UNIÓN REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Historia

Diciembre de 2007, Número 12 páginas 115-134
ISSN: 1815-0640

Coordinador: Wagner Rodrigues Valente

La cicloide: un recorrido histórico por sus propiedades[1]

Domingo Hernández Abreu [2]

La cicloide: primeras propiedades, primeras disputas

La curva cicloide ha sido considerada durante mucho tiempo una curva muy especial, tanto por sus fascinantes propiedades como por las disputas científicas que promovió principalmente a lo largo del siglo XVII. Tal es así que es conocida en la literatura como **la Helena de la Geometría** o **la Helena de las curvas**. Este sobrenombre le fue otorgado muy probablemente en honor a Helena de Troya, en relación bien con la belleza de ésta, bien con las disputas que ésta causó en vida. Según la mitología griega, Helena de Troya (esposa de Menelao, rey de Esparta) fue raptada por Paris (hijo menor de Príamo, rey de Troya), dando pie así a la famosa guerra de Troya, narrada en la "*Ilíada"* de Homero.

En la actualidad la curva cicloide resulta de poca relevancia matemática frente a otro tipo de curvas trascendentes como pueden ser las curvas trigonométricas, exponenciales, logarítmicas o hiperbólicas. No obstante, pocas curvas en la historia han jugado un papel tan decisivo en el asentamiento de las bases de una rama de las matemáticas como en el caso de la curva cicloide y el origen y evolución del cálculo infinitesimal. Hasta la fecha, este hito tal vez sólo sea comparable al estudio de las curvas elípticas en conexión con el desarrollo de la geometría algebraica y la demostración del célebre teorema de Fermat a finales del siglo XX.

La curva cicloide se define como el lugar geométrico de un punto fijo de una circunferencia que gira sin deslizamiento a lo largo de una recta. Siendo α el

[1] Dedicado a D. José Luis Montesinos Sirera en agradecimiento por fomentar en mí la pasión por las matemáticas por medio de esta maravillosa curva que nos ocupa.

[2] domingo.ha@gmail.com

desplazamiento angular de una circunferencia de radio R, se obtienen las ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x &= R(\alpha - sen\alpha) \\ y &= R(1 - cos\alpha) \end{cases}$$

La aparición de la curva cicloide por primera vez en la escena matemática no tiene una fecha clara. Debemos notar que esta curva no había sido considerada previamente por los matemáticos de la Grecia Clásica. Parece ser que el filósofo y teólogo francés Charles de Bouvelles (1471-1553) fue pionero en trabajar con la curva cicloide, orientando sus estudios sobre dicha curva en relación con el problema de la cuadratura del círculo [Sch]. En 1501, tratando de resolver este problema, introdujo además la hipotrocoide, esto es, la curva trazada por un punto P de un círculo que gira sin deslizamiento dentro de otro círculo fijo [ver I-Pro]. Considerando estas curvas fue capaz de dar una interpretación mecánica de la cuadratura del círculo. Influenciado por la geometría pitagórica, es autor de la primera obra científica impresa en Francia (*"Géométrie en françoys",* 1511).

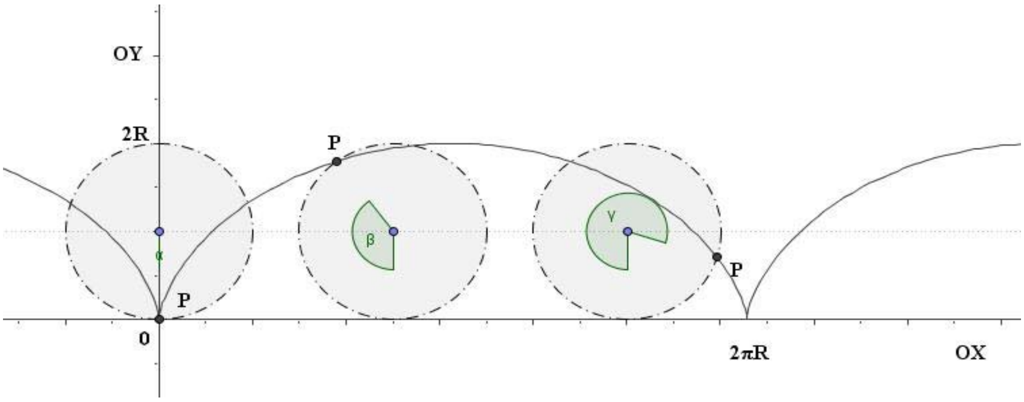

Figura 1: Generación de la cicloide por el giro de una circunferencia a lo largo de una recta.

La aparición en 1544 en Basilea de la primera traducción de las obras completas de Arquímedes (287-212 a.C.) provocaron una inspiradora influencia en científicos de la talla de Johannes Kepler (1571-1630) y Galileo Galilei (1564-1642).

En particular, el método de exhausción[3], que el propio Arquímedes atribuye a Eudoxo de Cnido (390-338 a.C.), había permitido al primero obtener demostraciones rigurosas de muchos resultados relacionados con fórmulas de cuadratura y cubatura. El nivel de rigor matemático y deducción lógica presente en las argumentaciones de Arquímedes no volvería a hacer presencia en la escena matemática hasta dos milenios después con motivo de la crisis de fundamentos a finales del siglo XIX. Hay que mencionar que los resultados obtenidos por Arquímedes resultaban tan fascinantes a priori[4], que muchos investigadores eran de la opinión de que éste debía poseer algún *método* que le permitía intuir tales resultados antes de demostrarlos rigurosamente por la vía geométrica.

El misterio que envolvía al modo de proceder de Arquímedes para intuir sus resultados sería finalmente resuelto a principios del siglo XX al descubrirse, por casualidad, un pergamino conteniendo un escrito de Arquímedes dirigido a Eratóstenes (276-194 a. C.) en el que describe su método. En *"El Método"*[5] Arquímedes hace uso de las primeras consideraciones de tipo infinitesimal, al considerar un área como suma de segmentos. Aunque Arquímedes es consciente de que estos procedimientos carecen de rigor, este modo de proceder no reaparecería hasta el siglo XVII. Por este motivo, muchos historiadores consideran que el cálculo infinitesimal habría hecho aparición mucho antes en la historia de no ser por el extravío del método de Arquímedes [Dur1, p. 25-26].

