UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2008, Número 16, páginas 141 - 155
ISSN: 1815-0640

El concepto de función a través de la Historia

Sastre Vázquez, P.; Rey, G.; Boubée, C.

Resumen

Analizar los procesos históricos en el desarrollo de la Matemática permite conocer la forma en que surgen, se sistematizan y se desarrollan los métodos, las ideas, los conceptos y las teorías de esta ciencia. En este trabajo se realiza una revisión bibliográfica de los hechos más importantes en el desarrollo histórico del concepto de función. El objetivo es ofrecer una reseña histórica que pueda ser utilizada como una herramienta pedagógica, que al mostrar los caminos recorridos, permita buscar nuevas alternativas, conjeturar mayores alcances y mejorar posibilidades para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje del concepto "función".

Introducción

La historia de la Matemática está llena de anécdotas y de problemas interesantes que pueden motivar el aprendizaje de los estudiantes y colaborar en el desarrollo de actitudes positivas, permitiendo un acercamiento a esta ciencia desde un punto de vista humano. Puede ser sumamente útil explorar los inicios de un concepto, las dificultades con las que tuvieron que enfrentarse los matemáticos y las ideas que surgieron al enfrentar situaciones nuevas.

El desarrollo de la Matemática como ciencia está marcado por los procesos dialécticos que se dan con las contradicciones en las cuales surgen y evolucionan los conceptos, leyes y procedimientos. En la enseñanza no se puede repetir el curso de la historia evolutiva de las ciencias; pero el carácter lógico que sigue la enseñanza también requiere reconocer, por ejemplo, que los sistemas de numeración son el resultado de un proceso continuo de actividad intelectual, que la Aritmética y la Geometría están vinculadas entre sí desde sus inicios, que la interpretación mecánica de ciertas relaciones aportaron muchas ideas que penetraron con fuerza en el pensamiento matemático de aquellos que se dedicaban a la actividad relacionada con la producción de conocimientos matemáticos y que fueron motivos de enfrentamientos y crisis en sus fundamentos.

Es decir, la Ciencia Matemática sigue un curso evolutivo que la práctica docente no puede seguir. Durante el proceso de enseñanza-aprendizaje se ofrecen los resultados matemáticos bajo una fuerte sistematización de sus teorías y ello hace que el conocimiento tome formas de presentación graduada en el contenido que se explica, y coloca al profesor en la situación de plantear los conceptos, leyes y procedimientos, que conduzcan al alumno al desarrollo de sus capacidades intelectuales y de la concepción científica del mundo de manera dinámica y eficiente, cual si se revelara como un descubrimiento o una investigación.

Todo profesor de Matemática debiera tener un conocimiento aceptable de la historia de esta ciencia, no con el objetivo de organizar un curso con contenidos históricos, sino para poder utilizar, en el plano del acercamiento del objeto de estudio al alumno, las consideraciones más relevantes de su desarrollo y, sobre todo, para favorecer la comprensión de que esta ciencia evoluciona en el marco del desarrollo socio-cultural de la humanidad.

En resumen, la comprensión de una teoría matemática no puede ser completa si se desconocen sus orígenes. Ir a ellos y ver cómo esa teoría ha influido en el conocimiento son pilares fundamentales para el educador y para el investigador, porque constituyen una herramienta pedagógica de gran valor al mostrar los caminos recorridos por la ciencia, condición necesaria para poder buscar nuevas alternativas, conjeturar mayores alcances y mejorar posibilidades.

En esta revisión bibliográfica se realiza la exposición siguiendo el criterio de Youschkevitch, (1976) quien organiza la evolución del concepto de *función* distinguiendo tres períodos: Época Antigua, Edad Media y Período Moderno.

Época Antigua

Se conoce como "Matemática Antigua o prehelénica" a aquella que se desarrollaba en las antiguas civilizaciones de Egipto, Mesopotamia, China e India.

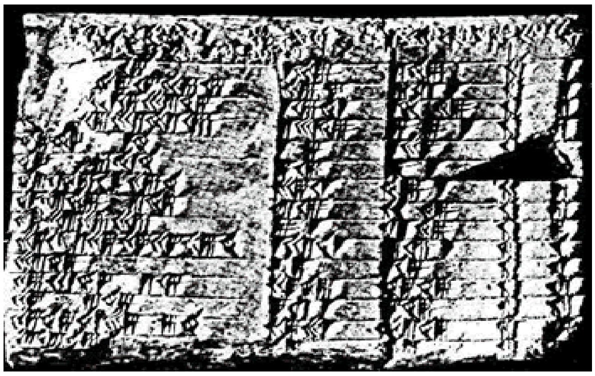
En la época antigua no existía una idea abstracta de variable, y las cantidades se describían verbalmente o por medio de gráficos. Sin embargo, en este período, comienzan a desarrollarse algunas manifestaciones que implícitamente contienen la noción de *función*.

El conteo implica una correspondencia entre un conjunto dado de objetos y una secuencia de números para contar. Ya los cavernícolas dejaron huellas de una actividad que pareciera ser la de contar. Por ejemplo, sobre restos óseos se han encontrado ciertas marcas sencillas que pudieron servir para llevar alguna cuenta. Puede decirse entonces, que la noción de *función* tiene sus raíces en el desarrollo del concepto de *número*.

