenham apresentado dificuldades iniciais com a “nova” metodologia, tiveram um envolvimento com sua própria aprendizagem muito superior àqueles de séries equivalentes, na mesma escola. Além de terem evidenciado grande participação e motivação, ao irem se familiarizando com essa forma de trabalho, os alunos ampliaram seus conhecimentos de Matemática de forma significativa (segundo os depoimentos da professora Isa, de pais (Zuffi, Barreiro & Mascarenhas, 2003) e segundo as avaliações comparativas realizadas durante o projeto). Vimos, durante as filmagens e em observações posteriores, com a continuidade da metodologia de ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas nas séries seguintes, que foram capazes de levantar discussões de alto nível de sofisticação.

Nosso objetivo não era “ensinar **sobre** a resolução de problemas”, mas **através** dela. Mesmo que não tenhamos trabalhado explicitamente as quatro componentes propostas no modelo MRP, de González, os alunos foram capazes de criar, por si mesmos e com a ajuda da professora, estratégias gerais para isto, desenvolvendo importantes aspectos metacognitivos, que favoreciam as generalizações, ainda que, de início, isto ocorresse com certa precariedade.

Melhoraram, gradativamente, a identificação dos objetivos envolvidos nas situações-problemas (componente (i)), buscaram heurísticas de problemas já solucionados e conceitos prévios, em sua memória de conhecimentos (componentes (iii) e (iv)), executaram ações (algoritmos, operações aritméticas e algébricas – componente (ii)), ao traduzirem as situações para a linguagem matemática e, por fim, evidenciaram relativa consciência (metacognição) dos processos exigidos durante a resolução. Desse modo, acreditamos que o modelo MRP, embora não aplicado para uma análise individual dos comportamentos cognitivos dos sujeitos investigados, mostrou-se relevante para caracterizarmos o quanto as tarefas propostas foram significativas para os alunos e se aproximaram de TIE's, de modo a conduzi-los a processos superiores de pensamento.

É claro que nem todos os grupos e/ou alunos alcançaram o mesmo nível de compreensão, em todas as situações exploradas, e alguns, em seu primeiro ano de trabalho com a “nova” metodologia, mostraram certas resistências e dificuldades para com a mesma. Porém, acreditamos que a continuidade de seu uso e a regularidade com que ela foi trabalhada, em cada aula introdutória de novos assuntos, trouxeram amadurecimento cognitivo (e metacognitivo) para uma parte significativa dos alunos.

Vemos que o contrato didático (Brousseau, 1988), nestas salas de aula, foi profundamente alterado em relação ao que elas apresentavam antes. As inter-relações entre alunos e a professora mudaram, porque os primeiros tiveram que aceitá-la, agora, como mediadora na busca pelo saber, e não mais como repositório de informações e respostas prontas, e passaram a explorar mais seus processos de “aprender a aprender”.

Se levamos em conta a reconceptualização, proposta pelas Ciências Cognitivas, da aprendizagem como um processo de construção de conhecimentos e não de mera aquisição dos mesmos, os esforços para entender como a resolução de problemas pode interferir cognitivamente nessa construção ainda se fazem totalmente válidos e oportunos. Esperamos que esta pesquisa tenha contribuído para elucidar um pouco mais sobre como as práticas dos alunos, durante a resolução de problemas, podem evoluir, se esta for proposta de maneira contínua, e se o professor estiver consciente das componentes e dos processos metacognitivos nela envolvidos.

Bibliografía

- J. Aguilar (1994). Algunas contribuciones de la teoría cognitiva a la educación. Tecnología y Comunicación Educativas, p. 24, 69-81.
- N.S.G. Allevato (2005). Associando o computador à Resolução de Problemas fechados: análise de uma experiência. Rio Claro, SP: IGCE – UNESP, (tese de doutorado).