Alrededor de 1599, Galileo acuña el término *cicloide* para la curva que nos ocupa y se encarga de estudiar por primera vez el área que encierra un arco de

[3] Tal como se recoge en la Proposición 1 del libro X de los "*Elementos*" de Euclides [Euc, Tomo 3, p.12] el método de exhausción indica que: *Dadas dos magnitudes desiguales, si se quita de la mayor una (magnitud) mayor que su mitad y, de la que queda, una magnitud mayor que su mitad y así sucesivamente, quedará una magnitud que será menor que la magnitud menor dada.*

[4] G.H. Hardy (1877-1947) muestra su fascinación por la geometría griega en [Har, p. 82] con la célebre frase "*Arquímedes será recordado cuando Esquilo haya sido olvidado, porque las lenguas mueren pero las ideas matemáticas no".*

[5] El libro de Arquímedes "*El Método"* fue recuperado casualmente en el año 1906 en la iglesia del Santo Sepulcro de Jerusalén en Constantinopla por el investigador danés L. Heiberg. El libro, que fue encontrado junto a otras obras de Arquímedes, formaba parte de un palimpsesto, o pergamino, del siglo X que había sido *reciclado* para contener escritos de carácter religioso.

dicha curva en base a consideraciones de carácter mecánico. En particular, Galileo efectuó la comparación entre el peso de dos figuras, hechas de idéntico material, para la región que encierra un arco de cicloide y la región circular de la circunferencia que genera a la cicloide, habiendo hallado que los pesos correspondientes se encontraban en una razón aproximada de 3 a 1, pero decidió que no debía ser exactamente 3, ya que intuía (erróneamente) que dicha razón no debía ser un número racional. En carta fechada el 24 de febrero de 1640, Galileo escribe a Bonaventura Cavalieri (1598-1647), a quien se atribuye el famoso *método de indivisibles* para el cálculo de áreas y volúmenes, admirando la elegancia de la curva cicloide y proponiéndola como modelo ideal para soportar los arcos de un puente [Str, p. 232]:

> "Hace más de 50 años esta línea curva vino a mi mente y quise describirla, admirándola por su graciosa curvatura, adaptable a los arcos de un puente. Hice varios cálculos relacionados con ella y con el espacio comprendido entre ella y su cuerda, para demostrar algún resultado. Al principio parecía que tal espacio podría ser tres veces el círculo que la describe, pero no era así."

En el primer cuarto del siglo XVII, el monje francés Marin Mersenne (1588-1648) había establecido la igualdad entre la longitud de la circunferencia generatriz y la base de un arco de cicloide. Mersenne mantenía correspondencia habitual con matemáticos como Pierre de Fermat (1601-1665) y Galileo, entre otros, y contribuyó en la difusión de las novedosas ideas de René Descartes (1596-1650). A partir de 1623, Mersenne organizó reuniones matemáticas semanales en París creando así un excelente ambiente de investigación matemática. Hacia 1628, Gilles Personne de Roberval (1602-1675) llega a París e ingresa en la academia de Mersenne, quien rápidamente reconoce el talento de Roberval y le propone estudiar la cicloide como elemento de prueba para los recientes métodos que trataban con cantidades infinitesimales. Pronto se convertiría la cicloide en una de las curvas más estudiadas provocando agrias disputas entre diversos matemáticos, justificando así el sobrenombre de "Helena de los geómetras" [Struik, p. 232].

Hacia 1632, Roberval había obtenido un método similar al método de los indivisibles de Cavalieri que aparece en su obra “*Traité des indivisibles”* (que data de 1634 aunque no se publicó hasta 1693). Roberval, que fue uno de los pocos matemáticos profesionales del siglo XVII, ocupó desde 1632 hasta su muerte la cátedra Ramus en el Collège Royal de París y al parecer prefirió no hacer públicos su métodos para conservar dicha cátedra. Por esta razón, se vio envuelto en diversas polémicas relacionadas con la autoría de varios resultados matemáticos. En particular, en 1634, logró calcular el área encerrada por un arco de cicloide usando su método de indivisibles, hallando que en efecto el área encerrada por un arco de cicloide era igual al triple del área del círculo que genera la cicloide. El método seguido por Roberval para hallar el área encerrada por un arco de cicloide puede encontrarse en [Kli, Tomo 1, p. 463]. La no publicación de estos resultados le involucraría posteriormente en una desagradable disputa con Evangelista Torricelli (1608-1647) en relación con la prioridad en la justificación de tal propiedad.

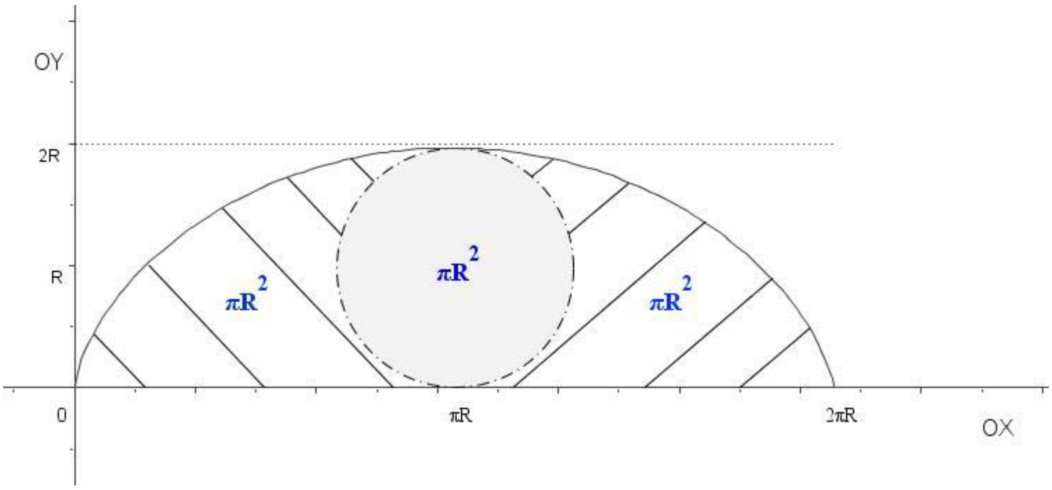

Figura 2: Área encerrada entre un arco de cicloide y su cuerda.

