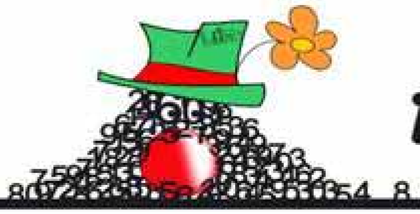
UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2008, Número 16, páginas 239-245
ISSN: 1815-0640



¡¡Esto no es serio!!

José Muñoz Santonja

Aún más matemáticas falaces

La primera norma que debe seguir el encargado de una sección en un periódico es: “nunca traicionaré a mis lectores”. Nosotros queremos seguir esa norma a rajatabla y amparándonos en el dicho de que quien avisa no es traidor, este trimestre continuamos con las falacias matemáticas.

Hemos trabajado los errores matemáticos en demostraciones numéricas o utilizando ecuaciones simples, vamos en esta ocasión a ver otro tipo de demostración utilizando funciones algo más complicadas, aunque veremos que muchas de ellas son demostraciones muy simples.

Vamos a comenzar con un bloque utilizando desigualdades.

Demostración de que 0>3

Elegimos un número cualquiera mayor que 3	$x > 3$
Multiplicamos ambos términos por 3	$3x > 9$
En ambos miembros restamos x^2	$3x - x^2 > 9 - x^2$
Descomponemos en producto	$x\cdot(3 - x) > (3 + x)\cdot(3 - x)$
Dividimos ambos miembros por $3 - x$	$x > 3 + x$
Como último paso simplificamos el valor común x y llegamos a:	$\mathbf{0 > 3}$

Demostración de que 1 < 0

Esta demostración la encontré en una página, uno de cuyos autores es gran amigo y que aconsejo porque tiene una gran variedad de contenidos relacionados con las matemáticas www.matesymas.es. A pesar de su simplicidad creo que resulta curiosa.

Tomamos un número cualquiera que sea negativo	$x < 0$
Dividimos la desigualdad por x	$\frac{x}{x} < \frac{0}{x}$
De donde, operando en cada término, llegamos a:	**$1 < 0$**

Otra demostración de que 1 < 0

A la fuerza nos van a convencer de que uno es más pequeño que cero porque veamos la siguiente demostración utilizando logaritmos, que ya son palabras mayores, aunque en el fondo es la misma demostración anterior.

Tomemos un número menor que la unidad	$x < 1$
Tomamos logaritmo neperiano en ambos miembros	$\text{Ln } x < \ln 1$
Dado que el ln 1 vale 0	$\text{Ln } x < 0$
Basta dividir por el ln x y llegamos de nuevo a:	**$1 < 0$**

Siempre que sea posible, me gusta meter alguna aportación personal al tema que estemos tratando. Así que vamos a ver una variación que yo utilizo en clase para llamar la atención a los alumnos sobre las operaciones que se realizan con desigualdades, y cómo hay que tener un cuidado especial, que normalmente ellos no tienen, al realizar las inecuaciones.

En primer lugar les pregunto que si cualquier número verifica la siguiente desigualdad

$$\mathbf{x + 1 > x}$$

tras obtener una respuesta positiva les hago el siguiente razonamiento.

Elevamos ambos miembros al cuadrado	$(x+1)^2 > x^2$
Desarrollamos el cuadrado	$x^2 + 2 \cdot x + 1 > x^2$
Simplificamos el valor común	$2 \cdot x + 1 > 0$
Si ahora resolvemos la inecuación	$x > -\frac{1}{2}$

Por lo tanto, con la demostración anterior resulta que la desigualdad inicial de $x+1>x$ sólo se cumple para los números mayores que $-\frac{1}{2}$. Mis alumnos, generalmente, tienen dificultad para localizar rápidamente dónde está el paso erróneo y tardan su tiempo en ver dónde han cometido el error.

En una de las demostraciones anteriores hemos utilizado el logaritmo neperiano, vamos a ver un par más de demostraciones donde también lo utilizamos. Aunque, por supuesto, las demostraciones serían exactamente iguales si utilizáramos un logaritmo de cualquier base.

