UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2008, Número 16, páginas 123 - 140
ISSN: 1815-0640

Matemáticas especiales para alumnos especiales

ESTÍMULO TALENTO MATEMÁTICO

Coordinadora: Alicia Bruno Castañeda

Diagnóstico de errores en niños con talento

Enrique Castro, Maryorie Benavides e Isidoro Segovia

Resumen

Partimos del supuesto de que los niños con talento deben formar parte de la atención a la diversidad en los sistemas educativos. Frente a la situación existente en épocas anteriores, se ha producido una evolución recogida por documentos curriculares que avalan la necesidad de atención especial que se le debe prestar a estos alumnos. Dentro de las distintas estrategias de identificación e intervención que se han propugnado, resaltamos la identificación orientada a la intervención basada en los trabajos de Julian Stanley. Concretamente en este trabajo nos hemos centrado en un aspecto de ella "el pretest diagnóstico" y mostramos los errores que comenten niños con talento chilenos en el campo conceptual de la estructura multiplicativa.

La atención a la diversidad

La atención a la diversidad está siendo objeto de atención en los sistemas educativos de distintos países, pero hay que tener en cuenta que la diversidad se manifiesta de diversos modos: diversidad de centros, diversidad del profesorado, diversidad del alumnado (Gutiérrez y Maz, 2004). En lo referente a los estudiantes, la diversidad se hace ostensible en sus diferentes capacidades, facultades físicas y psíquicas, intereses, motivaciones, ambiente sociocultural, factores étnicos o religiosos y, a ella, se debe dar respuesta educativa promoviendo el respeto a las minorías y atención a las diferencias individuales. "Toda persona tiene derecho a recibir una educación que desarrolle al máximo sus capacidades" (Machado, 2004, p. 9). Sin embargo, esto no ha sido siempre así y, a pesar de que estas diferencias están presentes, no han sido tenidas en cuenta por los sistemas educativos, ni por los profesores, que han ofrecido respuestas educativas uniformes a realidades muy diversas (Gutiérrez y Maz, 2004).

La UNESCO ha sido sensible al tema de la diversidad y, en numerosos documentos auspiciados por este organismo internacional (Machado, 2004), se ha incidido en la necesidad de atender las diferencias individuales en educación:

> "Cada niño tiene características, intereses, capacidades y necesidades que le son propias; si el derecho a la educación significa algo, se deben diseñar los sistemas

educativos y desarrollar los programas de modo que tengan en cuenta toda la gama de esas diferentes características y necesidades” (p. 9).

Continuando en esta línea, Ruiz y Márquez (2006) señalan que “la diversidad implica reconocer y responder mediante acciones educativas concretas a las diferencias de los niños derivadas de sus características específicas” (p. 217) en la que la diversidad considere, o tenga en cuenta, que hay niños potencialmente sobresalientes. También destacan estos autores que la escuela regular no ofrece una respuesta educativa diversificada, sino excluyente, en la que los niños son tratados de manera homogénea sin considerar sus diferencias y necesidades vinculadas a sus características específicas.

Una de las consecuencias de la falta de atención a las diferencias individuales es que muchas personas no desarrollen plenamente sus talentos y capacidades. “Un buen porcentaje de alumnos con talento puede ver limitado el desarrollo de sus potencialidades, o bien presentar dificultades de aprendizaje y de participación, al no considerar sus necesidades educativas específicas” (Machado, 2004, p. 9).

Respuesta educativa a los niños con talento

La diversidad de alumnos en las aulas, presenta múltiples necesidades, una de ellas es la atención a los niños con talento. Pero este colectivo de sujetos ha sido uno de los últimos con necesidades educativas especiales al que los sistemas educativos han empezado a prestar atención. Las razones son varias: actitud de los docentes, falta de formación para atender la diversidad, la homogeneidad de la enseñanza, entre otras. Incluso el supuesto de que este colectivo no necesita una atención especial, puesto que saldrán adelante sin ayuda, ha contribuido durante mucho tiempo a que se les olvide.

Hasta la segunda mitad del siglo XX la atención a los estudiantes con talento no era motivo de preocupación por parte de los distintos estamentos implicados en la educación. Progresivamente se ha cambiado de parecer y, en la actualidad *“existe una mayor conciencia de que estos alumnos sí requieren ayudas y apoyos especiales para lograr el máximo desarrollo de sus capacidades”* (Blanco, Ríos y Benavides, 2004, p. 49). Estos autores señalan que, a pesar de este reconocimiento, “las demandas educativas de estos alumnos no son suficientemente atendidas por los sistemas educativos, más preocupados por aquellos que tienen discapacidad o problemas de aprendizaje” (p. 49). Recomiendan que los sistemas educativos y las escuelas desarrollen acciones encaminadas a dar una respuesta educativa que promuevan el pleno desarrollo y aprendizaje de los escolares con talento excepcional.

Los niños superdotados y con talento tienen cualidades generales comunes. Freeman (1988) señala dos de ellas: a) aprenden más rápidamente, y b) tienen mayor profundidad y extensión en el aprendizaje. Sin embargo, Blanco, Ríos y Benavides (2004) señalan que no constituyen un grupo homogéneo y que difieren en muchos aspectos que deben ser tenidos en cuenta a la hora de planificar una intervención. Una de las recomendaciones que propugnan es que se realice:

> "una evaluación del alumno o alumna en el contexto educativo en el que se desarrolla y aprende que permita conocer sus necesidades educativas específicas y que sirva para la toma de decisiones sobre las adaptaciones del currículo y sobre los recursos y ayudas que hay que proporcionar a cada uno para optimizar el desarrollo de sus capacidades" (p. 50).