En la misma época, Descartes, Fermat y Roberval habían resuelto el problema de determinar la recta tangente a un arco de cicloide, siendo el método de tangentes de Fermat un claro precursor del actual cálculo de tangentes basado en el cálculo diferencial [GU, Cap. 3]. Así en 1638, Mersenne comunicó a Galileo tanto la resolución de la cuadratura de la cicloide como la determinación de la tangente en los puntos de la curva. Debido a su avanzada edad, Galileo deja estos resultados en manos de su discípulo Torricelli, quien, sobre 1641, establecería sus propias demostraciones de estos resultados. En el año 1644, Torricelli publica como apéndice de su obra *"De parabole"* tanto la cuadratura como el cálculo de la tangente de la cicloide, sin citar los métodos de Roberval. Aunque no parece haber dudas de que Torricelli llegó al mismo resultado de forma independiente, la controversia sobre la primicia de la solución se prolongó hasta su muerte [Dur1, p. 258].

En 1637, a la temprana edad de 14 años, el joven Blaise Pascal (1623-1662) comienza a asistir con asiduidad a las reuniones organizadas por Mersenne en París. Influenciado por los trabajos de Girard Desargues (1591-1661), los primeros trabajos matemáticos de Pascal guardarían relación con el estudio de las cónicas y la geometría proyectiva. Posteriormente, establecería junto a Fermat las bases para una teoría de la probabilidad. Aunque durante un tiempo renunció a las matemáticas, tras sufrir un serio empeoramiento de su salud en 1658 renueva su interés por las matemáticas dedicando parte de su atención a la curva cicloide en los últimos cuatro años de su corta vida.

Tras obtener nuevos resultados relacionados con la curva cicloide, Pascal decide convocar un concurso, bajo el pseudónimo de Amos de Dettonville, en el que se debían responder cuestiones relacionadas con el centro de gravedad de la región plana encerrada por la cicloide y así como con el volumen y área lateral de los sólidos obtenidos por revolución de dicha curva respecto a un eje [Kli, Tomo 1, p. 466]. Las relaciones que ligan el centro de gravedad de una región plana con el volumen y área lateral del sólido de revolución que genera dicha región se conocen como Teoremas de Guldin[6]. Estas relaciones, que ya aparecían en las obras de Pappus de Alejandría en el siglo IV, habían sido redescubiertas por Cavalieri haciendo uso de su método de indivisibles, pero sus métodos poco rigurosos fueron

[6] Los teoremas de Guldin indican que *"la superficie encerrada por una curva al girar alrededor de un eje que no la corta, equivale al producto de la longitud de dicha curva por la longitud de la circunferencia que describe su centro de gravedad"* y que *"el volumen del sólido generado por una región plana al girar alrededor de un eje que no la corta, equivale al producto del área de dicha región plana por la longitud de la circunferencia que describe su centro de gravedad".*

duramente criticados por el matemático y astrónomo suizo Paul Guldin (1577-1643), a pesar de que este último tampoco fue capaz de justificar rigurosamente tales métodos. Paradójicamente, en la actualidad estos resultados llevan el nombre de Guldin y no el de Cavalieri o de Pappus [Dur1, p. 117].

Retomando el concurso de Pascal, sólo dos propuestas de solución por parte de John Wallis (1616-1703) y Antoine de Lalouvère (1600-1664) llegaron en el periodo por el que fue convocado el concurso (junio de 1658 – octubre de 1658), aunque ninguna de ellas fue del agrado de Pascal y Roberval, jueces del concurso. Así pues, pese a las protestas de Wallis, el premio fue declarado desierto y la resolución definitiva de las cuestiones planteadas por Pascal tuvo que esperar a la aparición de la obra *"Histoire de la roulette*[7]*",* publicada por Pascal a finales de ese año bajo el pseudónimo de Amos de Dettonville. La publicación de esta obra promovió nuevas controversias pues no hacía referencia a los trabajos previos de Torricelli.

Una vez cerrado el plazo de presentación de propuestas al concurso convocado por Pascal, el arquitecto inglés Christopher Wren (1632-1723) comunicaría a Pascal un novedoso resultado en el estudio de la cicloide [Bou, p. 249]. A saber, Wren había logrado la rectificación de la cicloide, hallando que la longitud de un arco de cicloide era igual a cuatro veces el diámetro de la circunferencia que genera la curva.

La propiedad tautócrona y el péndulo isócrono de Huygens

A pesar del desagrado que el desenlace del reto lanzado por Pascal causó en algunos matemáticos, el reto en sí tuvo un efecto colateral digno de mención. En 1658, el astrónomo, físico y matemático holandés Christiaan Huygens (1629-1695) trataba de mejorar el diseño de los relojes de péndulo, puesto que había notado que el periodo de oscilación de un péndulo circular depende de la amplitud de su

[7] *Roulette* era el nombre por el que tanto Roberval como Pascal conocían a la curva cicloide.

trayectoria. En otras palabras, si a un péndulo de trayectoria circular se le modifica la amplitud de oscilación entonces deja de medir correctamente el tiempo puesto que se altera también el periodo de su oscilación. Pensemos por ejemplo en un péndulo circular sometido a alteraciones en la oscilación ubicado en un barco en movimiento o en cualquier móvil que describa un movimiento variado.

Por entonces, los avances científicos requerían urgentemente relojes precisos para realizar mediciones en áreas tan diversas como la astronomía, la mecánica celeste o, muy especialmente, la navegación. Al respecto de la navegación, un problema fundamental era el denominado *problema de la longitud*, relacionado con la determinación de la posición de barcos en altamar. La latitud terrestre podía ser calculada sin excesiva dificultad mediante la observación astronómica. La elevación del sol sobre el horizonte al mediodía permite obtener la distancia en grados de latitud desde el ecuador. De este modo podía determinarse la latitud con cierta exactitud midiendo la elevación del Sol en distintas épocas del año o bien midiendo la posición de la estrella Polar (en el caso del hemisferio norte terrestre) o de la Cruz del Sur (en el caso del hemisferio sur).