Las cuatro operaciones aritméticas elementales son funciones de dos variables. En las tablas numéricas babilónicas (2000 a.C. – 500 a.C.) se presentaba el resultado de multiplicaciones y divisiones, de cuadrados, cubos y raíces cuadradas y cúbicas. Además, se han encontrado tablas con fórmulas de cálculos tan llamativas como la de la suma de *n* términos de una progresión geométrica, o la de los números pitagóricos, o las que muestran la utilización de reglas de tres, simples y compuestas. Los babilonios tenían un manejo algebraico muy desarrollado, caracterizado por la sustitución, el cambio de variables, y hasta el uso de la ley exponencial. Conocían la fórmula de la ecuación de segundo grado, e incluso reducían ecuaciones de grado superior, con cambios de variables incluidos, a las de segundo grado.

Si bien los babilonios no manejaban aún el concepto de *función*, la noción de este concepto se encuentra implícita en las tablillas astronómicas, ya que éstas reflejaban observaciones directas de fenómenos enlazados por una relación aritmética, como por ejemplo, los períodos de visibilidad de un planeta y la distancia angular de ese planeta al Sol.

Tablilla con motivos geométricos (DivulgaMat)



Tablilla Plimpton con las ternas pitagóricas(DivulgaMat)

Más tarde, (500 a.C. - 500 d.C.), durante la época de la cultura helénica, aparecen cambios en los contenidos que traen aparejados consigo un mayor estudio de la Geometría. Aparecen los llamados problemas "clásicos", como por ejemplo: a) la cuadratura del círculo, al cual se dedicó Anaxágoras, y b) la duplicación del cubo, con Menecmo, (discípulo de Eudoxo), quien demostró que se trataba de un problema no plano (se consideraban planos a los problemas que se resolvían utilizando regla y compás), y que en realidad era un problema sólido, en cuya resolución intervenían las cónicas. Los esfuerzos para resolver estos problemas trajeron consigo la creación de diferentes curvas por parte de Apolonio, Arquímedes y Pappus, entre otros.

Los griegos trataron con problemas que tenían implícita la noción de *función*, pero no fueron capaces de reconocerla y, menos aún, de simbolizarla. Sin embargo, ellos calcularon áreas, volúmenes, longitudes y centros de gravedad y desarrollaron tablas de acordes y tablas de senos similares a las actuales. A principios del siglo II a.C., los astrónomos griegos adoptaron el sistema babilónico de almacenamiento de fracciones y, casi al mismo tiempo, compilaron tablas de cuerdas de un círculo. Para un círculo de radio determinado, estas tablas daban la longitud de las cuerdas en función del ángulo central correspondiente, que crecía con un determinado incremento. Eran similares a las modernas tablas del seno y coseno, y marcaron el comienzo de la Trigonometría. Pero todos estos desarrollos de los griegos fueron explicados verbalmente, en tablas, gráficamente o mediante ejemplos. A modo de síntesis, puede decirse que estos estudios sobre las relaciones entre magnitudes geométricas variables, si bien no respondían explícitamente al concepto de *función*, pueden ser considerados como los primeros antecedentes aportados por la cultura helénica.

Edad Media

La Edad Media comienza con la caída de Roma en el año 476, y finaliza en el año 1453, con la caída de Constantinopla en manos turcas. Aunque pueda suponerse que en esta etapa, muchas veces caracterizada como de oscurecimiento de las ciencias, las Matemáticas se mantuvieron estáticas, esto no fue tan así. Durante este período, Europa estaba constituida por una colección de pueblos aislados y de poco nivel cultural, con la Iglesia Católica como albacea intelectual. En lo referente a lo cultural, no existía mucha relación con la mayor parte del pensamiento clásico griego, distancia que ya se había establecido desde el mismo Imperio Romano. Sin embargo, los árabes, además de recuperar un buen número de obras griegas, van a proporcionar a Occidente un gran tesoro que desarrollará de forma increíble la Aritmética, sentando, además, las bases de una nueva rama de las Matemáticas: el Álgebra.

Durante la Edad Media se estudiaron fenómenos naturales como: calor, luz, color, densidad, distancia y velocidad media de un movimiento uniformemente acelerado. Las ideas se desarrollaron alrededor de cantidades variables independientes y dependientes, pero sin dar definiciones específicas. Así, la evolución de la noción de *función* se dio asociada al estudio del cambio, en particular del movimiento. Una función se definía por una descripción verbal de sus propiedades específicas, o mediante un gráfico, pero aún no se usaban las fórmulas.

El estudio del cambio se inicia con la representación gráfico-geométrica, construida por Nicolás Oresme (1323 - 1382), como método para representar las propiedades cambiantes de los objetos. Oresme desarrolló una teoría geométrica de las latitudes de las formas. En su obra *Tractatus de latitudinibus formarum*, las funciones aparecen dibujadas por primera vez, trasladando al plano lo que hasta entonces habían hecho los geógrafos sobre la esfera. Mantuvo incluso los nombres, y llamó *longitud* y *latitud* a los antepasados de lo que hoy llamamos *abscisa* y *ordenada*.

Oresme asoció el cambio físico con figuras geométricas. El área completa representa la variación en cuestión, aunque sin hacer referencia a valores numéricos. (Kline, 1972). Este matemático consideraba que todo lo que varía se puede imaginar como una cantidad continua representada mediante un segmento rectilíneo. Así, en la representación gráfica del cambio de la velocidad a través del tiempo, utilizaba una línea horizontal para representar el tiempo (longitud), y a las velocidades en los diferentes instantes, las ubicaba en líneas verticales (latitud).