La atención de los niños con talento matemático

De forma paralela a la atención de niños con talento en general, la educación de los niños con talento matemático está empezando a recibir atención en los sistemas educativos de distintos países, pero en el pasado ha sido una minoría olvidada. Así lo reconoce el National Council of Teachers of Mathematics en el documento An Agenda for Action (1980): *"Los estudiantes más olvidados, en términos de alcanzar su potencial, son los estudiantes superdotados de matemáticas"* (p. 18).

El National Council of Teacher of Mathematics, pone de manifiesto que todos los niños pueden aprender matemáticas y no sólo unos pocos. Esta idea de "matemáticas para todos", se explicita en varios de sus documentos: Los Standards (1989) hablan de objetivos para todos los estudiantes; los Professional Standards (1991) exponen que *"todos los estudiantes pueden aprender a pensar matemáticamente"* (p.21); y los Principles and Standards for School Mathematics (2000) subrayan el aprendizaje matemático para todos en su principio de equidad (The Equity Principle). Entre los grupos de estudiantes a los que afecta este principio mencionan a los estudiantes que muestran interés especial por las matemáticas y a los que poseen un talento excepcional en matemáticas. Estos estudiantes podrían necesitar programas especiales o recursos adicionales para alcanzar su desarrollo potencial. Destaca este documento que el interés o el talento de estos estudiantes debería ser atendido para que puedan alcanzar una formación excelente en matemáticas.

Estas ideas también las subraya Lappan (sin fecha), como miembro activo en varios documentos del National Council of Teachers of Mathematics y presidenta durante un tiempo de dicho Consejo:

> "Nuestro primer objetivo debería ser potenciar matemáticamente a todos los estudiantes. A menudo hablamos de ofrecer oportunidades a los estudiantes más desfavorecidos. Pero entre los estudiantes que tenemos en nuestros cursos algunos tienen altas capacidades. Nuestros programas deberían incluir también oportunidades para estos estudiantes. En el futuro estos estudiantes serán usuarios de las matemáticas: científicos, matemáticos, estadísticos, ingenieros, técnicos e investigadores. Merecen que se les tenga en cuenta en la programación de igual manera que se tiene en cuenta otro tipo de necesidades especiales." (p. 1).

El sentido del Principio de Equidad propuesto en los Principles and Standards for School Mathematics (2000), también lo describe Van de Walle (2001), identificando la diversidad de sujetos en una sala de clases: los estudiantes con problemas de aprendizaje, los estudiantes con diferencias culturales, las diferencias según el sexo y los estudiantes con talento matemático.

Intervención

Se han propuesto varias estrategias de intervención para ser aplicadas a niños con talento. Unas son de carácter organizativo, y se refieren al modo de ubicar a los sujetos con talento respecto a sus compañeros: integración, agrupamiento, individualización; otras son estrategias relativas a los contenidos del currículo y, entre ellas, cabe destacar el enriquecimiento y la aceleración. Ambas fórmulas son válidas y se aplican con fines distintos. El enriquecimiento es la fórmula usual cuando a los alumnos se les dan clases al margen de la enseñanza oficial, con el ánimo de potenciar sus dotes excepcionales. Los problemas y las actividades que se les proponen suelen evitar excesiva dependencia con los conocimientos matemáticos, a veces incluso no tienen conexión con el contenido matemático del currículo escolar. La aceleración es otra de las modalidades que se han adoptado en la intervención de niños con talento, en la que a los niños se les evalúa y se les ubica en un curso más avanzado del que les corresponde por su edad.

Identificación orientada a la intervención

Desde el ámbito educativo, la finalidad que tiene la identificación de los niños superdotados y con talento es someterlos a un proceso de intervención, bien en un ambiente integrado con el resto de su clase, o en cursos especiales enfocados al enriquecimiento del sujeto o a la aceleración de su proceso académico. La mayoría de las técnicas que se han empleado (y se emplean) para la identificación de estos niños excepcionales no transcienden la fase de identificación, en el sentido de que no se obtiene del proceso de identificación información adicional que pueda guiar el proceso instructivo de los niños superdotados. Pensamos que debe haber una evaluación posterior a la fase de identificación, de carácter diagnóstico, que sirva para planificar parcial o totalmente el programa de intervención. En este sentido señala Johnson (1983) que:

> "Deberíamos encontrar formas de ampliar nuestros procesos de identificación que incluya información cualitativa e integrar esa información en nuestras decisiones de lo que es un superdotado en matemáticas. Esta información podría utilizarse inmediatamente en la planificación de la programación" (p. 55).

Nuestra propuesta va en esta línea, se refiere a la evaluación de los niños con talento en la fase inicial de identificación o inmediatamente posterior a ella, con el deseo adicional de que obtengamos información para la intervención posterior con estos niños. Planteamos un marco teórico en el que dicho proceso esté motivado por la intención y la posibilidad real de ofrecer servicios o programas adecuados a sus necesidades. Así mismo, tanto los procesos de identificación como las características del programa de intervención deben ajustarse al tipo de talento que se vaya a trabajar, al nivel de desarrollo de los alumnos y al campo de conocimiento específico que se trabaje. La atención de estos alumnos en sus aulas desde un enfoque integrador requiere conocer cuáles son las necesidades específicas diferenciadas que tienen estos alumnos “especiales” y la mejor forma de desarrollar su talento y, concretamente en nuestro caso, el talento matemático.

