UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2008, Número 16, páginas 247-250
ISSN: 1815-0640

El rincón de los problemas

Uldarico Malaspina Jurado

Pontificia Universidad Católica del Perú
umalasp@pucp.edu.pe

Problema[1]

Se escriben los números naturales del 1 al 9 inclusive y luego se pintan usando los colores rojo, azul y verde. Cada número se pinta con un solo color, de tal modo que cada número pintado de rojo es igual a la suma de un número pintado de azul más un número pintado de verde.

¿Cuál es la máxima cantidad de números que se puede pintar de rojo?

Tal como está propuesto, éste es un problema no rutinario de optimización, cuya solución completa requiere una demostración de que la cantidad que se dé como respuesta sea efectivamente la máxima; sin embargo, pensando en usar este problema poniendo más énfasis en el aprendizaje que en la evaluación, resulta muy interesante explotar las posibilidades didácticas y matemáticas que ofrece, al describir la situación y proponer diversas actividades individuales y grupales de dificultad graduada, que orienten hacia su solución completa. Por su carácter lúdico y por requerir básicamente saber sumar los nueve primeros números naturales y reconocer colores, podría proponerse aún en los primeros grados de primaria, con las adecuaciones del caso.

A continuación hacemos una propuesta de actividades, a partir de la cual se puede hacer modificaciones según el nivel educativo en el que se desee aplicar:

Situación:

Se escriben los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9 y luego se pintan según las siguientes reglas:

1. Sólo se pueden usar los colores rojo, azul y verde.
2. Cada número se pinta con un solo color.
3. Cada número pintado de rojo es igual a la suma de un número pintado de azul más un número pintado de verde.

[1] Problema creado por el ex olímpico peruano Israel Díaz y propuesto en el Perú, a los alumnos de primero y segundo años de secundaria, en la etapa final de la Olimpiada Nacional Escolar de Matemáticas del 2008.

Actividades individuales

a) Juan pintó los números de la siguiente manera:

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Pedro dice que Juan no ha respetado todas las reglas.

Examina si Pedro tiene razón. En caso que la tenga, ¿Cuál de las reglas no respetó Juan? ¿Por qué? ¿Se puede cambiar el color de uno de los números y tener así todos los números pintados respetando las reglas? ¿Cuál? ¿Hay sólo una posibilidad?

b) Carlitos empezó a pintar los números y se le ocurrió pintar el 2 de azul, el 6 de verde y el 9 de rojo. Muestra que es posible mantener estos colores del 2, 6 y 9 y terminar de pintar los nueve números respetando las reglas.

c) Examina si es posible pintar los nueve números respetando las reglas y que al final el 4, el 5 y el 9 sean rojos.

d) Examina si es posible pintar los nueve números de modo que al final se tenga cinco números pintados de rojo.

Actividades grupales

A. Comparar y examinar las respuestas dadas en las actividades individuales.

B. Dar una respuesta del grupo a cada una de las actividades individuales.

C. María afirma que cualquier par de números puede pintarse del mismo color. Examinar si esta afirmación es verdadera.

D. Examinar si es posible pintar los nueve números, de modo que al final se tenga más de tres números pintados de rojo

E. Demostrar que cuatro es la máxima cantidad de números que se puede pintar de rojo.

F. Crear un problema a partir de una situación similar a la dada y resolverlo.

La idea es proponer actividades que faciliten la comprensión de las reglas, sobre todo la tercera. Quien oriente el trabajo de los participantes debe tener clara la condición necesaria que se establece en esta regla; concretamente, si un número se pinta de rojo, necesariamente debe haber uno pintado de verde y otro pintado de azul, cuya suma sea aquel pintado de rojo.

Formalmente, si denotamos $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ y $aR, bA\ y\ cV$ significan que los números a, b y c están pintados de rojo, azul y verde respectivamente, la tercera regla establece que:

$$aR \Rightarrow \exists p \in M \wedge \exists q \in M,\, p \neq q,\, tales\ que \quad pA \wedge qV \wedge p + q = a$$

Sin embargo, si – por ejemplo – el 2 está pintado de azul y el 4 de verde, no necesariamente el 6 debe estar pintado de rojo.

