

Un aprendizaje eficaz de la numeración

Eduardo Martín Sánchez

Resumen

Son bastante conocidas las formas de leer por vía directa o global y vía indirecta o silábica. Esto ha dado lugar a intensas discusiones entre los maestros. En el aprendizaje de la numeración no hay ninguna discusión sobre si hay métodos más eficaces que otros en su aprendizaje. Con este artículo pretendo, aparte de mostrar una experiencia didáctica, plantear un debate sobre qué metodologías son más eficaces en el aprendizaje de las matemáticas y hacer una hipótesis: la percepción súbita o por vía directa de la cantidad es necesaria para un aprendizaje eficaz de la numeración.

La vía directa y la vía indirecta

En el idioma español cuando hablamos de lectura es fácil reconocer si lo hacemos por la vía indirecta o por la directa. Cuando un niño aprende a leer por un método fonético o silábico lo hace por la vía indirecta y mediante la unión de sonidos (de fonemas o sílabas) llega a reconocer las palabras y asociarlas a su significado. Este mismo procedimiento es el que usan los buenos lectores para leer palabras desconocidas (trioxobromato, somormujar) o palabras inexistentes (clatregumel, idrontla). Cuando nos enfrentamos ante este tipo de palabras nuestra velocidad lectora disminuye considerablemente y por supuesto no puede haber comprensión al no tener o desconocer el significado.

Un lector experto cuando lee no usa el procedimiento anterior sino que reconoce la palabra o grupo de palabras de un solo vistazo sin necesidad de ir construyéndola letra a letra. Este procedimiento es el que nos permite leer textos como éste: “Según un etsduio de una uivennrsdiad ignlsea no ipmotra el odren en el que las ltears etsen ersciats...” Este procedimiento nos permite aprender el significado de nuevas palabras gracias al contexto en que están. Esto es lo que denominamos vía directa en la lectura.

¿Qué ocurre con el aprendizaje de los números? ¿Existen también distintas vías?

Los números y en especial los dígitos tienen personalidad propia y no sólo dentro de su puesto en una secuencia. Esta personalidad en los 3 primeros números es clara y los niños la conocen antes que su nombre. Tienen 2 años o tienen 3, quieren 2 patines o 1 balón... La personalidad de cada número está en la oposición y diferenciación con los demás. De esta forma se crea un significado propio para cada número. Esta sería la vía directa. Cuando enseñamos a los niños **únicamente a**

contar los números pierden su personalidad y sólo tienen significado dentro de una secuencia. Si a un niño que sólo usa la estrategia de contar le señalamos los dedos de una mano y le preguntamos ¿cuántos hay? contará desde el 1 al 5 sin reconocer en los dedos de la mano una de las representaciones del 5. A esa forma de reconocer la cantidad contando de uno en uno es a la que denominamos vía indirecta.

El aprendizaje de los primeros números

Cuando un niño pequeño (de 2 a 3 años) adquiere los conceptos uno, dos y tres, los adquiere como si se tratase de cualquier otro concepto como amarillo grande o perro. En todos los casos se refiere a elementos de la realidad que percibe a través de los sentidos y de los cuales tiene experiencias vitales. Así prefiere el caramelo amarillo y no el rojo, el grande y no el pequeño, dos y no uno. Estos conceptos no siempre los sabe expresar de forma oral, pero sí con gestos o sonido como “guau”. Señala el caramelo amarillo por no saber decir “amarillo” o pone 2 dedos por no saber decir o no conocer la palabra “dos”. Al preguntarle a un niño de 3 años por cuántas orejas tiene el caballo, señaló con 2 dedos mientras decía “uno”. Esto pone de manifiesto que el concepto de estos tres números es anterior al nombre, igual que el de perro es anterior a la palabra “perro” que suelen llamar “guau”. Pero el resto de los números no se pueden percibir de forma natural con sólo una mirada. Si vemos “IIIIIIII” no sabemos cuántas “I” hay; las tenemos que contar. Pero si vemos “III III III” no necesitamos contar, podemos decir con un solo vistazo que son 9. Por tanto el 9 es algo más que el siguiente al 8, es también tres veces tres. Conocer el número 9 es más que saber su nombre “nueve” y su imagen “9”. Cuanto más profundo sea su conocimiento mejor podemos hacer uso de él. Por ejemplo del nueve podemos tener las siguientes imágenes:

Todos los dedos de las dos manos menos uno.