Situando lo anterior, y desde un enfoque cognitivo, vemos la necesidad de que el proceso de identificación sirva para conocer no sólo las altas puntuaciones de los sujetos en un test de inteligencia general, sino también aspectos cualitativos relacionados con la resolución de problemas. Creemos necesario un análisis cualitativo de las producciones de los sujetos obtenidas del proceso de resolución de problemas de matemáticas. Proponemos, además, que el proceso de evaluación diagnóstica que seguiría al proceso de identificación de niños con talento sea lo más cercano posible al proceso de instrucción, en una parcela específica de conocimiento ligada al nivel de desarrollo de los conocimientos curriculares del alumno en matemáticas. La identificación de las estrategias que emplean los estudiantes en un campo de conocimiento específico y los errores que comenten, es un punto de partida (Socas, 1997; Rico, 1993), y proporciona al profesor una base cognitiva para tomar decisiones e intervenir en el aula para desarrollar el talento matemático de los estudiantes superdotados.

Así pues, abogamos, dentro de una intervención integradora del alumno superdotado en su aula, por instrumentos de identificación que sean útiles no sólo para diferenciar a los sujetos por sus puntuaciones en un test de inteligencia, o por las capacidades de pensamiento generales que permiten evidenciar, sino que somos partidarios de instrumentos que cumpliendo con una función diferenciadora entre sujetos, proporcionen además elementos de juicio para una intervención que esté basada cognitivamente y centrada en un ámbito curricular concreto del área de conocimiento que se esté tratando. Esto no es contradictorio con un programa de enriquecimiento o de aceleración curricular, lo vemos como complementario, es decir, se pueden proponer actividades de enriquecimiento que tengan un carácter general, pero nosotros proponemos además utilizar el conocimiento que hemos adquirido de la prueba de diagnóstico para proponer actividades que potencien las estrategias detectadas en los alumnos y que permitan corregir los errores observados.

Evaluación diagnóstica-enseñanza prescriptiva

La idea de evaluación diagnóstica como parte de un modelo de identificación e intervención en un colectivo de niños con talento no es nueva, y se enmarca en lo que se denomina, en general, enseñanza diagnóstica. Dentro del ámbito de los sujetos con talento matemático hay modelos pioneros en este sentido, como el SMPY de Julian Stanley (Assouline y Lupkowski-Shoplik, 2005).

Stanley desarrolló el modelo: “Diagnostic Testing $\rightarrow$ Prescriptive Instruction”, para utilizarlo con estudiantes matemáticamente precoces. El modelo es útil para asegurarse de que los estudiantes con talento no se saltan conceptos importantes o tienen lagunas en su periodo de formación. La noción de evaluación diagnóstica y enseñanza prescriptiva tiene sus raíces en la educación especial, y ha tenido cierta repercusión en educación matemática. Este enfoque aplicado a niños especiales consiste en evaluar a los estudiantes con instrumentos de un nivel diferente al que le correspondería por su edad. Una de las primeras investigadoras de niños superdotados Leta Hollingworth (citada en Assouline y Lupkowski-Shoplik, 2005), reconoce que la idea de evaluar con instrumentos que corresponden a un nivel diferente, podría ser útil para los estudiantes superdotados, los cuales podrían ser evaluados con tests diagnósticos diseñados para cursos superiores a los que pertenecen los niños. Julian Stanley extendió las ideas de Hollingworth en los últimos años de la década de 1960 y en los primeros de la de 1970 y desarrolló el modelo "Diagnostic Testing → Prescriptive Instruction" para identificar en los estudiantes con talento matemático, fortalezas y debilidades y señalar aspectos que necesitan trabajar. En 1971 se inició oficialmente el programa Study Mathematical Prococity Young (SMPY) en la Universidad de Johns Hopkins y, sus objetivos fueron identificar, estudiar y proporcionar educación a niños que inicialmente están en los dos primeros años de la escuela secundaria inferior, es decir, que tienen entre doce y catorce años.

Nuestra propuesta recoge la tradición del modelo de Stanley en su versión más actual (Assouline y Lupkowski-Shoplik, 2005), pero con algunas modificaciones que intentan hacerlo más operativo y actual, como veremos a continuación.

