UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2008, Número 16, páginas 169 - 182
ISSN: 1815-0640

Equação: noção matemática ou paramatemática?

Alessandro Jacques Ribeiro

Resumen

O presente trabalho tem por objetivo investigar se a noção de equação é concebida na literatura como uma noção matemática ou como uma noção paramatemática, segundo as idéias da Transposição Didática de Chevallard (1991). A partir da literatura analisada verificou-se que não há consenso entre os autores escolhidos quanto à apresentação ou não de "definição" para a noção de equação. Pode-se concluir ainda que equação é concebida como uma noção paramatemática. Como reflexão final é deixada a seguinte questão: Como abordar equação e seus diversos significados no processo de ensino e aprendizagem da Matemática?

Abstract

The aim of this paper is to investigate whether the notion of equation is conceived in the literature as a mathematic notion or as a paramathemathic notion, following to the ideas of Chevallard's Didactic Transposition (1991). From the analyzed literature, it was verified that there is not an agreement among the chosen authors about the presentation of a "definition" for the notion of equation. It was also possible conclude that equation is considered as a paramathemathic notion. As a final reflection, the following question is raised: How can we approach equation and its different meanings in the teaching and learning of Mathematics?

Introdução

Esse trabalho originou-se das análises dos resultados de pesquisas como Kieran (1992), que levanta o fato de se trabalhar em demasia com o aspecto processual da Álgebra; as situações como as vividas por Cotret (1997) em sua pesquisa sobre as dificuldades que surgem quando do equacionamento de problemas escritos; Ribeiro (2001) que identificou um resultado pouco expressivo quando alunos de 13-14 anos trabalharam com questões envolvendo equações e em Dreyfus & Hoch (2004) que discutem a dificuldade que alunos de 14-17 anos têm para reconhecer e tratar as estruturas internas das equações.

Kieran (1992) destaca a necessidade de não se permitir que os alunos passem muito tempo entendendo e concebendo as expressões algébricas e equações como sendo um amontoado de letras e símbolos sobre os quais se opera somente com números. A autora levanta a questão da importância de propiciarmos aos alunos, situações em que eles percebam a possibilidade de entender essas entidades – expressões algébricas e equações – como objetos sobre os quais recaem propriedades e se podem efetuar diversas outras operações, além de somar, subtrair, dividir ou multiplicar.

Cotret (1997) em sua pesquisa sobre os problemas e dificuldades que surgem no equacionamento de problemas escritos, discute a pertinência e adequação das equações que são usadas para modelar problemas intra e extra Matemática. Ela reconhece que muitas vezes não sabemos justificar a escolha de um determinado modelo de equação para representar um certo problema, a não ser pela resolução e pela busca da resposta do problema. Apresenta ainda uma reflexão muito pertinente ao meu trabalho, uma vez que apresenta uma discussão sobre o fato de se considerar – ou não – a resolução de equações como sendo um saber matemático e que, em se considerando assim, se é importante então que se observe isso – a resolução de equações – do ponto de vista do processo de modelização (ou modelagem).

Ribeiro (2001), ao analisar o desempenho de estudantes de faixa etária entre 13-14 anos de escolas públicas brasileiras, em relação às questões de Álgebra elementar, observa que vários desses alunos obtiveram um resultado insatisfatório quando estavam trabalhando com questões envolvendo equações, tanto em situações contextualizadas, ou seja, aquelas que envolvem o equacionamento de problemas verbais, como em situações não-contextualizadas, nas quais as equações são dadas e o que se exige basicamente são procedimentos de resolução.

Outra pesquisa interessante, que faz parte do presente cenário, é a de Dreyfus & Hoch (2004), que discutem uma abordagem estrutural para as equações. No trabalho desenvolvido com alunos de idade equivalente aos alunos do nosso ensino médio, os autores solicitaram que os alunos falassem o que pensavam sobre equação. Dentre os resultados dessa pesquisa, o que mais nos interessou foi a constatação dos autores sobre a pouca capacidade daqueles alunos em reconhecer a estrutura interna de uma equação, caracterizando a idéia de equação, na maioria das vezes, como um processo de resolução, i.e., relacionando equação com o processo de sua resolução.

Aliando os resultados das pesquisas apresentadas às investigações feitas com professores em formação continuada e alunos de Licenciatura em Matemática, acerca de suas idéias sobre a noção de equação, foi possível perceber muitas vezes que, excetuando-se a ênfase dada na busca da solução da equação, ou seja, na aplicação de métodos e técnicas para a sua resolução, pouco se discutia sobre o que eles pensavam a respeito da noção de equação.