Tres montones de tres puntos.

Cinco dedos de una mano y cuatro de otra.

La imagen del 9 de la baraja de cartas.

$$8+1 = 7+2 = 6+3 = 5+4 = 3+3+3 = 2+3+4=10 - 1$$

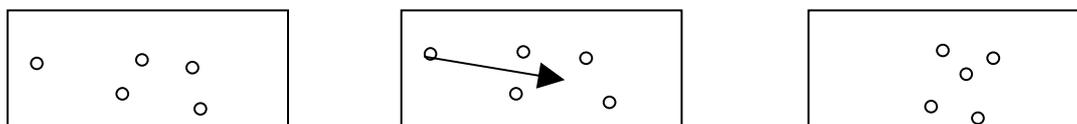
...

Para poder hacer cálculos y establecer relaciones entre números será más fácil cuantas más imágenes tengamos del número. Con saber contar puede ser suficiente para hacer los cálculos. Para calcular $5+4$ se puede contar cinco dedos en una mano y cuatro en la otra, después contar todos juntos y llegaremos al nueve. La utilidad de esta estrategia de cálculo es poco práctica y es la que siguen usando todos los alumnos que fracasan en matemáticas en cursos superiores (9- 10 años). Cuando enseñamos a un niño a contar de uno en uno les enseñamos a reconocer las pequeñas cantidades de una forma lenta insegura y que supone un gran esfuerzo

mental, pues tiene que asociar cada objeto a una palabra que ha memorizado en un cierto orden pero que carece de sentido. Si se despistan tienen que volver a empezar, por lo que contar supone un gran esfuerzo de concentración y atención. Este esfuerzo les impide dedicar atención al significado de la operación de contar. Si a un niño le damos un conjunto de 6 caramelos y otro de 7 chapas y le preguntamos en cual hay más, según cual haya sido el procedimiento de percibir la cantidad el resultado para su aprendizaje puede ser muy distinto. El niño que contó 6 caramelos de uno en uno y después 7 chapas de una en una puede que cuando termine de contar las 7 chapas no se acuerde de cuantos caramelos había y si lo recuerda puede que esté demasiado cansado para recordar si el 6 iba delante o detrás del 7. Todo este esfuerzo de concentración y memoria tiene muy poca utilidad desde el punto de vista matemático pues no desarrolla ninguna habilidad de aplicación en matemáticas. El niño que ve 2 grupos de 3 caramelos y 2 grupos de 3 chapas y otra más, puede garantizar sin ningún esfuerzo que hay una chapa más que caramelos y que el 7 es uno mayor que el 6 y que el 6 esta formado por $3+3$ y que el 7 esta formado por $3+3+1$. La utilidad de esta forma de percibir los números desde el punto de vista matemático creo que es clara. No sólo es más rápida y eficaz, sino que esa percepción le permite llegar con facilidad a los conceptos matemáticos de numeración, orden, descomposición de números en la suma de otros dos o tres, concepto de suma, concepto de resta, de igualdad y en general comprender el lenguaje matemático. Este procedimiento es el que usamos los adultos para percibir pequeños conjuntos. A este procedimiento es al que denomino vía directa.