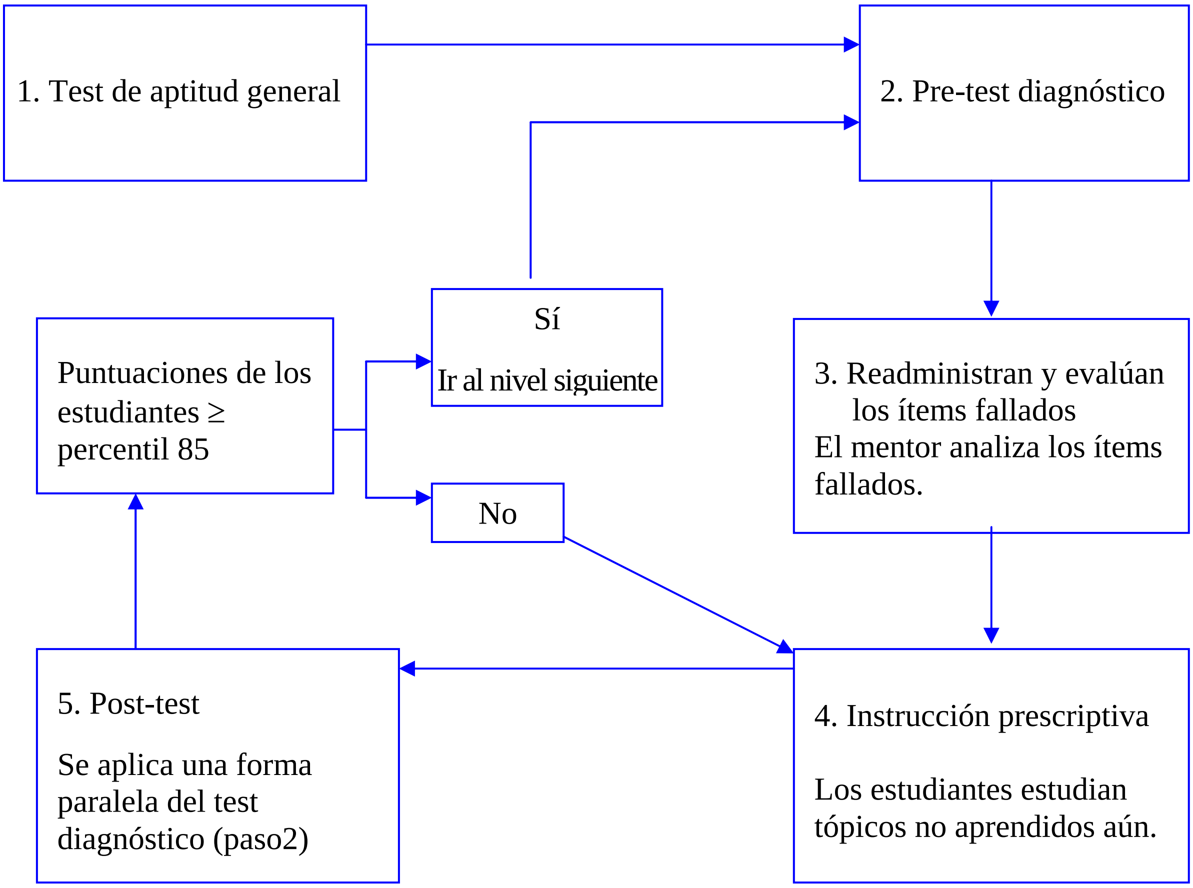


Figura 1. El modelo FD-PI (tomado de Assouline y Lupkowski-Shoplik, 2005)

La primera fase del modelo de Stanley (veáse fig. 1) es una fase de identificación de niños con talento en la que se utiliza una prueba de aptitud general. Normalmente esta fase requiere aplicar un test de inteligencia o de aptitud general (ej., test de Raven) y precisa de un experto psicólogo para su interpretación. Posteriormente, se requiere de otro profesional, el profesor especialista, para la fase de intervención.

En la segunda fase de este modelo de Stanley se administra un test diagnóstico de aptitud específica de un nivel superior al que se encuentran los niños. Aquí es donde nuestra investigación realiza una primera aportación original. Pensamos que una de las opciones alternativas que se pueden dar es que el test diagnóstico esté constituido por ítems que sean problemas pertenecientes, o que estén dentro, de un campo conceptual de la matemática (Vergnaud, 1990) que permita diagnosticar las lagunas de conocimientos, los errores, las estrategias incipientes que manifiestan los niños y las representaciones que realizan en ese campo conceptual.

El problema requiere, inicialmente, construir un test de aptitud específico, es decir, un test ligado a un campo conceptual de contenido matemático específico que pudiera cumplir función diagnóstica dentro del campo conceptual correspondiente, del cual se pudieran realizar con facilidad réplicas similares que pudiesen aplicarse, una vez realizada la intervención, como postest.

La estructura multiplicativa

Acorde con lo anterior, nuestras ideas las hemos contextualizado en un campo conceptual (Vergnaud, 1990) de la matemática escolar, el de la estructura multiplicativa (Vergnaud, 1983, 1998), y hemos construido un test constituido por una batería de problemas, a modo de test de aptitud específico, relativo a ese campo de conocimiento (Benavides, 2008; Castro, Benavides y Segovia, 2006). Con la finalidad de identificar en alumnos con talento de primer ciclo de secundaria, las estrategias específicas de resolución en ese campo conceptual y los errores que cometen. Para la construcción del test hemos seleccionado problemas que han sido ítems representativos de investigaciones previas dentro del campo conceptual de la estructura multiplicativa.