En la Figura 1 se observa la representación de una velocidad que decrece uniformemente desde el valor OA en O, a cero en B, quedando dibujado un triángulo. El rectángulo OBDC, determinado por E (punto medio de AB) tiene la misma área que el triángulo OAB y representa un movimiento uniforme a lo largo del mismo intervalo de tiempo.

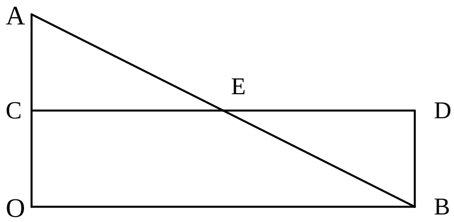


Figura 1

Si bien durante la Edad Media se lograron algunos resultados de interés en Matemáticas, puede decirse que éstos no fueron de una gran trascendencia. La situación cambió durante el Renacimiento bajo la acción de las importantes transformaciones sociales, culturales y políticas asociadas a este período.

Período Moderno

En los inicios de esta época, que comienza a finales del siglo XVI, las funciones fueron equivalentes a expresiones analíticas. Kleiner (1989), señala que desde 1450 a 1650 se produjeron sucesos fundamentales para el desarrollo del concepto de *función*: 1) La extensión del concepto de *número* al de números reales, e incluso a números complejos (Bombelli, Stifel), 2) La creación del Álgebra simbólica (Vieta, Descartes), 3) El estudio del movimiento como un problema central de la ciencia (Kepler, Galileo) y 4) La unión entre el Álgebra y la Geometría (Fermat, Descartes).

Hasta el siglo XVII el Álgebra estuvo subordinada a la Geometría, pero a partir de este momento el rol se invirtió y, con ello, se dio un cambio sustancial en la historia de las Matemáticas. La dependencia del Álgebra de la Geometría comenzó a invertirse cuando Vieta (1540 -1603), y luego Descartes, emplearon el Álgebra para resolver problemas de construcciones geométricas. Vieta vislumbró la posibilidad de usar el Álgebra para tratar la igualdad y la proporción entre magnitudes, sin tener en cuenta de qué campo científico provenían los problemas, (Kline, 1972). Además, este matemático francés fue quien propuso el uso de letras para representar las variables.

Quien también contribuyó a la creación de la idea de *función* fue Galileo (1564 - 1642). Él introdujo lo numérico en las representaciones gráficas y expresó las leyes del movimiento, a las que incorporó el lenguaje de la teoría de las proporciones, dando un sentido de variación directa o indirectamente proporcional, lenguaje que junto con la teoría de la época encubrió aspectos de la variación continua. En su obra se encuentran numerosas expresiones de relaciones funcionales. Con palabras, y en el lenguaje de las proporciones, muestra claramente que está tratando con variables y funciones.

Con la llegada de la obra de Descartes, (1596 - 1650) se produce un enorme avance. Descartes buscaba liberar a la Geometría del exceso de figuras, pero también buscaba darle sentido o significado al Álgebra por medio de la Geometría. Fue revolucionario al establecer que una curva se construye con solamente ofrecer una ecuación algebraica. Recordemos que en la Antigüedad, para que una curva existiera, era necesario que hubiera un procedimiento con regla y compás para poder construirla.

Así es que Descartes fue quien desarrolló la idea de introducir una función en forma analítica. Él quería reducir la solución de todos los problemas algebraicos y de ecuaciones, a un procedimiento estándar que le permitiera encontrar las raíces. Este matemático fue el primero en poner en claro que una ecuación en x e y es una forma de mostrar una dependencia entre cantidades variables, de modo que los valores de una de ellas pudieran calcularse a partir de los correspondientes valores en la otra variable.

Descartes rechaza la idea de que solo son legítimas las curvas factibles de ser construidas con regla y compás, y propone nuevas curvas generadas por construcciones mecánicas. Clasifica las curvas en "mecánicas" y "geométricas". Establece que las curvas "geométricas" son aquellas que pueden expresarse mediante una única ecuación algebraica, de grado mixto, en *x* e *y*, con lo que acepta la concoide y la cisoide, mientras que llama "mecánicas" a todas las demás curvas, como la espiral y la cuadratriz.

La ampliación del concepto de "curvas admisibles" significó un paso importante que permitió incorporar curvas antes rechazadas, y además, permitió ensanchar su dominio, ya que dada cualquier ecuación algebraica en *x* e *y* podía obtenerse una curva y así generar nuevas curvas. (Kline, 1972).

Además mostró, en sus trabajos de Geometría, que tenía una idea muy clara de los conceptos de *variable* y *función*, realizando una clasificación de las curvas algebraicas según sus grados y reconociendo que los puntos de intersección de dos curvas se obtienen resolviendo, en forma simultánea, las ecuaciones que las representan.

La distinción de Descartes entre curvas "geométricas" y "mecánicas", dio lugar a que Gregory (1638 - 1675) realizara la distinción entre funciones "algebraicas" y "trascendentes". En 1667, este matemático dio la definición más explícita del siglo XVII, definiendo una función como:

> *"una cantidad que se obtiene de otras cantidades mediante una sucesión de operaciones algebraicas o mediante cualquier otra operación imaginable"*

Con la última expresión quiso mostrar la necesidad de añadir, a las cinco operaciones del Álgebra, una sexta operación que él definió como el paso al límite. (Kline, 1972).