Comprender bien esta regla, lleva a afirmar que – en la primera actividad individual – Pedro tiene razón, pues el 7 está pintado de rojo y no hay dos números, uno pintado de azul y otro de verde, cuya suma sea 7. La situación se corrige si el 2 se cambia al color azul. Otra posibilidad es cambiar a verde el color del número 1, pero esto compromete el color del 4. El lector queda invitado a corregir la situación cambiando el color de otro número.

La tercera actividad grupal permite trabajar la idea de contraejemplo, que es tan importante en la matemática y que lamentablemente su presencia no es significativa en los textos ni en las clases. Para desarrollar esta actividad, basta examinar si ese color común puede ser el rojo, ya que es el que conlleva una condición necesaria. Se puede concluir que la afirmación de María es falsa mostrando como contraejemplo que existe un par de números que no pueden ser del mismo color: el 3 y el 4 no pueden ser ambos rojos, pues 4 sólo puede expresarse como suma de 1 y 3 (como suma de 2 y 2 es imposible, pues 2 sólo puede ser pintado de un color); en consecuencia, si 4 es rojo, el 3 tiene que ser azul o verde. ¿Existen otros contraejemplos para demostrar la falsedad de la afirmación de María? Ciertamente con el mostrado es suficiente, pero dejamos la inquietud para el lector.

Para concluir, damos una demostración de que 4 es la mayor cantidad de números que se puede pintar de rojo. Hemos optado por una demostración que no necesariamente es la más sencilla, pero permite usar criterios generales, válidos también para problemas más complicados.

En la demostración hacemos uso del siguiente criterio:

> Si se encuentra una cota superior *k* del conjunto de valores posibles que se examina en el problema de optimización y se exhibe un caso que corresponde a esa cota (es decir, se muestra que es posible alcanzar ese valor *k*), entonces el máximo es *k*.

Veamos:

Luego de unos cálculos, encontramos casos como los siguientes

Verde	Azul	Rojo
1	3	4
2	6	5
	9	7
		8

Verde	Azul	Rojo
4	1	5
6	2	7
	3	8
		9

Como no encontramos casos en los que haya más de cuatro números pintados de rojo, conjeturamos que 4 es la mayor cantidad de números que se pueden pintar de rojo, respetando las reglas.

Pasemos de la conjetura a la demostración:

1. Sean *r, a* y *v* las cantidades de números pintados de rojo, azul y verde, respectivamente.
2. Es claro que *r, a* y *v* son números enteros no negativos y que
   $r + a + v = 9$
3. Supongamos que sea posible que $r \geq 5$
4. En consecuencia $a + v \leq 4$
5. Sumando un número azul con los *v* números verdes, obtenemos *v* sumas; y como son *a* números azules, en total obtenemos *av* sumas (considerando inclusive las repeticiones que se pudieran presentar).
6. Como cada rojo tiene que ser la suma de un azul y un verde, debe ocurrir que $r \leq av$
7. Sin embargo, como $a + v \leq 4$ y todas las posibilidades aritméticas resultan de:

   $a = 0$ y $v \in \{0,1,2,3,4\}$

   $a = 1$ y $v \in \{0,1,2,3,\}$

   $a = 2$ y $v \in \{0,1,2\}$

   $a = 3$ y $v \in \{0,1\}$

   $a = 4$ y $v = 0$,

   es claro que en todos los casos $av \leq 4$
8. En consecuencia, por lo obtenido en los pasos 6 y 7 y por la transitividad de la relación de orden, $r \leq 4$
9. Esto es una contradicción, pues al inicio supusimos que $r \geq 5$
10. Por consiguiente, la cantidad de números que se pueden pintar de rojo es a lo más 4. Así, hemos encontrado que 4 es una cota superior del conjunto de valores posibles y hemos mostrado hasta dos casos en los que efectivamente hay cuatro números pintados de rojo. Con esto queda demostrado que 4 es la máxima cantidad de números que se puede pintar de rojo.

El lector queda invitado a pensar en demostraciones más sencillas. Una posibilidad es comenzar observando que – obviamente – no pueden ser 9 rojos ni 8 rojos, y analizando que tampoco pueden ser 7 rojos, pues con sólo dos números, uno azul y otro verde, es imposible obtener las 7 sumas diferentes que se requerirían. Se puede continuar, haciendo análisis y descarte similar al considerar 6 rojos y 5 rojos.