Nesse sentido comecei a me questionar sobre o porquê de uma noção aparentemente simples, como a noção de equação, gerar tantas dúvidas quando se levantavam questões sobre o que se entende, de um ponto de vista conceitual, por equação. Assim, esse trabalho tem por objetivo: **Investigar se a idéia de equação é apresentada na literatura como uma noção matemática ou como uma noção paramatemática**. Esse objetivo parece conduzir à seguinte questão de pesquisa: **É possível considerar equação como uma noção matemática?** Baseando-se nas leituras de pesquisas apresentadas no cenário da Educação Matemática mundial, no que se refere ao ensino e aprendizagem da Álgebra; em minha experiência como professor-pesquisador e no objetivo declarado para este trabalho, apresento um estudo de cunho teórico desenvolvido acerca da noção de equação na literatura especializada sobre o assunto.

Aspectos teorico-metodologicos

Levando-se em conta a natureza teórica do presente trabalho, iniciei minha investigação com um levantamento bibliográfico no qual selecionei algumas pesquisas nacionais e internacionais na área da Educação Matemática, como as apresentadas anteriormente, pesquisas essas que apontaram para a necessidade de uma investigação bibliográfica que pudesse elucidar as indagações que foram surgindo, as quais já foram apresentadas na secção anterior.

Nesse sentido, prossegui minhas investigações com um levantamento e um estudo feito em obras de diferentes naturezas, como: livros de fundamentos da Matemática, dicionários matemáticos e livros didáticos, sempre buscando compreender como são apresentadas as "idéias" relacionadas com o termo equação, não perdendo de vista à questão norteadora deste trabalho.

As "idéias" que encontrei nas obras investigadas, as quais apresentarei em seguida, são analisadas considerando o trabalho de Chevallard (1991) – *Sobre a noção de Transposição Didática* – trabalho esse que me forneceu elementos teóricos no sentido de buscar uma resposta para a questão de pesquisa anunciada para o presente trabalho.

As discussões propostas por Chevallard (1991), trazem à tona questões referentes aos objetos do saber e outros objetos, principalmente os objetos a ensinar. Chevallard destaca que *um "objeto do saber" somente passa a existir como tal, no campo da consciência dos agentes do sistema de ensino, se a sua inserção no sistema dos "objetos a ensinar" parece útil à economia do sistema didático"*. (Chevallard, 1991, p. 49)

Porém, isso não quer dizer que um objeto do saber seja somente identificado e designado como objeto a ensinar, a partir do momento em que a transposição didática esteja potencialmente concluída, pois, na verdade, essa continua mesmo depois da introdução didática do objeto do saber.

Mas, de fato, o que é um objeto do saber? Para o professor de matemática, por exemplo, é necessário que se coloque nessa categoria certamente as noções matemáticas, como a adição, o círculo, a derivação, as equações diferenciais lineares de primeira ordem com coeficientes constantes, dentre outros, lembrando-se que esses exemplos fazem sentido numa mesma comunidade de professores de matemática.

Contudo, ao lado das noções matemáticas, colocam-se as que Chevallard chama de **noções paramatemáticas**, como, por exemplo, a noção de parâmetro, a **noção de equação**, a noção de demonstração. Essas noções são úteis para a atividade matemática, mas não são normalmente objetos de estudo para o matemático.

É importante, que fique bem entendido, que não há uma divisão absoluta entre os dois domínios: a noção de equação e a noção de demonstração são hoje objetos matemáticos em lógica matemática, por exemplo, e essa distinção então deve sempre se referir à uma prática de ensino precisa (nível do curso, lugar, tempo, setor da matemática, etc.).

Em geral, as noções matemáticas são construídas e sua construção pode tomar a forma de uma definição ou de uma construção propriamente dita, seguida de uma demonstração. Além dessa construção – que é muitas vezes uma definição – as noções matemáticas têm propriedades e têm também aplicações intra e extra matemática.