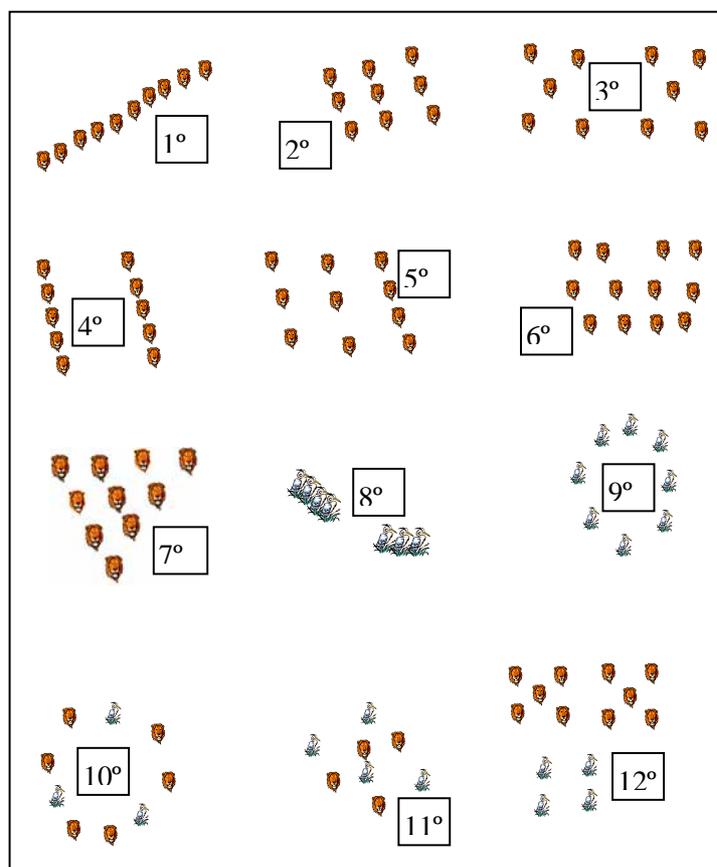
Por supuesto no siempre podemos utilizarlo. Si queremos contar las ovejas que hay en un rebaño no podríamos hacerlo si se están moviendo. Tendríamos que recurrir a la vía indirecta.

Por todo lo expuesto propongo que para saber cuantos objetos hay, a los niños les enseñemos a agrupar objetos con formas conocidas. Primero los niños tienen que tener imágenes de los números: los puntos del dado, la colocación de las figuras en las cartas de la baraja, los dedos de las manos... Después cuando les demos varios objetos los agruparan como alguna forma conocida para ver el total de un solo vistazo sin necesitar contar como se ve en estos dibujos.



En el primer grupo no vemos cuantos son, pero en el último enseguida reconocemos el cinco con seguridad por su equivalencia al 5 del dado. También si le enseñamos la mano abierta con todos los dedos reconoce el 5 sin necesidad de contar. Esto se consigue por imitación del adulto. Cuando el maestro cuenta, los niños tienden a imitar, pero si nosotros agrupamos para ver el total los niños terminarán imitando.

Como percibimos los adultos las cantidades



Si nos enseñasen cada una de las siguientes imágenes durante décimas de segundo y nos preguntasen ¿Cuántos animales hay?

En la presentación 1° no podemos ver cuántos son aunque por aproximación nos acerquemos mucho o acertemos el número exacto.

En la 2° vemos tres grupos de 3 lo que mediante un cálculo nos lleva al 9 pero no a un niño pequeño que no sepa calcular.

En la 3° no nos cuesta reconocer el número porque reconocemos los 5 puntos del dado por dos veces lo que mediante un cálculo mental tan automatizado que es inconsciente nos lleva a

reconocer el 10. Pero en la percepción del 10 no es directa como la del 2 o el 3 sino una memoria espacial de los puntos del dado y una elaboración mental ($5+5=10$). Dos grupos de 5 puntos colocados con otra disposición no conocida no nos permitiría reconocer tan claramente el 10 como vemos en la 4°.

En la 5° se suele confundir la columna de 4 con las otras de 3 y decir 9 en lugar de 10. También suele resultar difícil ver en la 6° los 4 grupos de 3, pero siempre son números menores de 5 que agrupamos para obtener el total.

Mayor elaboración mental tiene la 7° pues vemos claro la columna de 1 incluso la de 2 de lo que deducimos la secuencia y más bien adivinamos las de 3 y la de 4 y tras un cálculo más complejo llegamos al 10 ($1+2+3+4=10$).

En 8° se puede apreciar como nos cuesta diferenciar entre 3 y 4 objetos cuando están juntos y en línea ocupando el mismo espacio.

En 9° y 10° vemos como nos cuesta mucho ver los que hay en círculo cuando todos son iguales, pero no cuando los hay distintos que nos permite ver 3 patos que separan 4 grupos de 2 leones.