La noción de campo conceptual lo propuso Vergnaud (1983), con el interés de comprender la adquisición y el desarrollo de conocimientos específicos y de destrezas relacionadas con situaciones y problemas. El campo conceptual de la estructura multiplicativa ha sido estudiado desde la década de 1980 y se han realizado importantes aportaciones, tanto en su delimitación teórica como en las estrategias, dificultades y errores que cometen los resolutores en tareas ligadas a este campo conceptual (Bell, Greer, Grimison y Mangan, 1989; Castro, 1995; Greer, 1992; Nesher, 1988; Vergnaud, 1983, 1988). Algunas de las tareas que se han utilizado en estas investigaciones son problemas que plantean cierta dificultad a los mejores alumnos de una misma etapa educativa, y pensamos que pueden ser útiles para evaluar de manera diagnóstica el conocimiento matemático de los alumnos con talento en el ámbito de la estructura multiplicativa en un determinado estadio de su desarrollo.

Método

1.- Preguntas de investigación

Cuando pensamos en niños superdotados o en niños con talento, damos por supuesto que suelen hacer bien todas las tareas que se les proponen. Evidentemente, en general, su rendimiento es superior a la media, pero ello no conlleva que durante la fase de aprendizaje escolar no cometan errores en las tareas que se les proponen. Conviene saber no sólo si cometen errores, también es conveniente conocer los errores que cometen en tareas enmarcadas dentro de un campo conceptual de la matemática. Esto es un aporte importante de la fase diagnóstica y facilitaría y permitiría al profesor realizar una instrucción adecuada. Por ello, nos plantemos las preguntas:

- ¿Cometen los sujetos con talento errores? Y en tal caso,
- ¿Qué tipo de errores cometen los niños con talento al resolver problemas de un campo específico de conocimiento que en este trabajo es la estructura multiplicativa?

2. Sujetos

Las preguntas anteriores las hemos estudiado con alumnos chilenos de los últimos cursos de educación básica**.** En la investigación han intervenido un grupo de 30 estudiantes con talento a los que se les ha aplicado el cuestionario de problemas de estructura multiplicativa. Poseen unas características comunes: son niños de ambos sexos seleccionados de dos comunas de Santiago de Chile: Puente Alto y La Florida; tienen una edad comprendida entre 11 y 13 años y están cursando sexto u octavo año de Educación Básica, y provenían de establecimientos educacionales de una zona de nivel socioeconómico medio. Estos estudiantes fueron seleccionados por sus profesores para que participaran en un programa de identificación de talentos. Entre los participantes se seleccionaron los que tuvieron una puntuación igual o superior al percentil 75 en el test de Raven. Una vez seleccionados, el grupo de los 30 estudiantes con talento participaban semanalmente en un programa para niños con talento en la Universidad.

3. Instrumento

En este trabajo de investigación hemos utilizado un cuestionario de problemas de estructura multiplicativa, que hemos construido *ad hoc* y que hemos denominado cuestionario PEM. La estructura multiplicativa implicada en el cuestionario PEM es una de las más ricas de la matemática por la variedad de contextos y situaciones a los que puede referirse, por las diferentes posibilidades en cuanto al tipo de cantidades implicadas y por la variedad de categorías semánticas (Bell y otros 1989; Greer, 1992; Nesher, 1988; Vergnaud, 1988). La estructura multiplicativa se desarrolla durante un amplio intervalo de tiempo, es por tanto, una estructura implicada en todas las etapas de desarrollo y aprendizaje; determinadas situaciones pueden ser adquiridas y resueltas en los primeros niveles de la Educación Primaria y otras tienen dificultad en su resolución en las últimas etapas de la Educación Secundaria Obligatoria. Las características anteriores hacen muy pertinente su presencia en una prueba en la etapa de desarrollo en la que se encuentran los sujetos de la investigación.

Con respecto al contenido de los ítems incluidos en el cuestionario PEM, además de las variantes de problemas simples que se dan dentro de la estructura multiplicativa se le han impuesto otras características adicionales a los problemas, como el tipo de número que aparece como dato o el contenido matemático implícito, que nos permite clasificar los 12 problemas del cuestionario PEM en cinco grupos. La tabla 3.2 recoge los 12 problemas que conforman el cuestionario PEM agrupados según los cinco tipos que han sido considerados.

Tabla 3.2. Tipos de problemas de estructura multiplicativa

Tipo de problemas	Problemas	Característica
1	**1 – 4 – 8 – 12**	**Problemas de comparación**
2	**3 – 9**	**Problemas de combinatoria**
3	**6 – 10**	**Problemas de escala**
4	**5 – 7**	**Problemas complejos**
5	**2 – 11**	**Problemas de proporcionalidad simple con números decimales**

4. Procedimiento

El cuestionario se aplicó al grupo de estudiantes del programa de talentos y al grupo de contraste, en dos instancias separadas por una semana, la primera aplicación constó con 6 problemas y la segunda con los siguientes 6 problemas aparte. La razón para hacerlo en dos sesiones separadas fue debido a que en el cuestionario había problemas “parecidos” y se quería que no influyera en las respuestas.

A los estudiantes del programa de talentos se les administró el cuestionario en su sala de clases, mientras asistían a cursos en la universidad. La realización de la prueba duró en cada instancia aproximadamente una hora.

La aplicación del cuestionario al grupo de estudiantes que no participan del programa de talentos se realizó en sus respectivos colegios, previa coordinación con la profesora jefe de la unidad técnico-pedagógica o encargada del programa PENTA-UC de cada establecimiento educacional. La aplicación del cuestionario se realizó en algunas ocasiones en la sala de clases de los niños aplicando el instrumento a todo su curso, por solicitud del colegio, y en otras ocasiones, en la biblioteca del establecimiento educacional.