A propósito, Chevallard chama a atenção para:

> (...) *dos objetos do saber* que são as *noções matemáticas*, o professor espera que o aluno saiba (eventualmente):
> - dar a *definição* (ou retraçar a construção);
> - dar as *propriedades* (“principais”), as *demonstrar*;
> - *reconhecer* um certo número de *ocasiões de emprego*;
> - etc. (CHEVALLARD, 1991, p. 51)

Ele afirma ainda que somente os objetos do saber podem vir a se tornar objetos de ensino, e que as noções paramatemáticas não se tornam objetos de ensino, porém, são necessárias no processo de ensino e aprendizagem dos objetos matemáticos propriamente ditos, funcionando como objetos de saber auxiliares. Ele diz: *“Eles devem ser ‘aprendidos’ (ou ainda:’conhecidos’), mas eles não são ’ensinados’ (segundo o plano de ensino das noções matemáticas)*. (Chevallard, 1991, p. 51)

Outro ponto importante que Chevallard toca faz referência ao fato de que, normalmente, somente as noções matemáticas são objetos de uma avaliação direta por parte do professor. Vejamos na citação abaixo, exemplos dessa afirmação:

> O professor solicitará, por exemplo, ao aluno para “resolver a equação: $x^2 - 8x + 9 = 0$”. As noções paramatemáticas são normativamente excluídas de uma avaliação direta. O aluno que não consegue responder à questão: “Resolver e discutir a equação $x^2 - \lambda x + (\lambda + 1) = 0$”, o professor poderá concluir que o aluno “não compreendeu a noção de *parâmetro*”. Em um outro nível, ele dirá, por exemplo, que o aluno “não compreendeu a noção de *demonstração*”. O professor de matemática que, numa festa mundana, encontra um convidado que lhe declara: “Ah, você é professor de matemática! Eu, eu nunca compreendi porque $ax^2 + bx + c = 0$”, poderá concluir que este último “não compreendeu a noção de *equação*”. (Chevallard, 1991, p. 51)

Além das noções matemáticas e das noções paramatemáticas existe uma camada mais profunda de noções, as quais são mobilizáveis implicitamente pelo contrato didático (Brousseau, 1986), que Chevallard chamou de noções protomatemáticas, como, por exemplo, a noção de padrão.

Por fim, as noções matemáticas, as noções paramatemáticas e as noções protomatemáticas constituem camadas cada vez mais profundas e complexas no funcionamento didático do saber. Faz-se necessária uma profunda análise didática que leve em conta as diferenças de natureza cognitiva existentes entre essas noções:

> (...) é assim que a análise da transposição didática de tal noção matemática (por exemplo, a identidade $a^2 – b^2 = (a+b) (a-b)$) supõe a consideração de noções paramatemáticas (por exemplo, as noções de *fatoração* e de *simplificação*), que por sua vez devem ser vista à luz de certas noções protomatemáticas (a noção de "padrões", de "simplicidade", etc.). (Chevallard, 1991, p. 55)

Segundo o próprio Chevallard (1992), as primeiras análises propostas em sua Teoria da Transposição Didática – publicada em 1991, só foram inicialmente concebidas nos anos 80 e:

> (...) limitavam-se a distinguir objetos matemáticos, paramatemáticos e protomatemáticos. O alargamento do quadro, levado a cabo por necessidades de análise, conduziu-me a propor uma teorização em que qualquer objeto pudesse aparecer. (...) Assim se passa de uma máquina restrita para pensar um universo didático *restrito* para uma maquinaria de mais vasto alcance, apta, em princípio, a permitir-nos situar imediatamente a *didática no seio da antropologia*. (Chevallard, 1992, p. 86-87)

Com isso, é importante compreender em que sentido Chevallard caracteriza e diferencia as noções matemáticas e as noções paramatemáticas. Pode-se notar que, em algumas situações, é necessário que se eleve, a um certo nível superior de explicitação, certas noções paramatemáticas, como, por exemplo, a noção de equação ou de demonstração, as quais podem ser objetos de definição precisa em lógica matemática. Assim, uma certa noção paramatemática pode se tornar, num discurso didático explícito, uma noção matemática.

A partir dessa discussão – a respeito do que é noção matemática e noção paramatemática – passo a analisar as "idéias" apresentadas na literatura consultada acerca da noção de equação. Essas "idéias" serão analisadas sob à luz da teoria da Transposição Didática, apresentada nesta seção.

Analisando a literatura consultada

Dentre as leituras feitas encontrei algumas definições e considerações apresentadas por especialistas da área de Matemática e de Educação Matemática que subsidiaram o desenvolvimento desse trabalho.