En la 11° cuesta más distinguir los 4 leones y las 4 aves que los 10 leones y las 4 aves del 12° gracias a la colocación de los leones en el 12°

En conclusión podemos decir que sólo percibimos o retenemos en nuestra memoria conjuntos de 1, 2, 3, ó 4 objetos. En conjuntos superiores no tenemos seguridad de la cantidad. Sólo con la colocación en una estructuración espacial conocida como los puntos del dado o figuras de la baraja nos permite conocer conjuntos mayores con seguridad. Pero podemos percibir 3 ó 4 conjuntos de 3 ó 4 objetos lo que nos lleva a ver con seguridad conjuntos de 10 ó 12 objetos.

Si esta es la forma de percibir con rapidez, seguridad y eficacia los números hasta el 10. ¿Por que no usarla para que sea la forma natural de aprendizaje de los números?

Como enseñar los números por la vía directa

Para que los niños desarrollen esta capacidad primero les mostramos dibujos de 1, 2 ó 3 objetos para que los asocie con las palabras uno, dos, tres y con sus grafías. Luego tienen que ser capaces de poner los mismos dedos que objetos, asociar conjuntos con igual cantidad de objetos. Podemos incluir como imagen las regletas, los puntos del dado o las cartas de la baraja además de los dedos y la colocación de objetos. La colocación de los elementos debe ser siempre la misma para recordarla como imagen del número. Por ejemplo los puntos del dado. Luego vamos ampliando uno a uno los demás números hasta el 10 de la misma forma.

Cuando ya tienen imágenes de los 5 ó 6 primeros números podemos empezar a hacer transformaciones con ellos. Tenemos 3 objetos y ahora le añadimos 1 ¿cuántos hay? y ahora le quitamos 1 ¿cuántos quedan? A continuación añadimos y quitamos 2...

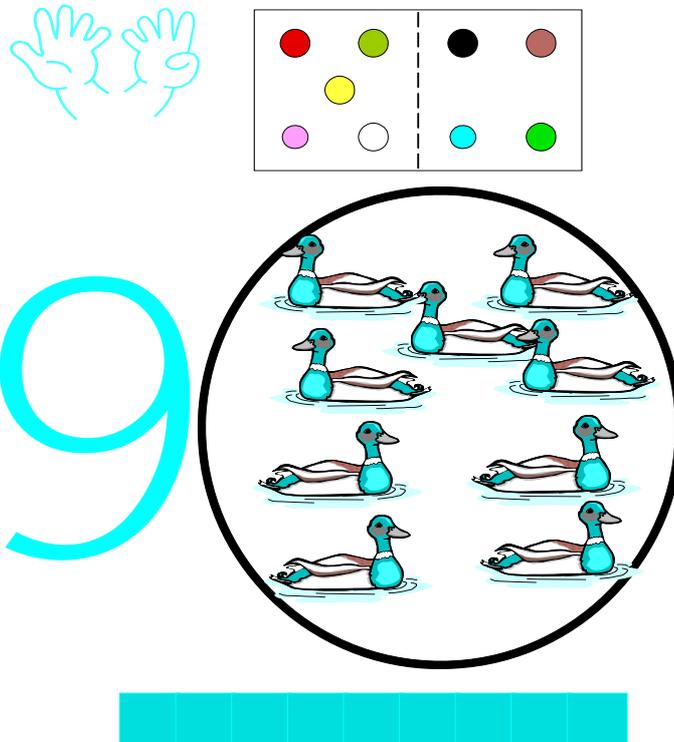
Esto nos lleva a reconocer el 4 como 2 grupos de 2 ó 1 de 3 y otro de 1. El 5 como un grupo de 2 y otro de 3...

Todos estos pasos los verbalizamos y los expresamos por escrito con los símbolos matemáticos.