No obstante, el problema del cálculo de la longitud resultaba de una complejidad mucho mayor. Notemos que las estrellas no pueden tomarse como referencia por sí solas por cuanto la esfera celeste está en continuo movimiento de rotación. Para poder determinar la longitud resultaba necesario medir la posición de una estrella en un instante determinado, lo cual requiere dos mediciones: una relativa al tiempo local y otra relativa a la del tiempo en el lugar de referencia. A mediados del siglo XVII era prácticamente imposible conocer la hora local y la hora de referencia al mismo tiempo ante la imprecisión de los relojes en alta mar a causa de las continuas perturbaciones. Dicho de otro modo, era necesario disponer de un reloj de una precisión suficiente para poder determinar la longitud. De esta manera, cuando se tiene un reloj preciso, entonces la diferencia de tiempos en los que el sol alcanza su punto más alto en dos lugares distintos puede entonces usarse para obtener la distancia angular entre esos dos lugares. [Eul, Tomo 3] es una excelente e instructiva referencia para conocer más acerca de los métodos para el cálculo de la latitud y la longitud, entre otros aspectos.

Inspirado por el reto de Pascal, Huygens se ocupó de estudiar el periodo de un péndulo forzado a seguir una trayectoria cicloidal, descubriendo que éstos son isócronos, esto es, la frecuencia de tales péndulos cicloidales es independiente de la amplitud de su movimiento. Huygens caería en la cuenta de que un péndulo basado en la curva cicloide no se vería afectado por variaciones en la amplitud de su oscilación. En otras palabras, aunque la amplitud de la oscilación fuera puntualmente modificada, el periodo de oscilación del péndulo no se vería afectado y su valor únicamente dependería del radio de la circunferencia generatriz de la cicloide y de la aceleración de la gravedad, a saber

$$4\pi \cdot \sqrt{\frac{R}{g}}$$

Así pues, Huygens había descubierto en base a diversas consideraciones geométricas que la curva cicloide invertida es una curva tautócrona[8]. Huygens fue pionero en demostrar que la curva cicloide satisface la propiedad tautócrona y en su obra "*Horologium oscillatorium sive de motu pendulorum ad horologia aptato demostrationes geometricae*" [ver I-Huy] (publicada en París, 1673) da una demostración geométrica de este hecho.

La construcción del péndulo isócrono, que puede verse en [I-Huy], aprovecha una propiedad fundamental de la curva cicloide, que consiste en que su evoluta[9] es otra cicloide.

---

[8] Una curva se dice *tautócrona* (o isócrona) si tiene la propiedad de que un objeto material que se desplace uniformemente en caída por efecto de la gravedad y sin rozamiento a través de ella hasta un punto dado de la misma, lo hace en el mismo tiempo independientemente de la posición inicial del objeto. Del griego, tautos (ταυτος) significa el mismo, mientras que cronos (χρονος) significa tiempo.

[9] La evoluta de una curva es la curva envolvente de la familia de rectas normales a la curva original en todos sus puntos, en el sentido de que dichas rectas normales son tangentes a la evoluta en puntos correspondientes.

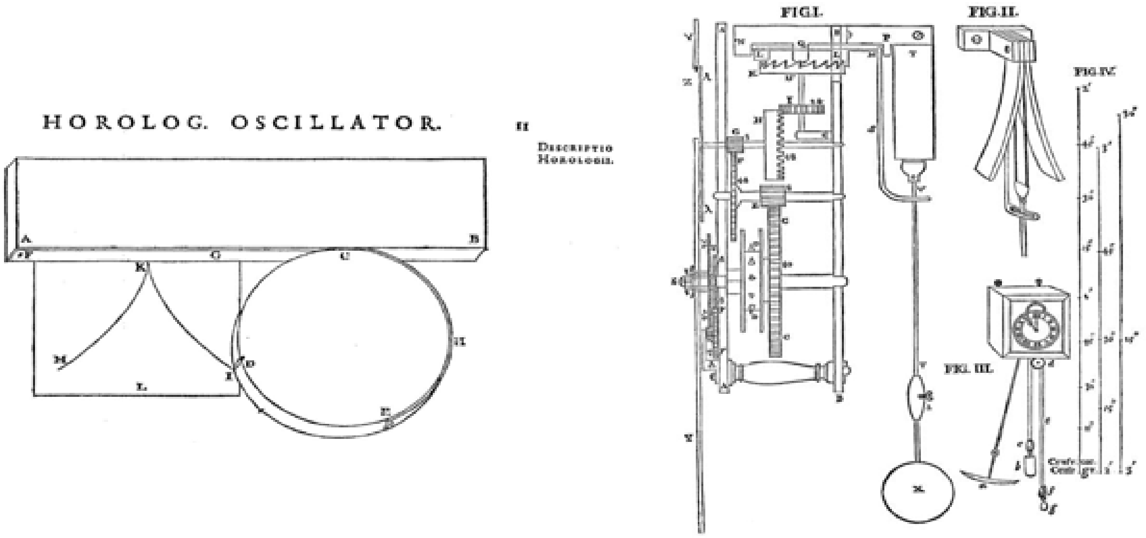

Figura 3: Huygens y la construcción del péndulo isócrono (Horollogium oscillatorium, [I-Huy, p. 1-20])