Escolhi para discutir nesse artigo as "idéias" apresentadas em cinco livros didáticos de Matemática direcionados ao ensino fundamental (11 a 14 anos): Bourdon (1897), Giovanni e Giovanni Jr (2000), Di Piero Neto & Soares (2002), Imenes & Lellis (2002) e Pires, Curi e Pietropaolo (2002); em um livro didático de Matemática direcionado ao ensino médio (14 a 17 anos): Tsipkin (1985); e em livros didáticos direcionados ao ensino universitário: Bourbaki (1976), van der Waerden (1991), Rogalski (2001) e Caraça (2003); e em dois dicionários matemáticos: Warusfel (1969) e Sügakkai (1977)

Inicio a apresentação por Marc Rogalski, matemático francês, que em sua obra *Carrefours entre ANALYSE ALGÈBRE GÉOMETRIE* não vê equação como propriamente um objeto da Matemática, ao contrário de uma função, um triângulo, uma integral ou um grupo, por exemplo. Ele acredita que *"o termo equação é evocado* ***quando existe a intenção, por parte de alguém, de se resolver um certo tipo de problema"*** (Rogalski, 2001, p. 18).

De um modo bastante preciso e formal, ele apresenta qual o tipo de problema que acaba por evocar a palavra "equação":

> Seja f: $E \rightarrow F$ uma aplicação, e y um elemento de F. Dizemos que queremos resolver a **equação** ($e_{f,y}$), e notamos ($e_{f,y}$): **f(x) = y**, **quando estamos a procura** de um elemento x de E cuja imagem por f é y (podemos dizer que estamos a procura de um antecedente x de y). Dizemos que x é a **incógnita**, e que y é **dado**. Um elemento x de E que responde à questão é chamado de uma **solução** da equação. Quando o dado y está destinado a variar em F, satisfazemo-nos algumas vezes em notar (e_f) a equação f(x) = y; quando não há risco de ambigüidade, satisfazemo-nos algumas vezes em notar (e) uma tal equação. **Uma equação está assim ligada a uma aplicação f** e, portanto a dois conjuntos E e F: y é dado em F, e procuramos a incógnita x em E. (Rogalski, 2001, p. 18)

Segundo esse autor, com essa noção bastante geral de equação, pode-se unificar, generalizar e formalizar numerosos exemplos de equações discutidas e adotadas em inúmeras situações. O principal interesse dessa noção é poder englobar, sob um mesmo formalismo, equações muito diferentes, cujas incógnitas podem ser números (inteiros, reais, complexos,...), ou funções (contínuas, deriváveis, reais, complexas,...), ou polinômios, ou seqüências numéricas, até mesmo aplicações ou conjuntos quaisquer.

Bento de Jesus Caraça, professor português, em sua obra, *Conceitos Fundamentais da Matemática*, não traz definição para o termo equação, mas define equação algébrica como:

> Toda igualdade da forma $a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + ... + a_n = 0$; n, número inteiro e positivo, chama-se grau da equação; à variável x chama-se incógnita e aos números a_0, a_1, ... , a_n, coeficientes da equação. (Caraça, 2003, p 144)

Discuto a seguir a idéia de equação encontrada em André Warusfel, matemático francês, que em seu *Dictionnaire Raisonné de Mathémathiques*, traz a seguinte explicação quando se refere ao termo equação em sua obra:

> Problema que consiste em procurar, dado um conjunto *E*, os elementos *x* que satisfazem a uma relação *R(x)*; *x* é a **incógnita**, e x_i, tal que $R(x_i)$, é um valor aceitável para a incógnita se $x_i \in E$. Dessa forma, o problema é bastante amplo, e contém os conceitos de **inequação** numérica e de pesquisa de lugar geométrico, por exemplo. Também é reservado, geralmente, o nome de equação ao caso particular onde *E* = *R*, *C*, R^n ou C^n , e que *R(x)* pode ser escrita na forma: *f(x)* = 0 (...) **Resolver** uma equação é encontrar todas as raízes dela, e se necessário determinar a ordem de cada uma. (Warusfel, 1966, p. 168)

Nihon Sügakkai, matemático japonês, o qual também não apresenta em sua obra, *Encyclopedic Dictionary of Mathematics*, definição para o termo equação, traz a seguinte definição para equação algébrica:

> Seja F_1 (x_1, ... , x_m), ... , F_r (x_1, ... , x_m) os r polinômios em m variáveis x_1, ... , x_m, sobre um corpo k. Então, as equações F_1=0, ... , F_r=0, são chamadas equações algébricas em m incógnitas
> (...)
> Por várias razões, é importante considerar uma equação na forma f(x)=0, onde $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n$, $a_0 \neq 0$. Isso dá a forma geral da equação algébrica com uma incógnita. (Sügakkai, 1977, p. 38)

Acredito ser pertinente destacar aqui o fato de que Sügakkai não apresentar uma definição para equação, porém, ao longo de seu dicionário apresenta definições para tipos específicos de equação, como equação algébrica, equação diferencial, entre outras.