La aplicación del cuestionario se realizó durante los meses de marzo y abril del 2003, visitando un total de 6 colegios de las comunas de la Florida y Puente Alto en la ciudad de Santiago de Chile. El tiempo máximo disponible para la contestación de los cuestionarios fue de dos horas aunque todos los sujetos lo terminaron antes de dicho plazo. Al niño se le dieron unas instrucciones previas. Se insistió en la necesidad de que escribieran todas las operaciones necesarias para resolver los problemas.

Resultados

Criterios para definir los errores

El proceso de resolución de problemas comprende dos fases: comprensión y solución (Mayer, 1986). La fase de solución conlleva un aspecto de planificar y ejecutar las operaciones necesarias para obtener un resultado. Por tanto, los errores se pueden producir en una de estas fases, o bien, en las dos. Después de un análisis exhaustivo de las producciones de los sujetos con talento, hemos observado que en la fase de ejecución de las operaciones no hay errores que resulten significativos ni por su naturaleza ni por su frecuencia, pero que sí los hay en la fase de comprensión. Por lo tanto, exponemos sólo los errores producidos en la fase de comprensión.

Los errores que han cometido los sujetos con talento los hemos clasificado en siete tipos o categorías: Conmutar los datos, Cambio de estructura, Inversión de la operación, Omitir una operación, Error en un concepto, Cambio de significado de una relación, y Emplear una estimación. Además, hemos considerado una categoría complementaria de "No responde", que se refiere al caso que no se ha producido un proceso escrito para alcanzar la solución. El significado de estos errores es el siguiente:

1. Conmutar los datos

En las operaciones aritméticas se puede distinguir las que cumplen la propiedad conmutativa (adición y multiplicación) de las que no la cumplen (substracción, división, potenciación). Cuando aplicamos estas operaciones para resolver problemas, puede que lo hagamos sin comprender el significado de cada uno de los datos, esto en las operaciones aritméticas que son simétricas no se aprecia, pues no importa el orden en el que operemos con los datos, pero en las operaciones que no son simétricas sí se aprecia, pues el orden es importante de cara a la solución. Por ello, ha sido en las operaciones no simétricas de carácter multiplicativo (multiplicación y potenciación) donde hemos observado el error de confundir el papel de alguno de los datos. Lo hemos detectado en los casos en que el resolutor elige una operación que es adecuada para solucionar el problema, pero le asigna al menos a un dato un papel que no le corresponde en la operación, o que le correspondería al otro dato. Al menos un dato no está ubicado en la operación de manera correcta, por lo cual no desempeña la función que debiera según el problema. Esto queda patente en los problemas que requieren una división cuando intercambiamos el divisor y el dividendo: así mismo, se da cuando en una potencia se intercambian el valor de la base y el exponente.

Este error se ha presentado de manera significativa en un problema complejo de combinatoria, y en un problema con números decimales. En el problema con números decimales los sujetos que cometen este error escogen correctamente la operación aritmética, la división, pero intercambian la función o el papel que desempeñan los dos datos, en una operación que no es conmutativa, por lo que la traducción a operación aritmética que hace el resolutor del problema no es correcta y, por tanto, el resultado no es el adecuado.

En el problema de combinatoria, se le asigna a uno de los datos del problema, el número 5, el papel de otro dato, el del número 2, utilizando la operación de 5^5 (5 elevado a 5) para resolver el problema, cuando debía utilizar 2^2.

2. Cambio de estructura

El nombre de este error lo hemos tomado de la literatura existente sobre resolución de problemas matemáticos (Castro, 1994; Castro, Rico y Castro, 1992). Se localiza en aquellas soluciones en las que los sujetos realizan una regresión hacia estructuras más sencillas, fundamentalmente de carácter aditivo. El sujeto, al resolver el problema, en vez de emplear las operaciones de multiplicar o dividir, pertenecientes a la estructura multiplicativa, y que son los pertinentes en estos problemas, emplea la suma o la resta, que son conceptos en cierta medida paralelos, pero pertenecientes a la estructura aditiva y, por tanto, no le conduce a la solución correcta del problema. Es decir, el resolutor ha dado la solución a un problema de estructura multiplicativa como si éste fuese de estructura aditiva.

El error de cambio de estructura se ha presentado en las producciones de los niños con talento en los problemas de comparación, de números decimales, problemas de combinatoria y en problemas de escala, y lo ha hecho de dos formas con distinto nivel de complejidad, a las que referimos como forma simple y forma compleja. La frecuencia de aparición de este error ha resultado significativa en los problemas de números decimales y en los problemas de combinatoria simples, denominado por algunos autores como problemas de producto cartesiano.

El error de cambio de estructura, en su forma más simple ha aparecido en problemas de comparación multiplicativa. Un tipo de representación errónea de este problema suele venir dada por la resta de los datos

$$\begin{array}{r} \mathbf{180} \\ \underline{\mathbf{-\ 60}} \\ \mathbf{120} \end{array}$$

es decir, se sustituye la división por la resta.

Como hemos indicado, este error de cambio de estructura, se manifiesta cuando los sujetos escogen la operación de sustracción que es inadecuada para resolver el problema. Decimos que cambia de estructura porque para resolver el problema el resolutor escoge una operación que corresponde a una estructura más simple, la estructura aditiva, dentro de esta estructura ha escogido la resta de datos cuando la representación correcta se realiza utilizando la operación de división. Pensamos que esto se debe a que interpretan la expresión *veces menos estatura* como si fuese *¿cuánta menos estatura?* Esta idea se puede apreciar en la respuesta de un sujeto de la investigación que da como solución “120 cm menos de estatura”.