En otro orden de cosas, Huygens conocía que la suma de la longitud del segmento que une un punto cualquiera P de la cicloide y el punto de intersección C de la normal trazada desde P con la evoluta, y la longitud del arco que une el punto C y el vértice V de la evoluta, es constante e igual a el doble del diámetro de la circunferencia que genera la cicloide

$$\overline{PC} + \overset{\frown}{CV} = 4R$$

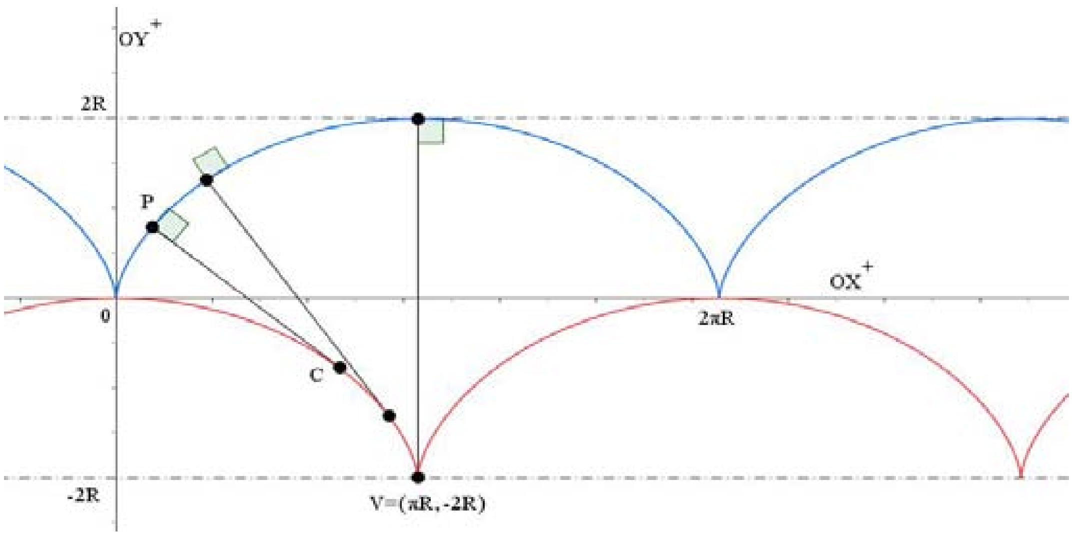

Figura 4: La cicloide (en azul) y su evoluta (en rojo).

Esta última propiedad es fundamental para la construcción de un tal péndulo isócrono forzado a moverse a lo largo un arco de cicloide. Para ello se fija un extremo de una cuerda dada como vértice de la evoluta de la cicloide que se desea describir. El mecanismo consistía en desplazar un punto variable de la cuerda a lo largo de la evoluta mientras el extremo libre de la cuerda oscila siguiendo una curva cicloide. Desafortunadamente, aunque el péndulo ideado por Huygens era preciso en teoría, en la práctica resultó poco útil debido a que el rozamiento de la cuerda a lo largo de los arcos de la cicloide causaba un error superior al que se trataba de corregir en la medición del tiempo.

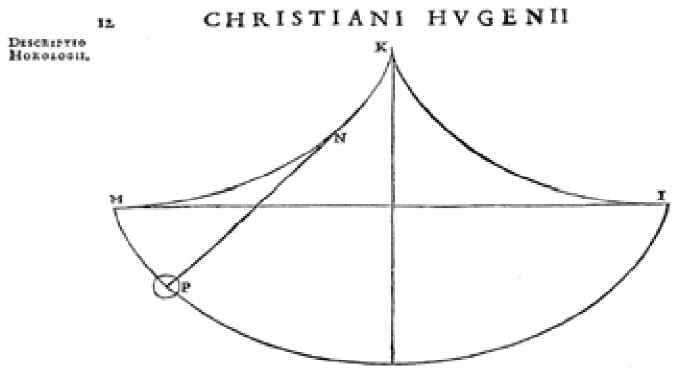

Figura 5: Huygens y la construcción del péndulo isócrono.

Años más tarde, los métodos infinitesimales de Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) ejercerían una profunda influencia en los matemáticos europeos continentales. En particular, su discípulo suizo Jakob Bernoulli (1654-1705) publicaría en mayo de 1690 un trabajo en la revista Acta Eruditorum (primera revista científica germana, publicada de 1682 a 1782, de la que Leibniz era su editor principal) donde establece la propiedad tautócrona de la cicloide haciendo uso del cálculo diferencial e integral. Más precisamente, Jakob Bernoulli había mostrado que el problema de la curva tautócrona se reducía a la resolución de una ecuación diferencial de primer orden. Los trabajos de Jakob en este año 1690 son de particular importancia para la historia del cálculo infinitesimal por cuanto la denominación integral surge por primera vez con su sentido actual de proceso inverso a la diferenciación.

El problema de la tautócrona seguiría planteando nuevos retos y abriendo nuevos frentes de estudio en los siglos XVIII y XIX. En particular, Joseph Louis Lagrange (1736-1813) comenzó alrededor de 1754 a trabajar en el problema de la tautócrona por vías puramente analíticas, y a finales de ese año ya había obtenido importantes resultados que instaurarían las bases actuales del Cálculo de Variaciones (término acuñado por Leonhard Euler (1707-1783) unos años más tarde). En agosto del año siguiente, Lagrange (teniendo por entonces 19 años) comunica por correspondencia a Euler sus avances en la resolución del problema de la tautócrona, así como su método para la resolución de máximos y mínimos condicionados (método de los multiplicadores).

Posteriormente, en 1823, Niels Henrik Abel (1802-1829) propone una generalización del problema de la tautócrona, basada en determinar la curva tal que un objeto material que se desplace uniformemente en caída por efecto de la gravedad y sin rozamiento a través de ella hasta un punto dado de la misma, lo haga en un tiempo prefijado de antemano para cada altura posible desde la que deba caer el objeto. Claramente, si el tiempo se exige independiente de la altura desde la que debe caer el objeto entonces se obtiene el problema original de la tautócrona. Los trabajos de Abel acerca de la curva tautócrona son pioneros en el desarrollo del Cálculo Fraccionario y el análisis de las Ecuaciones Integrales.

La curva braquistócrona: los Bernoulli y las garras del león

A finales del siglo XVII, los métodos infinitesimales de Leibniz habían puesto de manifiesto su potencia y eficacia en la resolución de numerosos problemas novedosos en la época. Hasta entonces, el cálculo infinitesimal se había ocupado fundamentalmente de resolver problemas de tangentes y cuadraturas. Tras demostrar por métodos infinitesimales la propiedad tautócrona de la cicloide, Jakob Bernoulli concluye un trabajo de 1690 en Acta Eruditorum planteando a la comunidad matemática el célebre problema de la catenaria: *encontrar la forma que toma una cuerda, perfectamente flexible y homogénea, por la acción sólo de su peso* *si se encuentra fija en sus extremos*. La novedad en sí de estos nuevos problemas era notoria, pues no se trataba de encontrar extremos relativos de una curva, sino que la incógnita buscada es la propia curva. El problema de la catenaria sería resuelto posteriormente por C. Huygens por la vía geométrica, así como por Johann Bernoulli (1667-1748) y Leibniz reduciendo el problema a la resolución de una ecuación diferencial de primer orden.