- E.V. Alves (2004): Habilidades matemáticas: a percepção generalizada de um tipo de problema. Anais do VIII ENEM – Comunicação Científica- GT3- Educação Matemática no Ensino Médio (publicação em CD-ROM).
- E.Q. Azevedo (2002): Ensino-aprendizagem de equações algébricas através da resolução de problemas. Rio Claro, SP: IGCE – UNESP, (dissertação de mestrado).
- W. J. Bolzan (2003). A Matemática nos cursos profissionalizantes de Mecânica. Rio Claro, SP: IGCE – UNESP, (dissertação de mestrado).
- G. Brousseau (1988): Le Contrat Didactique: le milieu, Recherches en Didactique des Mathématiques, vol.9, n.3, p.309-336.
- L.D. English (1998). Children's problem posing, within formal and informal contexts. Journal for research in Mathematics Education, v. 29, 1, p. 83 – 106.
- F.E. González (1998): Metacognición y tareas intelectualmente exigentes: el caso de la resolución de problemas matemáticos. Zetetiké, CEMPEM-FE/UNICAMP, v.6, n.9, p. 59-87.
- F.E. González (2005): Tendencias de investigación en resolución de problemas matemáticos en Latinoamérica. Revista Educação em Questão, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, Brasil, v.24, n.10, p. 29-67.
- R.R. Huaman (2006). A resolução de problemas no processo ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática na e além da sala de aula. Rio Claro, SP: IGCE – UNESP (dissertação de mestrado).
- S. Krulik, R. Reys (orgs.) (1997): A resolução de problemas na matemática escolar.
- Trad. Hygino H. Domingues e Olga Corbo. S. Paulo: Atual.
- V.A. Krutetskii (1976): The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren. Chicago: The University of Chicago Press.
- M.J. Lawson, M.Chinnappan (2000): Knowledge connectedness in geometry problem solving. Journal for Research in Mathematics Education. Vol.31, no. 1, p. 26-43.
- N.J. Machado (1996) Epistemologia e Didática. São Paulo: Cortez.
- K.M. Medeiros (2001): O contrato didático e a resolução de problemas em sala de aula. Educação Matemática em Revista. Ano 8 – no.9/10, p.32-39.
- P.R. Oliveira (2000): Currículo e resolução de problemas em matemática: analisando relações. S. Paulo: USP (dissertação de mestrado).
- L.R. Onuchic (1999) Ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. In: Bicudo, M.A.V. (org.). Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas. São Paulo: Editora UNESP.
- L.R. Onuchic & N.S.G. Allevato (2005). Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. In Bicudo, M.A.V. & Borba, M.C. (orgs.). Educação Matemática: pesquisa em movimento. S. Paulo: Cortez.
- W. Paulette (2003): Novo enfoque da disciplina matemática e suas aplicações, no curso de administração de empresas da Universidade Paulista – UNIP. Rio Claro, SP: IGCE -UNESP. (tese de doutorado)
- M. Pereira (2004). O ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas no terceiro ciclo do Ensino Fundamental. Rio Claro, SP: IGCE – UNESP, (dissertação de mestrado).
- M. Pironel (2002): A avaliação integrada no processo de ensino-aprendizagem da Matemática. Rio Claro, SP: IGCE – UNESP, (dissertação de mestrado).

- M.M.V. Reis & E.M. Zuffi. (2007- pré-print). Estudo de um Caso de Implantação da Metodologia de Resolução de Problemas no Ensino Médio. BOLEMA: Rio Claro, SP (artigo aceito para publicação).
- M.C. Utsumi (2000): Atitudes e habilidades envolvidas na solução de problemas algébricos: um estudo sobre o gênero, a estabilidade das atitudes e alguns componentes da habilidade matemática. Campinas, SP: FE – UNICAMP. (tese de doutorado).
- W. Van Dooren; L. Verschaffel, P. Onghena (2002): The impact of preservice teachers' content knowledge on their evaluation of students' strategies for solving arithmetic and algebra word problems. Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 33, no.5, p. 319-351.
- E.M. Zuffi; A.C.M. Barreiro, Y.P. Mascarenhas (2003): Desenvolvimento e avaliação de uma pedagogia universitária participativa no Ensino Médio: atividades com ênfase em matemática, ciências e comunicação. Anais do XI CIAEM (CD-ROM), Blumenau, SC.

Edna Maura Zuffi. Professora Doutora do Departamento de Matemática do Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC, da Universidade de São Paulo - USP, em São Carlos, Brasil.

edna@icmc.usp.br

Lourdes de la Rosa Onuchic. Professora Doutora Aposentada do ICMC, USP - São Carlos e Pesquisadora do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática do Departamento de Matemática do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista, Brasil.

lonuchic@vivax.com.br