No puede dejar de mencionarse que Fermat (1601 - 1665) aplicó el análisis de Vieta a los problemas de lugares geométricos y presentó en un estilo moderno, con las notaciones de Vieta, los principios fundamentales de la Geometría Analítica. A pesar de que Fermat escribió sobre estos temas antes que Descartes publicara sus trabajos, su obra fue publicada de manera póstuma y posterior a la de Descartes.

La Geometría Analítica fue decisiva para el desarrollo del Cálculo Diferencial e Integral, que constituyó una auténtica revolución en el pensamiento matemático. La aparición del Cálculo, significa hacer referencia a Newton y a Leibniz, a la creación de una de las herramientas matemáticas más potentes y al nacimiento de un nuevo paradigma científico: la Naturaleza puede ser explicada a partir de ecuaciones diferenciales. Esto conlleva a la consideración continua y dinámica de las relaciones funcionales, en contra de la consideración discreta y estática imperante hasta el momento.

Se introducen las variables y se comienzan a utilizar expresiones de relaciones entre variables por medio de ecuaciones. Surgen así muchos ejemplos de funciones, aunque aún no se distinguen las variables dependiente e independiente en una ecuación.

Es de hacer notar que los objetos de estudio del Cálculo desarrollado por Newton y Leibniz no fueron las funciones, sino las curvas. Se intentaban solucionar problemas referidos a longitudes, áreas y tangentes relacionadas a curvas, como así también encontrar la velocidad de puntos moviéndose a través de curvas.

Leibniz (1646 - 1716) fue el primer matemático en utilizar la palabra *función* en 1692, (Struik, 1969). Usó esta palabra para referirse a cualquier cantidad que varía de un punto a otro de una curva, tal como la longitud de la tangente, de la normal, de la subtangente y de la ordenada. Por ejemplo, Leibniz afirmaba que *"una tangente es una función de una curva"* (Iacobacci, 1965). También introdujo las palabras: *constante*, *variable*, *coordenadas* y *parámetro* en términos de un segmento de constante arbitrario o cantidad. Clasificó a las curvas en: "algebraicas", las representadas por una ecuación de cierto grado y "transcendentes", las representadas por una ecuación de grado infinito o indefinido. Es de hacer notar que Leibniz no utilizaba el concepto de *función* como lo entendemos en la actualidad ya que, para él, una curva estaba formada por un número infinito de tramos rectos infinitamente pequeños.

En 1665, Newton utilizó la palabra *fluent* para representar cualquier relación entre variables. Además introdujo la noción de *diferencial,* designada por la palabra *momento,* el cual es producido por una cantidad variable llamada *genita*, en una aproximación al concepto de *función*.

Newton y Leibniz contribuyeron decisivamente al desarrollo del concepto de *función*, introduciendo el desarrollo de función en una serie de potencias. En esta época la idea de *función* era muy restringida, pues se reducía a funciones analíticas, abarcando inicialmente las que se podían expresar mediante una ecuación algebraica y poco después, las desarrollables en serie de potencias.

En el siglo siguiente, XVIII, aparece uno de los matemáticos más prolíficos de la historia: Euler, quien había sido precedido por una familia de matemáticos suizos realmente sorprendente: los Bernoulli (Johann y Jacob). El concepto de *variable*, aplicada a objetos geométricos se sustituye por el concepto de función como una fórmula algebraica. El estudio se desarrolla alrededor de la representación, en particular en serie de potencias de las funciones.

Euler (1707 - 1783) continúa el camino para precisar la noción de *función* comenzando a definir nociones iniciales como son: *constante* y *cantidad variable* y, en 1755, define *función* como una expresión analítica:

> *"la función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta de cualquier manera a partir de esa cantidad variable y de números o cantidades constantes". (Ruthing, 1984)*

Si bien Euler no define qué es una *"expresión analítica",* la que fue definida formalmente recién en el siglo XIX, explica que las expresiones analíticas admisibles son las que contienen las cuatro operaciones elementales, raíces, exponentes, logaritmos, funciones trigonométricas, derivadas e integrales. Clasifica a las funciones en: 1) "algebraicas y trascendentes", 2) "univariadas y multivariadas" y 3) "implícitas y explícitas".

Euler se enfrenta al problema de que si a toda función le corresponde una curva, también toda línea curva debería representarse por una función. Así admite como funciones a las llamadas *curvas mecánicas*. Al ampliar el concepto de *función* distingue dos clases: las "continuas" y las "discontinuas".

El significado de estos dos términos era distinto al significado actual. Para Euler, una función "continua" es aquella que está representada por una sola ecuación, aún cuando su dibujo conste de más de un trazo, como el caso de la hipérbola. Las "discontinuas", por su parte, son las *curvas mecánicas.* Es decir, son aquellas para las que no hay una ecuación conocida, aún cuando su trazo en papel sea seguido.

Resumiendo, durante este período aparecieron nuevas funciones (las "trascendentes") que ayudaron a resolver problemas relacionados con la Física (cicloide, catenaria, lemniscata, etc). Euler lleva más allá la idea de *función*, considerando como ente matemático lo que hasta ese momento era considerado como una herramienta para resolver problemas, generalmente relacionados con la Física. Abre así la posibilidad de estudiar las funciones como objetos matemáticos.