Hasta la fecha los dos hermanos Bernoulli habían llevado a cabo una fructífera colaboración científica, hallándose ambos entre los pocos matemáticos en entender y aplicar con éxito las teorías de Leibniz. Jakob había iniciado a su hermano menor en las técnicas propias del cálculo diferencial, de tal suerte que en un principio ambos colaboraban en la resolución de problemas similares. No obstante, la resolución del problema de la catenaria por parte de Johann Bernoulli unido a la jactancia pública de éste supuso el detonante de agrias desavenencias entre ambos hermanos. En carta dirigida a Pierre Raymond de Montmort (1678-1719), Johann escribe lo siguiente en referencia a la resolución del problema de la curva catenaria [SV2, p. 92]:

> *"Los esfuerzos de mi hermano no tuvieron éxito; en cuanto a mí, tuve más fortuna, ya que fui capaz (lo digo sin alarde, ¿Por qué habría de ocultar la verdad?) de resolverlo completamente y reducirlo a la rectificación de la parábola."*

Aparte de la rivalidad científica y el singular temperamento de cada uno de los hermanos Bernoulli, el hecho de que Jakob Bernoulli ocupara la cátedra de matemáticas en Basilea, ciudad natal de ambos hermanos, limitando las posibilidades de promoción de Johann, es un factor fundamental para entender el origen de las disputas entre ambos hermanos.

En junio de 1696, Johann Bernoulli, que por entonces se había trasladado a Groningen (Holanda) para ocupar la cátedra de matemáticas de aquella universidad, propone en Acta Eruditorum el problema de la braquistócrona[10], consistente en

[10] Del griego, braquistos (βραχιστος) significa el más breve.

determinar la curva por la que un cuerpo desciende en el menor tiempo posible entre dos puntos que no están ni en posición vertical ni horizontal, movido únicamente por efecto de la gravedad.

El propio Johann había añadido sarcásticamente que dicha curva era bien conocida entre los matemáticos, a pesar de no ser una línea recta (siendo ésta la curva que minimiza la distancia entre dos puntos) [Str, p. 392]. El reto lanzado por Johann, dirigido a los más brillantes matemáticos del mundo, fue pensado especialmente para poner a prueba a su hermano Jakob, esperando que éste llegara a una solución errónea. [HNW, p. 7]

> *"Profundioris in primis Mathesos cultori, Salutem!*
>
> *Problema novum ad cujus solutionem mathematici invitantur. Datis in plano verticali duobus punctis A et B assignare mobili M, viam AMB per quam gravitate sua descendens et moveri incipiens a puncto A, brevissimo tempore perveniat ad alterum punctum B."*

El plazo para la recepción de soluciones fue establecido hasta finales de ese año, aunque Johann aseguraba que media hora de profunda reflexión sería más que suficiente para una mente capaz [Dur2, p. 101]. No obstante, finalizado el plazo de seis meses, únicamente Leibniz había logrado resolver el problema en cuestión, solicitando además a Johann Bernoulli la ampliación del plazo de resolución de tal suerte que otros matemáticos, en especial, franceses, italianos y, sobre todo, los matemáticos ingleses pertenecientes a la Royal Society de Londres, pudieran conocer y estudiar el problema planteado. En carta fechada el día de año nuevo de 1697, Johann Bernoulli se dirige *a los más agudísimos matemáticos que a lo largo del mundo florecen* planteando dos problemas, uno de los cuales era el problema de la braquistócrona, y proponiendo la ampliación del plazo de resolución hasta la Semana Santa de 1697. En sendas cartas remitidas a las revistas Philosophical Transactions of The Royal Society y Journal des sçavans, Johann Bernoulli indica [SV1, p. 38]:

> *"Ya se sabe con certeza que raramente hay algo que de forma más grata excite a los espíritus nobles e ingeniosos a esfuerzos que conducen al*

> *aumento del conocimiento que proponer problemas difíciles y al mismo tiempo útiles..." "...he decidido anunciar yo mismo la prolongación del plazo y ahora se verá quien ataca esta excelente y difícil cuestión y, después de un plazo tan largo, finalmente la domina."*

En febrero de 1697, Leibniz escribe a Johann Bernoulli conjeturando que sólo cinco matemáticos vivos estaban en condiciones de resolver el problema de la braquistócrona, a saber, ambos hermanos Bernoulli, Guillaume Antoine François marqués de L'Hôpital (1661-1704), Isaac Newton (1643-1727) y el propio Leibniz (éstos junto con Huygens, que había fallecido años atrás, eran los únicos matemáticos que estaban en condiciones de hacer uso del cálculo diferencial e integral para resolver el problema). Finalizado el plazo, Leibniz se encargaría de publicar las soluciones recibidas en el volumen del mes de mayo de Acta Eruditorum.

En total se recibieron cuatro propuestas de solución por parte, respectivamente, del propio Leibniz, del marqués de L´Hôpital, así como de los dos hermanos Jakob y Johann Bernoulli. Todas las soluciones propuestas a excepción de la de L'Hôpital establecían que la curva braquistócrona era una curva cicloide [Dur2, p. 102]. El hecho de que Huygens identificara años atrás a la cicloide como curva tautócrona hizo a Johann Bernoulli escribir como introducción a su propuesta [Str, p. 392]:

> *"Con justicia admiramos a Huygens porque fue el primero en descubrir que una masa cae por la cicloide en el mismo tiempo, sin importar el punto de inicio del movimiento. Pero el lector quedará atónito cuando diga que esta misma cicloide, la tautócrona de Huygens, es la braquistócrona que estamos buscando."*