Demostración de que 2 < 1

Partimos de una desigualdad con fracciones	$\frac{1}{4} < \frac{1}{2}$
Escribimos el primer término como una potencia	$\left(\frac{1}{2}\right)^2 < \frac{1}{2}$
Tomamos a continuación logaritmos en ambos miembros	$\ln\left(\frac{1}{2}\right)^2 < \ln\left(\frac{1}{2}\right)$
Utilizando las propiedades del logaritmo de una potencia	$2 \cdot \ln\left(\frac{1}{2}\right) < \ln\left(\frac{1}{2}\right)$
Y dividiendo ahora por el ln(1/2) llegamos por fin a:	**2 < 1**

Demostración de que 1 = –1

Por supuesto, los logaritmos no pueden liarla solo en las desigualdades, también en las igualdades pueden conseguir resultados asombrosos como el siguiente.

Partimos de una igualdad	$(-1)^2 = 1$
Tomamos logaritmo y aplicamos la propiedad del logaritmo de una potencia	$2\cdot\ln(-1) = \ln 1$
Como el logaritmo de 1 siempre vale cero	$2 \ln(-1) = 0$
Dividimos entre 2	$\ln(-1) = 0$
Aplicando lo mismo que en segundo paso	$\ln(-1) = \ln 1$
Y quitando los logaritmos de la igualdad:	**–1 = 1**

José Muñoz Santonja

Vamos a continuación a ver un par de falacias utilizando el concepto de series y sucesiones.

Demostración de que 0 = 1

Esta primera seguramente será conocida por todos nuestros lectores, pues es de las que se utilizan siempre para llamar la atención sobre la suma de series infinitas.

Partimos de que 0 se puede expresar como suma de infinitos ceros	$0 = 0 + 0 + 0 + \ldots.$
Los ceros se pueden escribir como suma de dos valores opuestos	$0 = (1-1) + (1-1) + (1-1) + \ldots.$
Aplicando la propiedad asociativa	$0 = 1 + (-1+1) + (-1+1) + (-1+1) + \ldots$
Y anulando de nuevo la suma de elementos opuestos	$0 = 1 + 0 + 0 + 0 + \ldots..$
De donde obtenemos lo previsto	**0 = 1**

Esta demostración se puede generalizar a cualquier número distinto del 1, pero también podemos seguir aplicándola y ver que todos los números son iguales, ya que si en el penúltimo apartado volvemos a hacer los pasos vistos:

$$0 = 1 + (1-1) + (1-1) + \ldots$$

$$0 = 1 + 1 + (-1+1) + (-1+1) + \ldots$$

$$0 = 2 + 0 + 0 + 0 + \ldots$$

Y por tanto llegamos entonces a que 0 = 2 y de ahí hasta el infinito.

Demostración de que 2 = 1

En este caso vamos a incluir una nueva herramienta, la derivada. Tomamos un valor x que sea distinto de cero, para poder dividir después por él.

Partimos de una igualdad en la que se fundamenta el producto en una suma repetida.	$x^2 = x + x + x + \ldots\ldots. + x$ (x veces)
Derivamos respecto de x en ambos miembros.	$2\cdot x = 1 + 1 + 1 + \ldots.. + 1$ (x veces)
Por tanto obtenemos la igualdad	$2\cdot x = x$
Dividiendo por x encontramos la falacia.	**2 = 1**

A continuación, vamos a ver dos demostraciones muy parecidas de que 1 y –1 son la misma cosa utilizando la unidad imaginaria.

Nueva demostración de que 1 = –1

Partimos de una igualdad	$-1 = -1$
Convertimos cada término en una fracción	$\frac{1}{-1} = \frac{-1}{1}$
Tomamos la raíz cuadrada en ambos miembros	$\sqrt{\frac{1}{-1}} = \sqrt{\frac{-1}{1}}$
Descomponemos en fracción	$\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{1}}$
Utilizamos el valor de la unidad imaginaria.	$\frac{1}{i} = \frac{i}{1}$
Quitamos los denominadores multiplicando en cruz	$1^2 = i^2$
Dado que $i^2 = -1$ llegamos a la igualdad buscada	$1 = -1$

Venga otra demostración de que 1= –1

Veamos como el proceso anterior se puede complicar un poco más. Ya sabemos que si metemos más operaciones en una demostración, conseguimos que aumente exponencialmente el número de personas que se pierden en ella, con lo que aún es más difícil localizar el paso donde se han aplicado incorrectamente las reglas matemáticas.

Para no repetir innecesariamente los pasos de la demostración anterior, vamos a saltar directamente al paso número 5, pues los anteriores serían exactamente iguales.