Apresento a seguir as idéias sobre equação que aparecem em livros didáticos. A primeira obra investigada é *Éléments d´Algèbre*, de M. Bourdon. Essa obra, datada de 1897, traz em seu bojo uma vasta discussão sobre equações, que vai desde suas noções preliminares até a teoria das equações.

No capítulo sobre as noções preliminares de equação, o autor apresenta a seguinte idéia para o termo:

> (...) escrevemos algebricamente as relações que o enunciado estabelece entre as quantidades conhecidas e as desconhecidas. Chega-se assim a uma expressão de duas quantidades iguais que é chamada de *equação*".(Bourdon, 1897, p. 45)

Ao analisar a obra *Élements de Mathématique* – Algèbre I – de Nicolas Bourbaki, não encontrei definição para equação, mas sim, para equação linear, a qual segue abaixo:

> Seja E,F dois A-módulos (A um anel). Toda equação da forma $u(x) = y_0$, onde u: E $\rightarrow$ F é uma aplicação linear dada, y_0 um elemento dado de F e onde a incógnita x toma seus valores em E, chama-se *equação linear*; (...) Todo elemento $x_0 \in$ E tal que $u(x_0) = y_0$ é chamado *solução da equação linear* $u(x) = y_0$. (Bourbaki, 1970, p. 48)

A. G. Tsipkin, em sua obra *Manual de Matemáticas para la enseñaza media* traz a seguinte definição para equação:

> *Equação* é uma igualdade que se cumpre somente para certos valores das letras que se encontram nela. As letras que entram numa equação, segundo a condição do problema, podem não ser equivalentes: umas podem adquirir todos os valores admissíveis (são os chamados *parâmetros* ou *coeficientes* da equação (...)); outras, cujos valores são necessários encontrar, são chamadas *incógnitas* (...). Em sua forma geral, a equação pode ser escrita como segue: $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$. (...) Os valores das incógnitas que convertem a equação em identidade chama-se *solução* da equação. Resolver uma equação significa achar o conjunto de suas soluções ou demonstrar que as mesmas não existem. (Tsipkin, 1985, p. 148-149).

Na obra – *Álgebra, vol 1* – do matemático alemão, B L van der Waerden, observei que no capítulo introdutório são apresentados conceitos que ele assume como essenciais para o desenvolvimento das idéias da Álgebra e que serão discutidos ao longo de sua obra, porém, em momento algum, ele traz alguma definição ou alguma idéia do que se entende por equação. Entretanto, o autor se reporta ao termo equação da seguinte forma: *"a solução u de uma equação a = b + u, para a > b é designada por a – b"*. (Waerden, 1991, p. 5)

É importante destacar que, em seu livro *Álgebra, vol 1*, van der Waerden traz um curso de álgebra abstrata para cursos superiores e/ou cursos de pós graduação na área da Matemática, apresentando num capítulo introdutório conceitos que ele assume como essenciais para o desenvolvimento das idéias da Álgebra. Ele discute e define função, por exemplo, mas, não traz nenhuma referencia conceitual para a idéia de equação.

Acredito ser importante ressaltar aqui uma justificativa por ter inserido nesta pesquisa bibliográfica as obras de van der Waerden e Bourbaki. Os textos desses autores são normalmente considerados clássicos em cursos mais avançados em Álgebra, e são, certamente, grandes paradigmas de rigor. Por esse motivo então, achei importante investigar se eles discutem ou não a idéia de equação em suas obras.