La solución dada por Johann Bernoulli apareció en Acta Eruditorum bajo el nombre "*Curvatura radii in diaphanis non uniformibus*" ("La curvatura de un rayo en un medio no uniforme"), y consistía en establecer una analogía entre la curva de descenso más rápido con la trayectoria que seguiría un rayo de luz en un medio plano con índice de refracción adecuadamente elegido. Haciendo uso de la denominada ley de Snell[11] y de la ley de Galileo, por la cual la velocidad de caída de un cuerpo es proporcional a la raíz cuadrada de la distancia desde donde cae, Johann obtiene la ecuación diferencial de la cicloide

$$y'(x) = \sqrt{\frac{x}{2R - x}}$$

La solución propuesta por su hermano Jakob Bernoulli aparece bajo el sugerente título *"Solutio Problematum Fraternorum, una cum Propositione reciproca aliorum"* ("*Resolución del problema de mi hermano, a quien yo a mi vez planteo otro*"). El método de resolución propuesto por Jakob Bernoulli es mucho más general que la solución propuesta por su hermano, y ejerció una profunda influencia en L.Euler, quien, junto a J.L. Lagrange, instauraría las bases del Cálculo de Variaciones, disciplina matemática dedicada a la búsqueda de extremos relativos de funcionales definidos sobre algún espacio de funciones. Las soluciones propuestas por ambos hermanos Johann y Jakob Bernoulli pueden consultarse en [Str, p. 392-399].

En otro orden de cosas, el problema de la curva de tiempo más breve ya había sido considerado cerca de setenta años antes por Galileo, quien, sin poseer la potente herramienta del cálculo infinitesimal, había propuesto que dicha curva debía ser un arco de circunferencia. En tiempos de Galileo, era bien conocido que el tiempo de descenso a lo largo de una recta era mayor que el tiempo de descenso a lo largo de un arco de circunferencia. En particular, en el escolio al Teorema 22, Proposición 36, de la tercera jornada, sobre el movimiento naturalmente acelerado, de *"Discorsi e demostrazioni matematiche: intorno a due nuove scienze attenenti alla mecanica & movimenti locali"* [Gal], Galileo estudia el tiempo de caída a lo largo de poligonales hallando que, en el límite de la familia de poligonales, el tiempo a lo largo de una recta es superior al obtenido a lo largo de una circunferencia:

[11] La ley de Snell indica que un rayo de luz al pasar de un medio a otro de densidad diferente se desvía de modo que la relación entre la velocidad y el seno del ángulo que forma la curva con la vertical permanece constante.

"De lo demostrado hasta ahora, parece que se puede inferir que el movimiento más veloz de un extremo a otro, no tiene lugar a lo largo de la línea más corta, sino a lo largo de un arco de círculo"

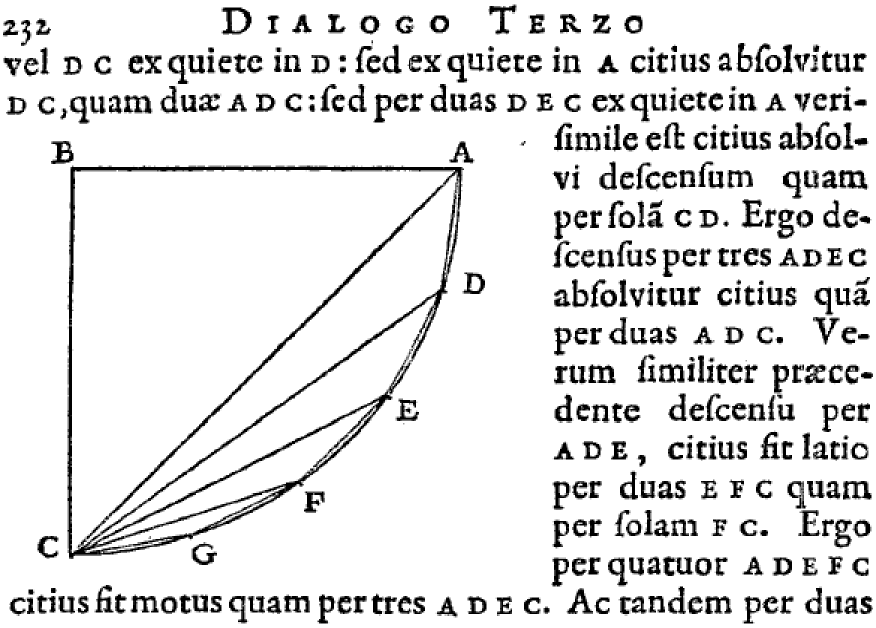
232 DIALOGO TERZO
vel D C ex quiete in D: ſed ex quiete in A citius abſolvitur D C, quam duæ A D C: ſed per duas D E C ex quiete in A veriſimile eſt citius abſolvi deſcenſum quam per ſolã C D. Ergo deſcenſus per tres A D E C abſolvitur citius quã per duas A D C. Verum ſimiliter præcedente deſcenſu per A D E, citius fit latio per duas E F C quam per ſolam F C. Ergo per quatuor A D E F C citius fit motus quam per tres A D E C. Ac tandem per duas

Figura 6: Galileo y la curva de descenso más breve (ver [I-Gal])

En palabras del propio Leibniz en la presentación en Acta Eruditorum de las soluciones al reto de Johann Bernoulli, Galileo no pudo demostrar que la curva braquistócrona era una curva cicloide al desconocer el cálculo infinitesimal recientemente descubierto.

Retomando el reto de Johann Bernoulli, cuatro soluciones al problema de la braquistócrona fueron presentadas en el segundo plazo propuesto y publicadas en el volumen de mayo de 1697 de la revista Acta Eruditorum. El hecho de que Isaac Newton no hubiera respondido al reto en el primer plazo establecido hizo pensar tanto a Johann Bernoulli como a Leibniz que el problema había desconcertado a Newton, y que, por tanto, el método de fluxiones de Newton era más limitado que el método de diferenciales de Leibniz. Observemos que por entonces Newton se hallaba al margen de la vida académica y científica, pues había sido nombrado Interventor de la Casa de la Moneda de Londres en abril de 1696, y desde entonces se hallaba entregado en cuerpo y alma al proceso de reacuñación de monedas que se había abierto para abordar el grave problema financiero que azotaba a Inglaterra a causa de los turbios negocios dedicados a la falsificación de monedas.