El concepto de *función* evolucionó, enriqueciéndose y cambiando su significado a partir de la controversia iniciada entre Dalambert y Euler sobre el problema de la cuerda vibrante. Dada una cuerda elástica con extremos fijos se la deforma de alguna manera inicial y se la suelta para que vibre. El problema consiste en determinar la función que describe la forma de la cuerda en cada instante.

La discusión entre Dalambert (1717 - 1783), y Euler y D. Bernoulli (1700 -1782) se centró alrededor del significado de la palabra *función* y versó sobre las funciones que solucionaban este problema, sosteniendo los dos últimos autores que se debían buscar soluciones más generales.

Para entender mejor esta controversia se debe tener en cuenta que durante el siglo XVIII los matemáticos aceptaban por "artículo de fe", es decir sin demostración y sin duda alguna, que:

> *"si dos expresiones analíticas coinciden en un intervalo, ellas coinciden en todas partes"*

En 1747, Dalambert propone una solución para el problema de la cuerda vibrante. Al año siguiente Euler publica un artículo sobre el mismo problema, coincidiendo con la solución dada por Dalambert, pero discrepando en su interpretación, ya que él consideraba que esa solución no era la "más general". En 1753, Bernoulli, propone una nueva solución al problema de la cuerda vibrante. Tanto Euler como Dalambert, rechazaron esta solución, basando sus argumentos en el "artículo de fe" de la época. Ellos señalaron que dado que *f(x)* y la serie coincidían en un intervalo, éstas debían coincidir en todos lados, concluyendo que la solución de Bernoulli conducía al absurdo de una función *f(x)* que es par y periódica. (Kleiner, 1989).

Si bien, a primera vista pareciera que las soluciones de Euler y Dalambert, para el problema de cuerda vibrante, eran iguales, si se tiene en cuenta el hecho que ellos usaban palabras iguales para referirse a objetos diferentes, es claro que ambas soluciones no son idénticas. Tanto Euler como Dalambert aceptaban que si dos expresiones analíticas toman los mismos valores en todos los puntos de un intervalo, deben ser idénticas. También coincidían en que la palabra "ecuación" significaba igualdad de dos expresiones analíticas, aunque sin entrar a discutir qué constituye una expresión analítica. Sin embargo, su concepto de *función* era diferente: Dalambert entendía por ello cualquier expresión analítica, mientras que Euler entendía que se trataba de cualquier curva dibujada libremente a mano.

El mayor efecto que produjo el debate sobre el problema de la cuerda vibrante fue la extensión del concepto de *función* para permitir en él la inclusión de: 1) Funciones definidas por expresiones analíticas a trozos y 2) Funciones que tenían un gráfico y no tenían una expresión analítica

A partir de 1720, y hasta 1820, comenzó a desarrollarse en el seno del campo de la Matemática una nueva disciplina cuyo objeto de estudio fueron las funciones: el Análisis. Antes de esto las funciones fueron mayoritariamente definidas y aplicadas en el Cálculo. Entonces se discutía si las funciones debían ser representadas geométricamente (en la forma de una curva), analíticamente (en la forma de una fórmula), o lógicamente (en la forma de una definición).

Fourier (1768 - 1830), estudiando el flujo de calor en cuerpos materiales, contribuyó a la evolución del concepto de *función* al considerar la temperatura como función de dos variables: tiempo y espacio. Conjeturó, pero no probó matemáticamente, que era posible desarrollar una función dada en un intervalo apropiado mediante una serie trigonométrica.

Todos estos desarrollos rompieron el "artículo de fe" imperante en el siglo XVIII, dejando en claro que dos funciones dadas por diferentes expresiones analíticas pueden coincidir en un intervalo y ser diferentes fuera del mismo. Fourier puso las representaciones de funciones por medio de expresiones analíticas (algebraicas) al mismo nivel que las representaciones geométricas (curvas).

Los trabajos de Fourier obligaron a reexaminar el concepto de *integral* y fueron el punto de partida que condujo a Cantor a la creación de su Teoría de Conjuntos.

Además, a partir de estos trabajos se renovó el énfasis en las expresiones analíticas, lo cual condujo a una revisión del concepto de *función*. (Edwards, 1982; Langer 1947).

Los matemáticos desde Euler hasta Cauchy, pasando por Fourier, parecían estar de acuerdo con la naturaleza “arbitraria” de las funciones, pero en la práctica ellos pensaban en las funciones como expresiones analíticas o curvas. Dirichlet fue el primero en considerar la noción de *función* como una “correspondencia arbitraria”. Y restringió explícitamente a un intervalo, el dominio de una función.

No puede dejar de mencionarse que Fourier utilizaba en sus trabajos unos razonamientos matemáticos que serían claramente inaceptables en nuestra época. Fue Dirichlet (1805 - 1859), quien se dedicó a la tarea de convertir el trabajo de Fourier en un trabajo matemáticamente aceptable, encontrando que el resultado de Fourier, que afirmaba que toda función podía ser representada por una expansión en series, era falso. En 1829 Dirichlet estableció las condiciones suficientes para que tal representación sea posible y definió *función* de la siguiente forma:

> *“y es una función de la variable x, definida en el intervalo a<x<b, si para todo valor de la variable x en ese intervalo, le corresponde un valor determinado de la variable y. Además, es irrelevante como se establece esa correspondencia.”*

Como ya se ha dicho, hasta ese momento, las funciones se concebían como expresiones analíticas o curvas, y es Dirichlet quien, por primera vez, considera a una función como una “correspondencia”. Presenta el primer ejemplo explícito de una función que no está dada por una expresión analítica, ni tampoco posee una gráfica o curva que la represente. Es el primer ejemplo que ilustra el concepto de *función* como una correspondencia arbitraria y también es ejemplo de una función que es discontinua en todas partes, en el sentido actual, no en el de Euler. A partir de los trabajos de este matemático, el concepto de *función* adquiere un significado independiente del concepto de *expresión analítica*, (Bottazzini, 1986; Grattan-Guinness, 1970; Youschkevitch,1976).