O livro didático Matemática pensar e descobrir: novo – 6ª série, de José Ruy Giovanni & José Ruy Giovanni Jr. apresenta uma definição de equação na unidade *“Estudando as equações”* trazendo, no item *“Equação”*, uma resposta para a questão: *“O que é uma equação?”*:

> Toda sentença matemática expressa por uma igualdade, na qual exista uma ou mais letras que representam números desconhecidos dessa sentença, é denominada *equação*. Cada letra que representa um número desconhecido chama-se *incógnita*. (Giovanni & Giovanni Jr 2000, p. 151)

Outro livro didático escolhido foi *Matemática em atividades, 6ª série*, de Scipione de Piero Netto e Elisabeth Soares. Nesse livro a idéia de equação é discutida no capitulo 3 *“Equações, sistemas de equações e inequações”*. Os autores recorrem à idéia de “sentenças matemáticas” para discutir equação, que aparece, especificamente, no item *“Um tipo especial de sentença matemática: a equação”*. Vejamos:

> Uma sentença é um conjunto de palavras que exprimem um pensamento com sentido completo. (...) São sentenças matemáticas aquelas que podem ser escritas utilizando-se da linguagem matemática. (...) Equação é uma sentença matemática aberta, expressa por uma igualdade. (Di Piero Netto & Soares 2002, p. 86-87)

A seguir apresento a obra *Matemática para todos: 6ª série, 3º ciclo*, de Luiz Marcio Imenes e Marcelo Lellis. Esse livro traz a idéia de equação no capítulo *“Equações”*, sendo apresentada pelos autores acompanhada da resolução no item *“Resolvendo equações”*:

> A álgebra nos proporciona um novo recurso para resolver certos problemas: representamos o número desconhecido por uma letra e traduzimos o enunciado do problema, obtendo uma sentença chamada equação. (...) Equações são igualdades, ou seja, nelas aparece o sinal de =. O número desconhecido representado pela letra é chamado incógnita. Ao resolver a equação, estamos procurando o número desconhecido, ou seja, o valor da incógnita. (Imenes e Lellis 2002, p. 230)

Na obra acima, observamos que os autores recorrem ao termo igualdade para definir equação, porém, não se discute o que é uma igualdade, a não ser pela característica de uma igualdade conter o sinal de igual. Todavia, a seguir, dá-se uma nova característica para equação: procurar o número desconhecido.

Um outro livro didático que apresento é o livro *Educação Matemática: 6ª série*, de Célia Carolino Pires, Edda Curi e Ruy Pietropaolo. Essa obra traz a idéia de equação no módulo *"Equações"*, em uma seção intitulada *"É preciso saber"*. Vejamos:

> Em Matemática, dizemos que equação é uma sentença aberta, porque nela há valores que não são conhecidos, que expressa uma igualdade. (...) O valor de *x* que transforma a sentença aberta em sentença verdadeira é chamado **raiz da equação**. (Pires, Curi e Pietropaolo 2002, p. 211)

Partindo das "idéias" sobre equação discutidas nas obras apresentadas, procuro desenvolver uma análise e levantar questões para reflexão sobre as diferentes situações encontradas na literatura consultada. Essas reflexões e discussões são conduzidas sob a luz das idéias de Chevallard. Apresento ainda algumas conclusões e indagações que gostaria de deixar para reflexão neste trabalho.

Inicio a discussão levantando alguns aspectos relevantes a respeito das idéias apresentadas por Rogalski e Warusfel. Observei que a idéia geral que ambos têm sobre equação, certamente não considera-a como uma noção matemática, deixando claro que **o termo equação está ligado a um problema no qual se tem um valor a determinar, a partir de um valor dado**.

Fazendo uma análise comparativa entre Rogalski, Warusfel, Sügakkai e Caraça pude observar que enquanto Rogalski e Warusfel procuram tratar o termo equação de uma maneira mais genérica, sem defini-la e sem se referir a um tipo específico de equação; Sügakkai e Caraça particularizam a situação e apresentam definição para o termo equação algébrica, sem definir ou discutir uma idéia mais global de equação.

Bourbaki em sua obra, apesar de ser um livro didático e de todo o formalismo característico dessa obra, não apresenta definição para a noção de equação, mas traz uma definição para equação linear. van der Waerden também não faz nenhuma referencia à definição de equação em sua obra, contudo, por exemplo, traz uma definição para função numa capítulo intitulado "revisão".

Além das justificativas apresentadas, levanto outra questão fundamental para a discussão que proponho no presente trabalho: **Será que os autores citados não apresentam definição para equação justamente por essa idéia não ser uma noção matemática e sim uma noção paramatemática?**

Bourdon em seu *Éléments d´Algèbre,* logo no capítulo sobre as noções preliminares de equação, faz um alerta para o fato de que nem sempre se considerar em Álgebra que, os problemas cujos enunciados podem ser traduzidos algebricamente, estão ligados à idéia de equação.