Seguimos descomponiendo los números conocidos de todas las formas posibles. Mientras lo representamos. Cada niño va diciendo lo que ve y lo representa con números y signos. Poco a poco vamos ampliando los números de la misma forma. Así a la vez que conocen los números los conoce de forma completa con sus descomposiciones lo que le permite reconocer cantidades como las que vimos anteriormente con estrategias similares a las que empleamos los adultos. También podemos usar los dedos de la mano pero con visiones rápidas y de forma global para que cada número tenga un significado propio por si mismo.

Aquí presento unas cuantas imágenes del número 9 que uso en la escuela. El color corresponde al de las regletas o números de colores. La distribución de los puntos sigue el orden de los colores de las regletas (blanco, rojo, verde claro, rosa, amarillo, verde oscuro, negro, marrón y azul) para que al añadir o quitar no sea necesario cambiar la posición de ningún punto para reconocer el total. En los puntos

del dado si tengo 3 y añadido uno tengo que cambiar el punto del centro para formar el cuatro.



Pasos para los números 0 al 10

Conceptos previos

Mayor que...

Menor que...

Más largo que...

Más corto que...

Igual de largo que...

Emparejar objetos de dos conjuntos para ver que conjunto es mayor.

Hay los mismos que...

Hay más objetos que... (reconociéndolos a simple vista cuando la diferencia es grande, y a simple vista después de ordenados cuando la diferencia es pequeña)

Objetivos operativos. (Para alumnos de 5 a 6 años)

- Interiorizar los dígitos en el esquema corporal de los dedos de las manos.
- Establecer relación entre los números y cantidades de objetos discontinuos ordenados. (Puntos de los dados, cartas de la baraja) Sugiero criterio de agrupación que se ve en la figura del 9.
- Ordenar materiales discontinuos para reconocer la cantidad con una mirada sin contar. Ordenar los conjuntos de mayor a menor y viceversa.
- Ordenar materiales continuos por su longitud. (Regletas) Primero con 3 regletas y luego ir ampliando de una en una.
- Añadir y quitar los dedos que diga el profesor a partir de un número. (Siempre usando los dedos y añadiendo números que reconozca con facilidad)
- Establecer mentalmente relaciones, "mayor que", "menor que" entre longitudes de objetos hasta ser capaz de ordenarlos sin manipularlos. Decir éste es el mayor después éste... y éste el pequeño. (Con las regletas en la mesa del profesor decir el orden)
- Asociar dígito con cantidad.
- Contar progresivamente hasta 10. Primero con ayuda y después sin ella.
- Aprender a hacer la grafía de los números.
- Saber escribir los números al dictado, cuando los ven en regletas o en conjuntos ordenados (puntos del dado).
- Establecer correspondencias de igualdad entre los números, las regletas, los dedos y las agrupaciones ordenadas de objetos discontinuos.
- Ordenar los números primero manipulativamente con dígitos de cartulina o madera, después mentalmente. Dados varios números escribirlos de nuevo de forma ordenada.
- Observar el anterior y el siguiente de un número en la recta numérica y aplicarlo para escribir o señalar dichos números.
- Contar regresivamente de 10 a 1. Primero con ayuda y después sin ella.
- Asociar el 0 a un conjunto sin ningún elemento.
- Descomponer el número en dos sumandos con materiales continuos (regletas) y discontinuos (puntos del dado) Manipulando objetos, los dedos de la mano o regletas. Primero manipular y verbalizar la manipulación. Después simbolizar con números.
- Ante la vista de un número formado por puntos ordenados de dos colores representarlo como suma de un color más el otro igual al total.
- Ante la vista de un número formado por puntos ordenados de dos colores completar ecuaciones del tipo $2 + \dots = 7$; $7 - \dots = 2$
- Lanzar dos dados y expresar el resultado como suma de uno más otro.
- Descomponer mentalmente un número como suma de otros dos.
- Expresar de muchas formas un número como resultado de sumas o restas.