Así pues, Bernoulli optó por remitir, también en enero, copias independientes a Newton y Wallis para cerciorarse la superioridad de los métodos diferenciales de Leibniz frente al cálculo de fluxiones defendido por los matemáticos británicos. Asimismo, la carta a Newton y Wallis indicaba irónicamente que tanto Leibniz como el propio Johann Bernoulli publicarían sus soluciones en la Pascua de 1697 [Wes, p. 292-293]:

> *"Si los geómetras examinan cuidadosamente estas soluciones...valorarán nuestros descubrimientos tanto más cuantos menos son los que plausiblemente puedan resolver nuestros excelentes problemas, sí, menos incluso entre los mismos matemáticos que se jactan de que, mediante los notables métodos que en tal modo encarecen, no sólo han penetrado en profundidad en los rincones secretos de la geometría esotérica, sino asimismo han extendido extraordinariamente sus límites por medio de los áureos teoremas que (creían ellos) no eran conocidos de ninguno, pero que de hecho habían sido previamente publicados por otros hacía tiempo."*

Newton interpretó esta comunicación como un reto dirigido hacia su persona y por tanto hizo registrar la fecha de la recepción del reto: 29 de enero de 1697. Charles Montagu, presidente de la Royal Society de 1695 a 1698, recibiría una carta fechada el 30 de enero de 1697, conteniendo una solución al problema de la braquistócrona. Así, en el volumen de febrero de 1697 de las Philosophical Transactions aparecería una brillante y escueta propuesta de autor anónimo, que con tan sólo setenta y siete palabras resolvía el reto de Bernoulli. Cuando el trabajo anónimo llegó a manos de Johann Bernoulli, éste no vaciló en apreciar la potencia del razonamiento expuesto, e impresionado por la elegancia de la solución, no tuvo la menor dificultad en identificar a Newton como autor del trabajo, y lo expresó con la célebre frase *"tanquam ex ungue leonem"* ("*como se reconoce al león por sus garras*") [Dur2, p. 102]. En declaraciones de la sobrina de Newton, que por entonces vivía con su tío, a su biógrafo, John Conduitt, Newton recibió la comunicación de Bernoulli el 29 de enero a las cuatro de la tarde tras una agotadora jornada del proceso de reacuñación de monedas en el que trabajaba. En la colección de anécdotas de Conduitt se refleja que Newton no durmió hasta que hubo resuelto el problema cerca de las cuatro de la madrugada [Wes, p.293].

Así pues, los hechos acaecidos en torno a la curva cicloide en la última década del siglo XVII representan un punto de referencia indiscutible en la historia de las matemáticas. Pocas curvas en la historia de las matemáticas cuentan con el honor de poseer un monumento en su nombre. De hecho, coincidiendo con el tricentésimo aniversario del reto planteado por Bernoulli, en 1996 se erigió un monumento en la Universidad de Groningen en honor a Johann Bernoulli y la curva cicloide.

Figura 7: Monumento a la cicloide en la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Groningen.

Bibliografía

- [Bou] N. Bourbaki. *"Elementos de historia de las matemáticas".* Alianza Universidad (1976)
- [Dur1] A.J. Durán. *"Historia, con personajes, de los conceptos del cálculo"*. Alianza Universidad (1996).
- [Dur2] A.J. Durán. *"La polémica sobre la invención del cálculo infinitesimal. Escritos y documentos"*. Crítica (2006).
- [Euc] Euclides. *"Elementos"*. Editorial Gredos (1991, 1994, 1996).

- [Eul] L. Euler. *“Cartas a una princesa de Alemania sobre diversos temas de Física y Filosofía”*. Edición de Carlos Mínguez Pérez, Prensas Universitarias de Zaragoza (1990).
- [Gal] G. Galilei. *“Discorsi e dimostrazioni matematiche, intorno à due nuove scienze attenenti alla mecanica e i movimenti locali”*. Servei de publicacions de la Universitat Autònoma de Barcelona (1988).
- [GU] P.M. González Urbaneja. *“Las raíces del cálculo infinitesimal en el siglo XVII: una investigación histórica sobre las técnicas y métodos que condujeron al descubrimiento del cálculo infinitesimal ”*. Alianza Universidad (1992).
- [Har] G.H. Hardy. *“Apología de un matemático”*. Nivola (1999).
- [HNW] E. Hairer, S.P. Norsett, G. Wanner. *“Solving Ordinary Differential Equations I. Nonstiff Problems”*. Springer-Verlag (1993).
- [Kli] M. Kline. *“El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días”*. Alianza Universidad (1992).
- [Sch] H.C. Schepler. *“The chronology of Pi”*. Mathematics Magazine, Vol. 23 (1950).
- [Str] D.J. Struik. *“A source book in mathematics, 1200-1800”*. Princeton University Press (1986).
- [SV1] C. Sánchez Fernández, C. Valdés Castro. *“De los Bernoulli a los Bourbaki. Una historia del arte y la ciencia del cálculo”*. Nivola (2004).
- [SV2] C. Sánchez Fernández, C. Valdés Castro. *“Los Bernoulli. Geómetras y viajeros”*. Nivola (2001).
- [Wes] R.S. Westfall. “*Newton. Una vida*”. Cambridge University Press (2000).

Referencias en internet

- [I-Gal] G. Galilei. *“Discorsi e dimostrazioni matematiche, intorno à due nuove scienze attenenti alla mecanica e i movimenti locali”* (1638).

  Enlace a *Gallica, bibliotèque numérique de la bibliotèque nationale de France*

  http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3354x
- [I-Huy] C. Huygens. “*Horologium oscillatorium sive de motu pendulorum ad horologia aptato demostrationes geometricae*” (1673).

  Enlace a *Gallica, bibliotèque numérique de la bibliotèque nationale de France*

  http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3360z
- [I-Pro] R. Proctor. *“A treatise on the cycloid and all forms of cycloidal curves”*. Longmans, Green & Co (1878).

  Enlace a *The Cornell Library Historical Mathematics Monographs*

  http://historical.library.cornell.edu/cgi-bin/cul.math/docviewer?did=02260001