Una versión más compleja del error de cambio de estructura se ha dado en los problemas con números decimales, en los que el error se ha manifestado de dos formas:

a) los que restan los dos datos: restan las dos cantidades que corresponden a magnitudes de naturaleza distinta. En este caso calculan la diferencia entre el peso y el precio, que son magnitudes diferentes.
b) compensación entre magnitudes diferentes (restan compensando). En este caso la resta además de ser entre magnitudes diferentes, intenta obtener el valor tal que se acerque a la unidad del peso y del precio.

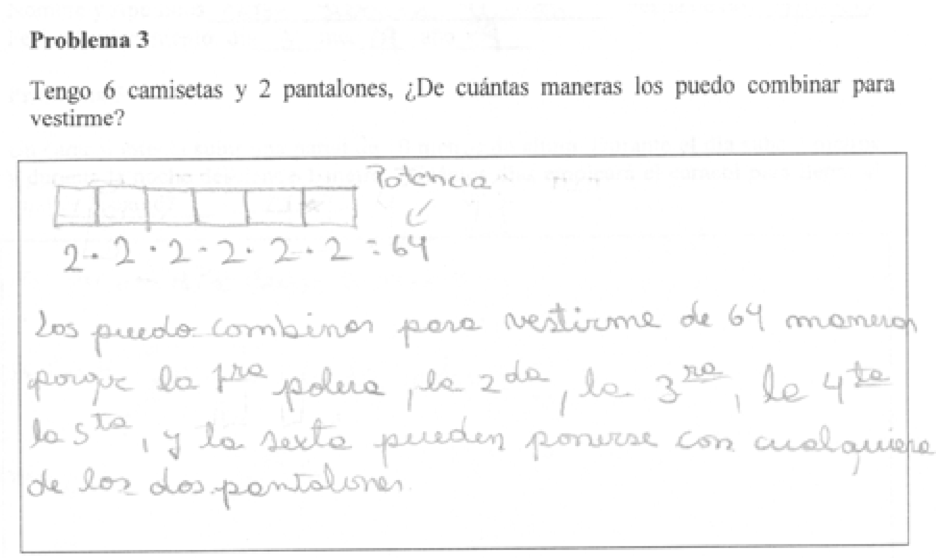
En el problema de combinatoria, tipo producto cartesiano, se ha dado el error de cambio de estructura de tres formas diferentes:

1. sumar 6+2, en vez de multiplicar 2×6,
2. multiplicar 2×2×2×2×2×2 en vez de sumar 2+2+2+2+2+2, y
3. multiplicar 6×6, en vez de sumar 6+6.

En la primera forma, el estudiante argumenta que la solución es “6+2=8 por que son los únicos números y la operación es razonable. Tengo 8 maneras”.

La segunda forma consiste en multiplicar 6 por 6 y da como respuesta 36 y además, para obtener la solución uno de los estudiantes emplea un bosquejo de diagrama de árbol, parte de dos puntos que representan los dos pantalones y de cada uno de ellos saca seis ramas correspondientes a las seis camisetas, pero en vez de sumar las seis ramas de cada pantalón, lo que daría 6+6 que daría el resultado correcto, las multiplica 6×6=36, dando como resultado 36: “Los puedo combinar de 36 maneras para vestirme”. ¿De dónde proviene aquí el error? ¿De falta de conocimiento de la situación descrita en el enunciado del problema? Creo que no, pues es una situación familiar a cualquier sujeto. En este caso se entiende que se debe combinar camisa con pantalón como se desprende de los niveles representados en el diagrama de árbol, pero es la propia funcionalidad del diagrama de árbol, al utilizarlo sin referencia a la situación real, el que provoca que se cometa el error. El resolutor ha traducido el problema a un diagrama de árbol y a partir de ahí es el diagrama de árbol el que ha impuesto la solución. Y ello en la manera de cómo entiende el resolutor el diagrama de árbol.

La forma de solución es la siguiente:



Problema 3

Tengo 6 camisetas y 2 pantalones, ¿De cuántas maneras los puedo combinar para vestirme?

Potencia

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64$

Los puedo combinar para vestirme de 64 maneras porque la 1ra polera, la 2da, la 3ra, la 4ta la 5ta, y la sexta pueden ponerse con cualquiera de los dos pantalones.

$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 64$, en ella se puede observar que el resolutor ha traducido el enunciado en un esquema lineal que le sirve para elegir las operaciones que tiene que realizar. En este caso el diagrama elegido no es adecuado para representar el problema.

3. Inversión de la operación

Este nombre lo hemos tomado de la literatura sobre resolución de problemas de estructura multiplicativa (Castro, Rico y Castro, 1992; Castro, 1994). Consiste en utilizar la operación inversa de la que se debe emplear en la resolución del problema. En un principio, puede asimilarse al error ya citado de conmutar los datos, pero queremos resaltar la diferencia, pues no es lo mismo intercambiar el dividendo por el divisor, que cambiar la división por la multiplicación. Este error se produce cuando el sujeto escoge la operación aritmética inversa a la requerida para solucionar el problema. Si la operación necesaria para resolver el problema es la multiplicación escoge incorrectamente la división, y viceversa, y lo mismo puede ocurrir con la adición y sustracción en un modelo aditivo.