Los sistemas de numeración

Qué es el sistema de numeración

En cualquier cultura cuando quieren expresar la cantidad de objetos de un conjunto ponen un nombre y un signo para cada cantidad. Pero la economía del lenguaje y de la memoria exige establecer ciertas regularidades para no tener que inventar infinitos signos. También es común en todas las culturas el hacer agrupaciones de objetos para poder reconocer cantidades mayores a la decena. Lógicamente la mayoría de las culturas hacen agrupaciones de 10 objetos. El tener 10 dedos y ser estos el elemento de representación más fácil de usar sin duda ha condicionado que sea esta cantidad la base de los sistemas de numeración. Por base de los sistemas de numeración debemos entender este número máximo de elementos sueltos que se admiten. Llegado a este número se reúnen en una agrupación de orden superior. Si quisiéramos contar dinero agrupamos las monedas en montones de diez hasta que no tenemos suficiente para hacer otro montón de diez completo. Entonces contamos los montones de diez y las monedas sueltas. Si tenemos 63 veremos 6 montones de 10 y 3 monedas sueltas. (suponiendo que todas las monedas valen 1). Pero si tuviésemos cantidades mucho mayores, o sus equivalentes en billetes de 10, 100, 1000,... continuaríamos con la tarea. Con los montones de 10 o billetes de 10 haríamos montones de 10 billetes y/o montones de monedas. Estos nuevos montones (centenas) junto con los billetes de 100 se agruparían en montones de 10 centenas (millares) y así sucesivamente.

La diferencia entre culturas está en la forma de simbolizar estas agrupaciones. Los egipcios representaban cada unidad con un signo (|) que repetían hasta 9 veces, las decenas con otro (∩) que también repetían hasta 9 veces, las centenas con otro (una especie de cayado o línea espiral) y así sucesivamente. Los demás signos son más complejos. Los romanos y los griegos lo hacían de forma similar pero los signos eran letras. Al llegar a cinco lo representa con una letra distinta lo que facilita la lectura. Los chinos tienen un signo para cada número del uno al nueve lo que facilita la lectura y el cálculo respecto al sistema romano. A estos dígitos le añade un signo para señalar si son decenas, centenas... Nuestro actual sistema de numeración procede de la India que a través del mundo musulmán pasó a Europa. Es el más práctico y eficaz. Sólo necesita de 10 signos y por su posición relativa se sabe si son unidades, decenas, centenas... También en la América precolombina se empleaba este sistema de numeración posicional, pero en base 20. Uno de los sistemas de numeración más antiguos que se conocen es el de Mesopotámica. Es posicional como el nuestro, pero en base 60. En la actualidad se conservan medidas en esta base, como las angulares o las de tiempo en horas, minutos y segundos.

El juego del mus: un modelo útil para la enseñanza del sistema de numeración

Para jugar al mus se emplea un sistema de numeración propio. No usa signos, se basa en la percepción directa de la cantidad total. Para ello se emplean “amarracos” que pueden ser cualquier objeto: monedas, piedrecillas... Como se suele jugar por parejas, un miembro de la pareja coge los “amarracos” de primer orden hasta 4. Cuando tienen el 5º se convierte en una unidad de 2º orden. Para ello se

cambian los 5 “amarracos” de primer orden por uno de segundo orden. Las unidades de segundo orden son los “amarracos” del 2º compañero de juego. Como se puede ver fácilmente el mayor número que se puede tener es de 4 de 2º orden que valen $4 \times 5 = 20$ y 4 de 1º orden. Por tanto el mayor número representado es el 24. Por eso las partidas de mus se juegan siempre a 25 puntos, es decir cuando se necesita el 3º orden se acabó la partida.

Como se puede ver es un sistema de numeración en base 5. Es posicional por quién tiene las piezas, no por su posición relativa como en nuestro sistema de numeración. No necesita ni símbolos ni nombrar los números, pues a simple vista y de forma directa se reconoce la cantidad. Esta forma de ver las cantidades que resulta muy limitada sólo a pequeñas cantidades, es la que considero como más útil desde el punto de vista didáctico en el aprendizaje del sistema de numeración. Una vez entendido el mecanismo de la numeración y su representación con los símbolos se puede generalizar de forma abstracta hasta el infinito.

Pasos para la numeración hasta el 100

Conceptos previos

Los objetivos operativos de los números de 0 a 10.