Ele ressalta que as situações em que os problemas são colocados na forma de equação dividem-se em duas partes: a primeira que se destina a escrita algébrica do problema, a qual podemos entender como equacionamento do problema, e a segunda parte, onde se deduz uma série de outras equações, sendo que na última delas encontra-se o valor da incógnita. Essa segunda parte entendo como sendo o processo de resolução da equação.

Um fato que me chamou a atenção na obra de Bourdon é que o autor anuncia logo no início do capitulo analisado que: *"como as regras a serem seguidas para se colocar um problema numa equação são um pouco vagas, começaremos por nos ocupar com a segunda parte, que é submissa a regras fixas e invariáveis"* (Bourdon, 1897, p. 45).

Com isso, o autor discute por várias páginas as transformações algébricas utilizadas para a resolução de equações, para só então retomar o que ele chama de "primeira parte", ou seja, partindo de problemas escritos chegarmos às equações.

Retomando a discussão principal desse trabalho, verifiquei ainda que nos livros didáticos para alunos de 12 a 16 anos, como nos de Tsipkin, de Giovanni & Giovanni Jr, de Di Piero Neto & Soares, de Imenes & Lellis) e de Pires, Curi e Pietropaolo são apresentadas definições para a noção de equação.

Além disso, quero destacar o fato de que as definições apresentadas por Bourdon, Tsipkin, Giovani & Giovanni Jr, Di Piero Neto & Soares, Imenes & Lellis e Pires, Curi e Pietropaolo, embora não dêem esse destaque, estão definindo na verdade equação algébrica, pois consideram que o valor a ser encontrado – as incógnitas – são números.

Conclusões e considerações finais

É possível constatar-se que não há consenso na literatura consultada sobre a "definição" de equação. Aliás, se quer é possível encontrar um consenso na apresentação ou não de definição para essa idéia matemática. Enquanto alguns nem definem equação, outros, quando o fazem, definem explícita ou implicitamente, equação algébrica.

Considerando-se que, das treze obras analisadas, seis delas não definem equação e as sete que o fazem, na verdade, mesmo que de forma implícita, estão definindo equação algébrica, **concluo que a noção de equação é apresentada na literatura consultada como uma noção paramatemática.**

Outro ponto que pude perceber é que, algumas das "definições" apresentadas para equação, como em Bourdon ou em Imenes e Lellis, estão diretamente associadas a problemas, **que a meu ver só vem ratificar a concepção de Rogalski,** ou seja, relacionar a noção de equação à resolução de problemas.

Dando ênfase nessa perspectiva – relacionar à idéia de equação a resolução de problemas – corrobora-se com os resultados das pesquisas de Rojano (1985) e

Cotret (1997), as quais discutem a importância de se trabalhar com problemas, quando se está discutindo Álgebra, e nesse caso em particular, as equações.

Num outro sentido, gostaria de destacar também o fato de que algumas das "definições" apresentadas para equação, e que na verdade estão ligadas à equação algébrica, podem gerar obstáculos didáticos posteriormente quando do estudo de equações onde o valor a determinar não for números, como nas equações diferenciais ou equações trigonométricas, por exemplo.

Ainda assim, gostaria de ratificar a conclusão apresentada nessa pesquisa, corroborando as idéias de Chevallard, no sentido de **não se definir equação**, considerando assim, por esse aspecto, que **a noção de equação é uma noção paramatemática**.

Contudo, por outro lado, levanto uma reflexão que incorpora o seguinte desafio: **Ainda que a idéia de equação não seja uma noção matemática, não podendo assim tomar lugar junto aos objetos de ensino, devemos discutir sim, essa idéia, no processo de ensino e aprendizagem da Matemática.**

Todas as reflexões e considerações apresentadas até aqui me parecem ser um ponto de partida para uma discussão mais profunda e consistente no que diz respeito à busca de significado para a noção de equação.

Sendo assim, apresento mais uma reflexão que penso ser importante para todos aqueles que, de alguma forma, estão envolvidos com aulas de Matemática: **Como podemos abordar e discutir diferentes tipos de equação no processo de ensino e aprendizagem da Matemática?**[1]

Apesar da reflexão acima poder ser mais amplamente contemplada na referida tese (Ribeiro, 2007), trago a seguir algumas considerações que lá se encontram, considerações estas que têm o objetivo de apresentar neste trabalho algumas indicações principalmente para os professores de Matemática.

Após ter sido desenvolvido um estudo de caráter teórico, o qual considerou aspectos epistemológicos e didático-matemáticos sobre as equações, concebi em minha tese de doutoramento diferentes significados para equação, que optei por chamar de ***multisignificados de equação***. Esses diferentes significados parecem ganhar relevância no âmbito do ensino e da aprendizagem da Matemática, se considerarmos a importância de se trabalhar com diferentes registros de representação semiótica (Duval, 1993).