La función presentada por Dirichlet es una función de variable real que no es continua en ningún punto de la recta y se define en el intervalo [0,1] de la siguiente manera:

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ si } x \in [a,b] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \\ 0, \text{ si } x \in [a,b] \cap \mathbb{Q} \end{cases}$$

La función vale la unidad para todo punto de [0,1] irracional, y cero para todo punto racional del mismo intervalo. Por lo tanto, la función está definida para todo punto de [0,1]. La representación gráfica de esta función es un poco difícil: entre dos puntos racionales cualesquiera de [0,1] hay infinitos puntos irracionales, y la recíproca también es cierta, así es que la gráfica de la función consta de una nube lineal de puntos de ordenada unidad y otra nube lineal de puntos de ordenada nula.

Los trabajos Dirichlet sugirieron que el nuevo camino era la completa separación de los conceptos de *función* y de su *representación analítica*. En 1872, Weierstrass construyó un ejemplo de una función continua que no es derivable en ningún punto de su dominio, demostrando que era falsa la conjetura que circulaba en aquella época que afirmaba que las funciones continuas eran diferenciables salvo en puntos aislados. (Ver Fig. 2)

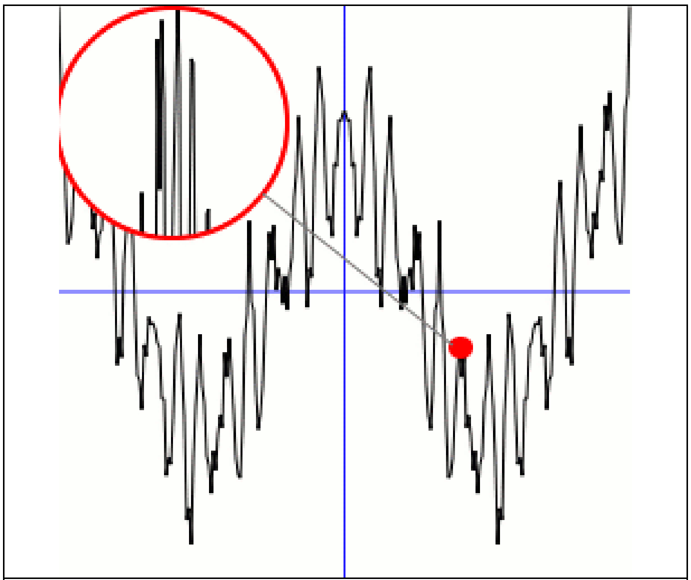


Fig.2 :Función de Weierstrass en el intervalo [−2, 2].
La función tiene un comportamiento fractal.(Wikipedia®)

Durante algún tiempo, las definiciones de *función* dadas por Dirichlet y Weierstrass, fueron totalmente aceptadas por la comunidad matemática. Sin embargo, recientemente se hizo claro que no todos los matemáticos estaban completamente de acuerdo respecto del valor y el sentido de estas definiciones: algunos señalaron que la definición de Weierstrass es excesivamente restrictiva; otros la encontraron perfecta; otros, demasiado general, y aún otros, carente de significado.

La Teoría de Conjuntos iniciada por Cantor (1845 - 1918) produce una nueva evolución del concepto de *función*, extendiéndose la noción para incluir:

> *"toda correspondencia arbitraria que satisfaga la condición de unicidad entre conjuntos numéricos o no numéricos"*

La evolución continuó: desde el concepto de *correspondencia*, los matemáticos pasaron al concepto de *relación*. Desde 1900 hasta 1920 se introdujeron conceptos como: *espacio métrico*, *espacio topológico*, *espacio de Hilbert* y *espacio de Banach*. Estos desarrollos condujeron a nuevas definiciones de *función* basadas en conjuntos arbitrarios que ya no son los números reales. Caratherdory (1917) define función como:

> *"una regla de correspondencia desde un conjunto A en los números reales" (Malik, 1980)*

A medida que avanza el nivel de la Matemática, haciéndose más abstracta, ocurre lo mismo con la definición de *función*. Los desarrollos en el campo del Álgebra abstracta y de la Topología dan lugar al surgimiento de nuevas definiciones teóricas conjuntistas. El grupo Bourbaki, en 1939, definió *función* como una correspondencia entre dos conjuntos de una forma semejante a la dada por Dirichlet en 1837 (Monna, 1972; Youschkevitch, 1976):

> *Sean E y F dos conjuntos, que pueden o no ser distintos. Una relación entre un elemento variable x de E y un elemento variable y de F, se llama relación funcional en y, si para todo x en E, existe un único y en F el cual está en la relación dada con x. Damos el nombre de función a la operación que, de esta forma, asocia cada elemento x en E con el elemento y en F que está en relación con x, se dice que y es el valor de la función en el elemento x, y se dice que la función está definida por la relación dada. Dos relaciones funcionales equivalentes determinan la misma función.*

Bourbaki también formuló una definición de *función equivalente*, como un conjunto de pares ordenados (Kleiner, 1989). En sus palabras:

> *"una función del conjunto E en el conjunto F se define como un subconjunto especial del producto cartesiano ExF"*

La forma de ver una función por Bourbaki difiere del punto de vista de Dirichlet en que el dominio y el codominio no están restringidos al conjunto de números reales. En la definición de Dirichlet el dominio de la función es un intervalo finito de números reales y el codominio está formado por números reales.