Objetivos operativos. (Para alumnos de 5 a 7 años)

- Contar cantidades de entre 10 y 100 empaquetando materiales discontinuos en grupos de diez. (Se pretende desarrollar el concepto de decena al comprobar que para contar tiene que hacer montones de 10. Luego vera que hay decena y unidades que no llegan a completar otra decena)
- Medir longitudes menores de 100 cm. con regletas de 10 cm. y de 1 cm.
- Pesar masas menores de 100 grs. con pesas de 10 grs. y precisar con pesas de 1 gramo para las unidades.
- Representar numéricamente las cantidades y medidas con tantos grupos de 10 y tantas unidades.
- Asociar decenas con grupos de 10.
- Reconocer qué número corresponde a cada cantidad o medida de la magnitud.
- Contar progresivamente de 0 a 100.
- Contar de 10 en 10.
- Reconocer en cada número las unidades y decenas que lo forman.
- Expresar un número como suma de decenas exactas más unidades.
- Añadir y quitar elementos a una cantidad agrupada y ver como varia el número. (Primero trabajaremos sin cambio de decena. Añadiremos o quitaremos decenas o unidades que no den un cambio de decena.)
- Reconocer entre qué decenas se encuentra un número.
- Reconocer la decena más próxima a un número.
- Contar regresivamente del 100 al 0.

- Hacer series progresivas y regresivas con bolitas reconociendo el número sin contar y escribiéndolas en el cuaderno. Para ello añadimos o quitamos elementos a una cantidad agrupada (con bolitas). Si la serie es de dos en dos cada vez añadimos dos bolitas más y ver como varia el número. Para esto usamos dos cartulinas de distinto color: una para las unidades y otra para las decenas. En ambas haremos diez circulitos para ver cuando está completa la decena. Cada vez que se completa una decena se empaqueta y la añadimos a la cartulina de las decenas. Las bolitas que se ponen o se quitan se colocaran sobre una cartulina de intercambio para no equivocarse cuando se completa una decena y hay que seguir añadiendo bolitas. Al terminar de completar la decena se debe preguntar ¿cuál puede ser el resultado final cuando terminemos de añadir o quitar todas las bolitas? Así irán descubriendo estrategias apropiadas para el cálculo mental mediante la descomposición del número en dos sumandos, uno hasta completar la decena y el resto la cifra de las unidades.

Conclusión y aclaraciones

Con este artículo pretendo explicar mi experiencia de 27 años como maestro de primaria (alumnos de 6 a 11 años) y más escasa en infantil (3 a 5 años) en la enseñanza de la numeración. Llevo años prestando especial atención a las estrategias que usan los niños para el aprendizaje de la numeración. No sólo en la escuela sino también fuera de ella. Después de esta observación expreso mi opinión en forma de hipótesis que sería necesario confirmar mediante un estudio experimental. Pero esta confirmación experimental está fuera de mi alcance como maestro. También quisiera resaltar la importancia que puede tener a largo plazo en el aprendizaje el uso de unas estrategias eficaces frente a otras poco eficaces.

En cuanto a los sistemas de numeración no pretendo dar una explicación detallada de ellos. Solamente una pequeña reseña que ayude a entender como trabajar estos conceptos sobre todo a aquellos maestros que no están familiarizados con las matemáticas. Una explicación más detallada se puede ver en la enciclopedia de Internet "Wikipedia".

Nota: He desarrollado dos aplicaciones de Clic y de Jclic para trabajar con esta metodología los 10 primeros números. El primero está a vuestra disposición de forma gratuita en la siguiente dirección: http://clic.xtec.net/db/act_es.jsp?id=3155. La segunda parte estará en la red próximamente.

Eduardo Martín Sánchez, es Maestro diplomado con la especialidad de Matemáticas y Ciencias de la Naturaleza, por la Universidad de Salamanca.
Maestro de primaria del C.E.I.P. Cristóbal Colón de El Puerto de Santa María, Cádiz.
Ha impartido o presentado ponencias en varios cursos o jornadas del C.E.P. de Cádiz.
Coordinador de los grupos de trabajo. Ha desarrollado las aplicaciones informáticas de Clic y Jclic: Los primeros números por vía visual directa I y Los primeros números por vía visual directa II.
E.mail: eduarms_martin@yahoo.es