Os multisignificados de equação, a saber: *intuitivo-pragmático, dedutivo-geométrico, estrutural-generalista, estrutural-conjuntista, processual-tecnicista e axiomático-postulacional*; procuram contemplar diferentes registros de representação. Assim, o trabalho com estes significados em sala de aula pode

[1] Considerações acerca de respostas e aprofundamento em relação a esta reflexão, podem ser encontradas na tese de doutoramento do autor (Ribeiro, 2007), disponível em www.pucsp.br/pos/edmat.

oferecer a possibilidade de o aluno interpretar e tratar as equações utilizando-se de situações que envolvam diferentes ramos da Matemática, assim como diferentes tipos de equações.

Referências bibliográficas

- Bourbaki, N. *Elements de Mathématique: Algèbre I*. Paris: Hermann, 1970.
- Bourdon, M. *Éléments d´Algèbre*. Paris: Gauthier-Villars et Fils, 1897.
- Brousseau, G. *Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques*. Recherches em Didactique des Mathématiques, v. 7, n. 2. Grenoble, 1986, p. 33-115.
- Caraça, B de J. *Conceitos Fundamentais da Matemática*. 5ª ed. Lisboa: Gradiva Publicações Ltda, 2003.
- Chevallard, Y. *La Transposition Didactique*. Cap. 4. Grenoble: La Pensée Sauvage, 1991, p. 49-56.
- _______ *Cencepts fondamentaux de la dadactique: perspectives apportées par une approche antropologique*. Recherches en Didactique des Mathématiques. Grenoble v. 12, n. 1, p. 73-112, 1992.
- Cotret, R. S. *Problématique à propos de la mise en équation de problèmes écrits*. IX Séminaire Franco-Italien de Didactique de l´Algèbre, 1997, p. IX-23 – IX-37.
- Di Pierro Netto, S., Soares, E. *Matemática em Atividades: 6ª série*. São Paulo: Scipione, 2002.
- Dreyfus, T., Hoch, M. *Equations: A structural approach*. Proceedings of the 28th Conference Of Internatoinal Group for the PME, 2004, p. 1-152 – 1-155.
- Duval, R. *Registres de Représentations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée*. Annales de Didactique et Sciences Cognitives. ULP, IREM Strasbourg 5, 1993, p. 37-65.
- Giovanni, J R, Giovanni, J. R. Jr. *Matemática pensar e descobrir: novo – 6ª* série. São Paulo: FTD, 2000
- Imenes, L. M. P., Lellis, M. C. T. *Matemática para todos: 6ª série, 3º ciclo*. São Paulo: Scipione, 2002.
- Kieran, C. *The learnig and teaching of school algebra*. Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, 1992.
- Pires, C. C., Curi, E, Pietropaolo, R. *Educação Matemática: 6ª série*. São Paulo: Atual, 2002.
- Ribeiro, A J. *Analisando o desempenho de alunos do Ensino Fundamental em Álgebra, com base em dados do SARESP.* São Paulo, 2001. 116 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.
- _______ *Equação e seus Multisignificados no Ensino de Matemática: contribuições de um estudo epistemológico.* São Paulo, 2007, 142p. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.
- Rogalski, M. *Carrefours entre Analyse, Algèbre et Géomètrie.* Paris: Ellipses, 2001.
- Rojano, T. *Problem Solving: From the development of algebric ideas to algebric thinking*. Centro de Investigacoin y Estudios Avanzados del IPN, México, 1985.
- Sügakkai, N. *Encycolpedic Dictonary of Mathematics*. Massachusetts: The MIT Press, 1977.

- Tsipkin, A. G. *Manual de Matemáticas para la enseñanza media.* Moscou: Editorial Mir Moscú, 1985.
- Waerden B. L. van der. *Algebra: Volume I*. Nova Iorque: Springer-Verlag, 1991.
- Warusfel, A. *Dictonnaire Raisoné de Mathématiques*. Paris: Éditions du Seuil, 1969.

Alessandro Jacques Ribeiro. Doutor em Educação Matemática e Licenciado em Matemática pela PUC/SP. Professor do Programa de Pós-graduação em Educação Matemática da Universidade Bandeirante de São Paulo (UNIBAN).
Email: alejacques@uol.com.br