Partimos de la igual del paso 5º anterior	$\frac{1}{i} = \frac{i}{1}$
Dividimos por 2	$\frac{1}{2i} = \frac{i}{2}$
Sumamos a ambos miembros $\frac{3}{2i}$	$\frac{1}{2i} + \frac{3}{2i} = \frac{i}{2} + \frac{3}{2i}$
Multiplicamos ambos miembros por la unidad i	$i \cdot \left(\frac{1}{2i} + \frac{3}{2i}\right) = i \cdot \left(\frac{i}{2} + \frac{3}{2i}\right)$

Efectuamos los productos $\frac{i}{2i}+\frac{3i}{2i}=\frac{i^2}{2}+\frac{3i}{2i}$

Ahora simplificamos todo lo que se pueda $\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=\frac{-1}{2}+\frac{3}{2}$

Y por último efectuamos la operación de cada miembro **2 = 1**

Obsérvese que en la demostración anterior podríamos haber dado un giro distinto si hubiésemos operado en el paso 3, pues habríamos obtenido $\frac{4}{2i}=\frac{i^2+3}{2i}$ por lo que al acabar con la igualdad $\frac{4}{2i}=\frac{2}{2i}$ el paso siguiente hubiese sido demostrar que 4 = 2.

Última demostración de que 1 = –1

Vamos a acabar con las demostraciones de que el signo es irrelevante cuando se trabaja con el 1. Esto es algo que nuestros alumnos conocen íntimamente, por eso no tienen ningún reparo en quitar el signo se pueda o no. Voy a repetir una demostración muy simple, pero que tal como decían en el blog donde la encontré (lamento haber perdido la dirección), para "vacilar" a los de letras ya sirve.

Vamos a encadenar todas las operaciones en una sola igualdad:

$$1=\sqrt{1}=\sqrt{(-1)\cdot(-1)}=\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}=i\cdot i=i^2=-1$$

Vamos ahora con la última falacia matemática, en este caso utilizando trigonometría.

Demostración de que 0 = 4

Partimos de la igualdad fundamental de la trigonometría $sen^2x + cos^2x = 1$

Despejamos el término del coseno $cos^2 x = 1 - sen^2 x$

Tomamos la raíz cuadrada $\cos x=\sqrt{1-sen^2x}$

Sumamos la unidad a ambos miembros $1+\cos x=1+\sqrt{1-sen^2x}$

Elevamos al cuadrado $(1+\cos x)^2=\left(1+\sqrt{1-sen^2x}\right)^2$

Tomamos a continuación el valor de 180º para x $(1-1)^2=\left(1+\sqrt{1-0}\right)^2$

De donde llegamos a lo esperado **0 = 4**

Con esta última demostración vamos a hacer algo que hasta el momento no habíamos hecho, incluir la explicación, y vamos a explicar el porqué.

La mayoría de las demostraciones que hemos incluido en estas dos entregas aparecen en muchos lugares de Internet, uno de ellos es un artículo que se puede descargar en pdf desde la dirección

http://www-fa.upc.es/websfa/fluids/TJM/pdf/Paradojas_acertijos_y_demostraciones_invalidas.pdf

El artículo, escrito por el profesor Roberto Muñoz Sánchez, lleva por título, tal como se ve en la dirección de Internet, *Paradojas, acertijos y demostraciones inválidas*. Es muy interesante porque hace una recopilación de las paradojas y demostraciones más usuales, y en concreto de estas últimas añade una solución explicando dónde está el fallo. Pero en esta última demostración dice no tener claro donde se encuentra el error, por eso lo explicaremos aquí.

La falacia se encuentra en el paso 3º cuando hallamos la raíz cuadrada. Ya sabemos que al extraer una raíz de índice par obtenemos dos posibles soluciones una positiva y otra negativa. Por regla general se toma sólo la positiva, pero hay que tener cuidado en casos extremos como éste, porque no pueden surgir errores. En nuestro caso en concreto, ya sabemos que el coseno para 180º vale –1 por lo que al extraer la raíz cuadrada deberíamos haber tomado la parte negativa y de esa manera el desarrollo no hubiese terminado en una falsedad.

Con esto terminamos con las demostraciones falaces, no sé si alguno de los lectores tendrá alguna otra que conozca y que no se encuentre en esta relación, si quiere compartirla con todos nosotros, agradeceríamos que nos la enviara a la dirección josemunozsantonja@yahoo.es. Un afectuoso saludo y hasta la próxima.