Conclusiones

Durante alrededor de 3700 años se trabajó con objetos matemáticos que solo llevaban implícitos el concepto de *función*. Pero fueron necesarios 300 años para la formación y desarrollo del concepto como tal, el que inicialmente surgió en relación con problemas del Cálculo y del Análisis.

A lo largo de la historia, los conocimientos matemáticos relativos a las "funciones" se han ido construyendo, bien sobre ideas previas o bien contra ellas, sobre la base de los intereses, cuestionamientos, problemas, posibilidades y limitaciones de cada cultura y de cada época.

La conceptualización de función aceptada actualmente, desde un punto de vista didáctico, admite representaciones en diferentes registros, cada uno con diversos alcances y limitaciones, cuyos antecedentes y significaciones pueden rastrearse a lo largo de la Historia.

Así, en el inicio de la génesis del concepto, la construcción de las tablas babilónicas puede asimilarse a lo que actualmente es la representación a través de tablas de valores. Del mismo modo, el trabajo con curvas desarrollado por los griegos puede ser interpretado como las primeras representaciones gráficas de las funciones.

Posteriormente, con la aparición de la Geometría Analítica se introducen las variables, y las relaciones entre ellas se expresan por medio de ecuaciones, aunque sin distinguir las variables dependientes de las independientes. Con la llegada del Cálculo los estudios continúan alrededor de las representaciones geométricas, aunque ya se vislumbra el inicio de las representaciones analíticas. En los comienzos de lo que luego sería el Análisis, el concepto de función pasa de ser concebido como expresión analítica (fórmula arbitraria) a ser entendido como curva.

Al constituirse el Análisis Matemático en la ciencia general de las variables y sus funciones, se define una función como una expresión analítica y toda la propuesta es algebraica. Pero luego, con los trabajos de Fourier, dichas representaciones algebraicas se colocan a igual nivel que las representaciones geométricas. Posteriormente, las funciones se independizan de las expresiones analíticas: la nueva definición considera que una función es una correspondencia arbitraria.

El siguiente cuadro resume la evolución de las definiciones de “función” de los últimos tres siglos.

<table>
<tr><th>Época</th><th>Definición</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Siglo XVII</td><td>Cualquier relación entre variables</td></tr>
<tr><td>Una cantidad obtenida de otras cantidades mediante operaciones algebraicas o cualquier otra operación imaginable</td></tr>
<tr><td>Cualquier cantidad que varía de un punto a otro de una curva</td></tr>
<tr><td>Cantidades formadas usando expresiones algebraicas y trascendentales de variables y constantes</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Siglo XVIII</td><td>Cantidades que dependen de una variable</td></tr>
<tr><td>Función de cierta variable como una cantidad que está compuesta de alguna forma por variables y constantes</td></tr>
<tr><td>Cualquier expresión útil para calcular</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Siglo IX</td><td>Correspondencia entre variables</td></tr>
<tr><td>Correspondencia entre un conjunto A y los números reales</td></tr>
<tr><td>Correspondencia entre dos conjuntos</td></tr>
<tr><td colspan="2">Adaptación a partir de Mathematical and Pedagogical Discussions of the Function Concept. Seoul Apt. 2-1002, Yeoeuido-dong, Yeongdeungpo-gu, Seoul 150-010, Korea; Journal of the Korea Society of Mathematical Education Series D: Research in Mathematical Education Vol. 3, No. 1, May 1999, 35–56</td></tr>
</table>

Conocer la génesis de los principales contenidos escolares puede convertirse en una importante herramienta didáctica que los docentes pueden utilizar creativamente en la búsqueda de aprendizajes cada vez más significativos.

Cada docente es constructor de su propia metodología de enseñanza, y al diseñar toda situación didáctica pone en juego una determinada concepción de la ciencia en general y de la Matemática, en particular. Enseñar y aprender un contenido matemático es también, inevitablemente, enseñar y aprender una concepción de la ciencia Matemática. En este marco, resulta relevante considerar el devenir histórico de los conocimientos para promover una conceptualización de la Matemática como una ciencia en construcción permanente, dedicada a la elaboración de conocimientos como recursos para resolver problemas, al desarrollo de procesos dirigidos a demostrar la validez de esos conocimientos y a la comunicación de los saberes producidos…, una Matemática que es producto de construcciones socio-históricas y, por tanto, resultante de interacciones sociales…, una Matemática que no es eterna ni inmutable.

