UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2007, Número 12, páginas 143-149
ISSN: 1815-0640

El rincón de los problemas

Uldarico Malaspina Jurado

Pontificia Universidad Católica del Perú
umalasp@pucp.edu.pe

Problema[1]

Decimos que un polígono formado únicamente pegando fichas cuadradas de lado 1 es incaico si todos sus lados tienen longitud 1. Demostrar que para todo entero N $\geq$ 11, se puede construir un polígono incaico formado con N fichas de lado 1.

Este es un problema de carácter lúdico, que es natural comenzar a resolverlo constructivamente. Puede usarse muy bien para aclarar algunos conceptos relacionados con el manejo de definiciones, con el concepto de polígono, los conjuntos infinitos numerables, las sucesiones y las demostraciones inductivas. Una manera de explotar sus potencialidades es –como lo hicimos en un taller con profesores– presentándolo por partes, a partir de una situación descrita y proponiendo actividades grupales con dificultades crecientes, como se muestra a continuación:

Situación:

Cada casilla de la siguiente cuadrícula es de lado 1. Los polígonos que se forman sombreando casillas de la cuadrícula, con la característica de tener todos sus lados de longitud 1, reciben el nombre de polígonos *incaicos*.

(Se presenta una hoja con una cuadrícula de unos 20 por 22 cuadraditos, asumiendo cada cuadradito de lado 1)

Actividades grupales (grupos de tres o cuatro participantes)

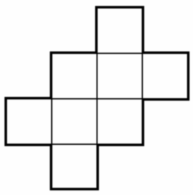
a. Construir cuatro polígonos incaicos y tres no incaicos.
b. Construir seis polígonos incaicos sombreando 11, 12, 13, 14, 15 y 16 casillas respectivamente.
c. Examinar rigurosamente si existen infinitos polígonos incaicos.
d. Demostrar que para todo entero *N* $\geq$ 11, se puede construir un polígono incaico sombreando *N* casillas.

[1] Problema creado por los ex olímpicos peruanos J. Tipe, C. Espinoza, S. Vera y J. Cuya, especialmente para considerarlo en la prueba de la fase final de la olimpiada nacional escolar de matemáticas en el Perú, en el 2007.

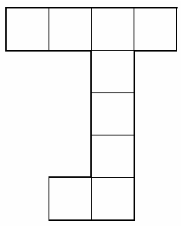
Comentarios

1. La actividad *a* permite familiarizarse con una definición nueva, como tienen que hacerlo nuestros alumnos cuando les damos una definición de álgebra, aritmética, geometría u otra materia, en el desarrollo de un curso de sus estudios. En matemáticas es muy importante reconocer elementos que cumplen y elementos que no cumplen una definición dada. Esta actividad inicial y las siguientes, también brindan la oportunidad de reflexionar sobre la definición de polígono y de trabajar lúdica y constructivamente con polígonos no convexos.

   A continuación mostramos un polígono incaico y uno no incaico:



Polígono incaico de 8 cuadraditos



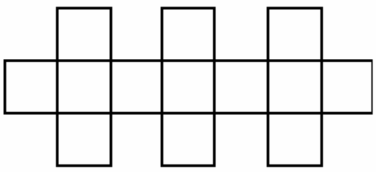
Polígono no incaico de 9 cuadraditos

   Surge de manera natural la pregunta sobre la existencia o no de un polígono incaico de dos cuadraditos. La respuesta negativa conlleva recordar que en un polígono –convexo o no– cada vértice debe pertenecer sólo a dos lados del polígono.

2. Las actividades pedidas en *b* estimulan la creatividad constructiva, con el manejo adecuado de la definición dada de polígono incaico. Es una excelente ocasión para comentar también sobre afirmaciones de existencia y unicidad, que tanto se usan en las matemáticas, y paralelamente hablar de ejemplos y contraejemplos. Así, puede examinarse la verdad o falsedad de la proposición

   Existe un polígono incaico de 13 cuadraditos

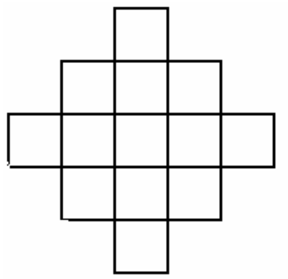
   Una manera correcta de demostrar que tal proposición es verdadera, es exhibiendo uno de tales polígonos, como el siguiente:



Y luego examinar la verdad o falsedad de la siguiente proposición:

Existe un único polígono incaico de 13 cuadraditos

Una manera correcta de demostrar que tal proposición es falsa, es mostrando un contraejemplo; es decir, exhibiendo un polígono incaico de 13 cuadraditos, que sea diferente al polígono anteriormente mostrado; por ejemplo el siguiente:

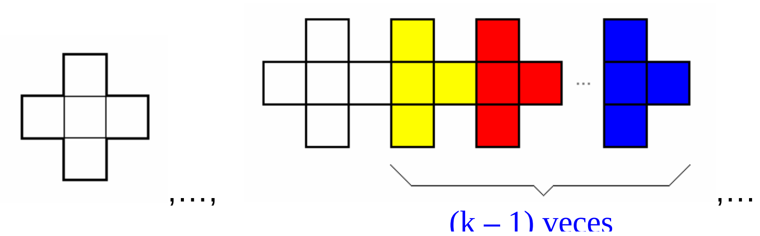


Pueden suscitarse discusiones interesantes con preguntas relacionadas a las actividades pedidas, como

¿Existen polígonos incaicos de 6, de 7, de 9, de 10 cuadraditos?

3. La actividad c permite reflexionar sobre los conjuntos infinitos numerables. En nuestra experiencia didáctica, hemos tenido casos en los que algunos participantes pensaron de primera intención que al no existir polígonos incaicos con dos cuadraditos, ya no se puede afirmar que haya infinitos polígonos incaicos. Estas apreciaciones iniciales se aclararon rápidamente recordando, por ejemplo, que hay infinitos números naturales mayores que 3 y que entre ellos no están el 2 ni el 1.

Para demostrar que existen infinitos polígonos incaicos, bastará mostrar una manera de construirlos, como una sucesión de elementos que respondan a un determinado patrón de construcción; por ejemplo



En esta sucesión, el primer elemento es un polígono incaico de 5 cuadraditos (podemos llamarlo "cruz básica") y los siguientes se construyen pegando al anterior una T horizontal de 4 cuadraditos, como la amarilla, la roja y la azul, de la forma en que se ilustra en la figura.

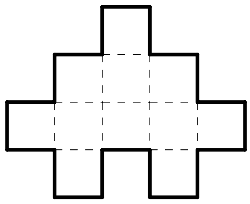
Así, el segundo término de la sucesión es un polígono incaico de 5 + 4 cuadraditos (imaginar sólo la cruz básica con la T amarilla); el tercer término de la sucesión es de 5 + 8 cuadraditos (la cruz básica con las T amarilla y roja); y en general, el término k-ésimo de la sucesión es un polígono incaico de 5 + 4 (k – 1) cuadraditos.

Ciertamente, hay otras sucesiones de polígonos incaicos, y es interesante encontrar varias de ellas.

4. Las actividades *a, b,* y *c* desarrolladas, permiten afrontar con naturalidad y facilidad la actividad *d*, que es el problema original. A continuación escribimos en detalle una demostración:

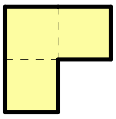
Por facilidad para la exposición, volvemos al enunciado original del problema, considerando fichas cuadradas de lado 1, en lugar de cuadraditos unitarios de una cuadrícula.

Vemos que se puede formar un polígono incaico usando 11 fichas:

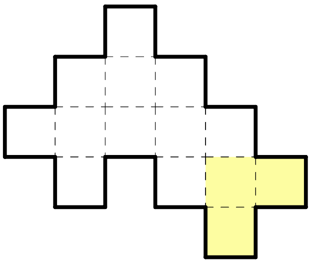


$N = 11$

Si colocamos adecuadamente la siguiente pieza (que llamaremos *triminó*):

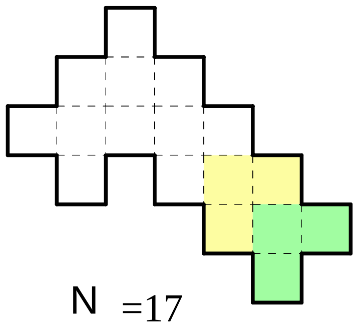


podemos conseguir un polígono incaico formado por 14 fichas:



$N = 14$

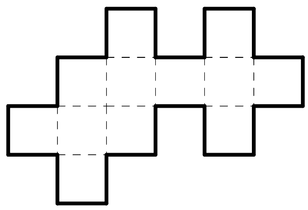
Si seguimos colocando triminós en la parte inferior derecha del polígono incaico conseguiremos otros formados por 17, 20, 23, 26,... fichas:



N $=17$

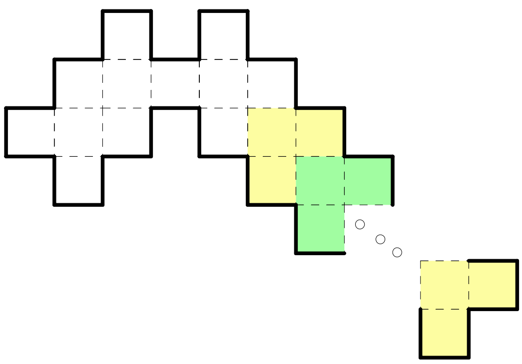
En general, si colocamos k triminós en la forma indicada $(k \geq 1)$ podemos conseguir un polígono incaico formado por 11+3k fichas. Es decir, hemos resuelto el problema cuando *N* es de la forma 11 + 3k, con k entero no negativo.

De forma similar, vemos que es posible formar un polígono incaico con 12 fichas:



N $=12$

Colocamos triminós de la misma forma que en el caso anterior:



N $=12+3k$

Así podemos construir polígonos incaicos formados por 12, 15, 18, 21, ... fichas.

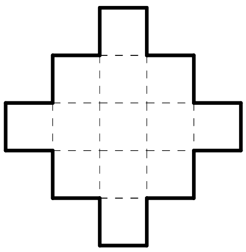
En general, si colocamos k triminós en la forma indicada ($k \geq 1$) podemos conseguir un polígono incaico formado por 12+3k fichas.

Así queda resuelto el problema cuando N es de la forma 12 + 3k, con k entero no negativo. En este caso, siendo 12 múltiplo de 3, podemos decir más sencillamente que el problema queda resuelto cuando N $\geq$ 11 y es múltiplo de 3.

Observemos que 11 es 12 – 1; es decir, un múltiplo de 3, menos 1. Entonces todos los números de la forma 11 + 3k , con k entero no negativo, son múltiplos de 3 mayores que 11 a los que se les ha restado 1.

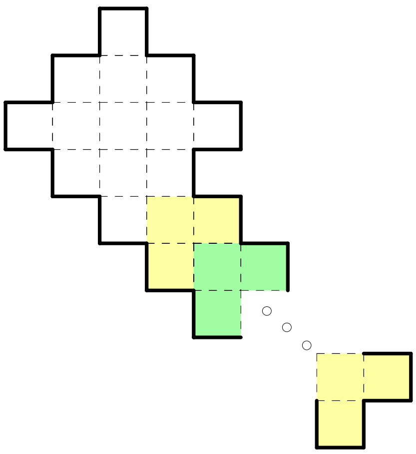
Como todos los números enteros mayores o iguales que 11 pueden expresarse como múltiplos de 3, menos 1; como múltiplos de 3; o como múltiplos de 3, más 1, sólo nos resta analizar este último caso y el problema queda resuelto.

Ya vimos el ejemplo para N =13:



N =13

Colocando triminós como en los casos anteriores, conseguimos polígonos incaicos formados por 16, 19, 22, 25, ... fichas



N =13+3k

Observemos que 13 es 12 + 1; es decir, un múltiplo de 3, más 1. Entonces todos los números de la forma 13 + 3k , con k entero no negativo, son múltiplos de 3 mayores que 11 a los que se les ha sumado 1.

En resumen:

Observemos que cualquier número entero $N \geq 11$ necesariamente es un número de uno de los siguientes conjuntos:

$$\{11, 14, 17, \ldots\} = \{N \in Z \ / \ N = 3p - 1,\ p \in Z, \quad p \geq 4\}$$
$$\{12, 15, 18, \ldots\} = \{N \in Z \ / \ N = 3p,\ p \in Z, \quad p \geq 4\}$$
$$\{13, 16, 19, \ldots\} = \{N \in Z \ / \ N = 3p + 1,\ p \in Z, \quad p \geq 4\}$$

Como para cada uno de estos tres conjuntos hemos mostrado cómo se puede construir un polígono incaico, queda demostrado que para cada entero $N \geq 11$ se puede formar un polígono incaico con N fichas.

El lector queda invitado a pensar en problemas a partir de la situación presentada; por ejemplo considerando áreas de los polígonos incaicos o construcciones de estos con palitos de fósforos.