Bibliografía

- F. Capra (1994): “A teia da vida”. 9. ed. Cultrix, São Paulo.
- U. Bottazzini (1986): “The Higher Calculus: A History of Real and Complex Analysis from Euler to Weierstrass”, Springer-Verlag.
- C. H. Edwards (1979) The Historical Development of the Calculus, Springer-Verlag.
- Grattan-Guinness (1970):”The Development of the Foundations of Mathematical Analysis from Euler to Riemann”, M.I.T Press.
- R. F. Iacobacci,(1965): “Augustin-Louis Cauchy and the Development of Mathematical Analysis”, Ph.D. Dissertation, New York Univ (University Microfilms, no. 65- 7298, 1986.)
- I. Kleiner, (1989): “Evolution of the function Concept: A Brief Survey”. The college Mathematics Journal, Published by: Mathematical Association of America September 1989, Vol. 20, Number 44,pp. 282-300.
- M. Kline, (1972): “Mathematical Thought from Ancient to Modern Times”. Oxford Univ.Press.
- R. E. Langer, (1947): “Fourier Series: The Genesis and Evolution of a Theory,” The First Herbert Ellsworth Slaught Memorial Paper, Math. Assoc. of America, 1947. (Suppl. to v. 54 of the Amer. Math. Monthly, pp. 1-86).
- Malik, M.A. (1980): “Historical and pedagogical aspects of the definition of function”. Int. Journal of mathematics education in science and technology , 11(4),489 –92
- F. Monna, (1972/3): “The Concept of Function in the 19th and 20th Centuries, in Particular with Regard to the Discussion Between Baire, Borel, and Lebesgue,” Arch. Hist.Ex. Sci. 9 (1972/73) 57–84.
- D. Rüthing (1984): “Some Definitions of the Concept of Function from John. Bernoulli to N. Bourbaki,” Math. Intelligencer 6:4 (1984) 72–77.
- A. P. Youschkevitch (1976): “The Concept of Function up to the Middle of the 19th Century,” Arch. History Exact. Sci. 16 (1)(1976/77) 37–85.

Patricia Sastre Vázquez, nacida en Capital Federal, Argentina, el 5 de julio de 1951. Agrimensora, por la Universidad Nacional del Sur (Argentina) y Doctora en Matemática Aplicada, por la Universidad de Alicante (España). Profesora Titular del Area de Matemática de la Facultad de Agronomía de Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, UNCPBA, (Argentina). Profesora Titular de Análisis II y Matemática, de la Facultad de Agronomía de la Universidad de Morón (Argentina). Es directora del Proyecto: "La enseñanza de la Matemática en una Facultad de Agronomía: Una perspectiva desde la Teoría de los Obstáculos Epistemológicos". Secretaria de Ciencia y Tecnica de la UNCPBA. Ha dictado cursos de posgrado en el país y en el extranjero. Tiene publicados trabajos en el área de la Educación Matemática y otras disciplinas relacionadas con la Agronomía y la Modelización, en Revistas Nacionales e Internacionales. Email: psastre@gfaa.unicen.edu.ar; pasava2001@yahoo.com.ar

Graciela Rey, nacida en Azul, Argentina, el 7 de agosto de 1961. Ingeniero Agrónomo por la Facultad de Agronomía Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (UNCPBA) Argentina. Diplomatura Superior en Ciencias Sociales con Mención en Constructivismo y Educación. FLACSO (Argentina). Post Título de Formación Docente con Especialización en EGB 3 y Polimodal. Instituto Superior de Formación Docente Nº 22 de Olavarría, (Argentina). Técnico en Saneamiento Ambiental. Escuela Superior de Sanidad Subsede Azul. (Argentina). Se encuentra realizando la Especialización en Constructivismo y Educación, FLASCO (Argentina). Jefe de Trabajos Pácticos del Area Fisico/Matemática de la Facultad de Agronomía de Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, UNCPBA, (Argentina). Es Integrante del Proyecto: "La enseñanza de la Matemática en una Facultad de Agronomía: Una perspectiva desde la Teoría de los Obstáculos Epistemológicos". Secretaria de Ciencia y Técnica de la UNCPBA. Tiene publicados trabajos en el área de la Educación Matemática y otras disciplinas relacionadas con la Agronomía, en Revistas Nacionales. Email: grey@faa.unicen.edu.ar

Carolina Boubée, nacida en Azul, Argentina, el 22 de abril de 1974. Profesora de Matemática, Física y Cosmografía, por Instituto Superior de Formación Docente y Técnica Nº 156 "Palmiro Bogliano". Azul, (Argentina) y Licenciada en Educación. Orientación: Enseñanza de la Matemática por la Universidad Nacional de Quilmes, (Argentina). Se encuentra cursando estudios en la Especialización / Maestría en Docencia Universitaria. Facultad de Humanidades. Universidad Nacional de Mar del Plata, (Argentina). Es Profesora de: "Historia de la Matemática", "Perspectiva Pedagógico Didáctica II (Didáctica Especial)" y "Educación, Ciencia y Tecnología"del Instituto Superior de Formación Docente, Azul (Argentina). Ayudante graduado del Area Fisico/Matemática de la Facultad de Agronomía de Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, UNCPBA, (Argentina). Es integrante del Proyecto: "La enseñanza de la Matemática en una Facultad de Agronomía: Una perspectiva desde la Teoría de los Obstáculos Epistemológicos". Secretaria de Ciencia y Tecnica de la UNCPBA. Tiene publicados trabajos en el área de la Educación Matemática y otras disciplinas relacionada con la Agronomía, en Revistas Nacionales e Internacionales. Email:cboubee@faa.unicen.edu.ar