Este error ha ocurrido en cuatro de los doce problemas empleados en el estudio: en los dos problemas de números decimales, en un problema de comparación y en un problema de escala. El error se ha presentado en la forma siguiente:

En los problemas de números decimales, este error de manifiesta de la siguiente forma: En uno de los problemas, el error de inversión se pone de manifiesto cuando los sujetos en vez de multiplicar $0{,}923 \times 6{,}5$ realizan la operación de dividir $0{,}923 : 6{,}5$ entre esos mismos datos. Y, en el otro problema, que es el problema inverso del anterior, el error se manifiesta cuando los sujetos en vez de realizar la operación de dividir $6 : 0{,}923$ lo que hacen es multiplicar los datos $0{,}923 \times 6$, esta solución está acompañada de operaciones de cambio de unidad, como dividir 6 entre 1000.

En uno de los problemas de comparación, este error se produce cuando el sujeto utiliza la operación multiplicación $180 \times 3 = 540$, en vez de la operación división 180:3, dando como solución 540. En otro de los problema de comparación, se da cuando interpreta de manera equivocada la expresión "veces menos", realizando la operación 180×3 para resolver el problema.

En uno de los problemas de escala, aparece como error dividir la distancia real de la escala en la distancia del papel entre las dos ciudades, cuando lo que debería hacer es multiplicarlas. Así ocurre, por ejemplo, cuando se realiza la división de 4000000 : 3.

4. Omitir una operación

Este error se produce cuando en la representación aritmética de un problema el resolutor no tiene en cuenta una condición incluida en el enunciado del problema, bien de manera implícita, o de manera explícita. Hay que poner de manifiesto que ha sido este error el que ha aparecido con más frecuencia.

En uno de los problemas se ha dado el error de generalizar lo que se daba en los primeros casos, sin advertir que esa pauta se quebraba por una condición que no estaba explícitamente dicha en el enunciado.

La dificultad que ocasiona a los niños la interrelación entre área y perímetro ha provocado también la omisión de operaciones en el resultado. En uno de los problemas, que incorpora los conceptos de área y perímetro, y en el que se pedía hallar la diferencia entre el área de un cuadrado y otro obtenido disminuyendo su perímetro, hay sujetos que dan como respuesta un resultado intermedio: el área del cuadrado disminuido. Es decir, en la fase de comprensión del problema omiten una relación, la final, que corresponde a la diferencia de áreas del cuadrado inicial y del cuadrado disminuido. Es pues un error de integración global de las relaciones del problema. Más precisamente, en vez de responder a la diferencia de áreas entre el cuadrado inicial y el cuadrado final disminuido, entienden que se les pregunta por el área del cuadrado disminuido, y dan como respuesta el área de este último. No cometen errores de cálculo.

Por ejemplo, un sujeto procede de la siguiente manera:

$$P_1 = 8 \times 4 = 32,$$

$$A_1 = 8 \cdot 8 = 64,$$

$$P_2 = 32-8 = 24,$$

$$P_2 = 4 = 6 = l_2,$$

$$A_2 = l_2 \times l_2 = 36$$

Dando como respuesta 36 que es el área del cuadrado disminuido $A_{2.}$ Otro sujeto ni siquiera ve necesario calcular el área del primer cuadrado A_1.

5. Error en un concepto

Entendemos que hay un error en un concepto cuando en la producción de un sujeto se puede observar que se ha plasmado un concepto de manera equivocada. El error conceptual puede tener su origen en la carencia por parte del resolutor de algún conocimiento específico matemático que le impide resolver el problema correctamente, y que en algunos casos le hace producir respuestas inventadas erróneas, pero no se descartan otras razones.

6. Cambio de significado de una relación

En un problema intervienen conceptos y relaciones y, en ocasiones, las producciones de los sujetos reflejan que una relación se está utilizando con un significado que no es el adecuado desde el punto de vista matemático. En este sentido, hablamos de cambio de significado de una relación porque los sujetos que cometen este error utilizan toda la información presente en el problema, pero hacen una interpretación alternativa equivocada de alguna de las relaciones presentes en él.

El error de cambio de significado de una relación ha aparecido muy repartido en los distintos tipos de problemas. En los problemas de comparación, los sujetos hacen una traducción de la relación comparativa que denota que no han utilizado su significado matemático correcto, interpretan la expresión comparativa “veces menos” como una expresión compuesta. Para obtener cuántas veces menos es 60 que 180, empiezan restando 180-60=120 y dividiendo 120:60 y dan como solución “dos veces menos”. Y, en uno de los problemas, cuando se le dice que un objeto miden 180 cm y el otro 3 veces menos, ante la pregunta ¿cuánto mide este último? Después de hacer correctamente la división de 180 entre 3 dan como resultado: “No mide, mide 0 cm.” Es decir, han cambiado el significado de la pregunta.

En el problema que incorpora las nociones de área y perímetro, interpretan de manera equivocada una de las relaciones del problema. Este error lo cometen los sujetos que interpretan la expresión "se disminuye en 8" como si fuese la expresión "se disminuye a 8".

7. Emplear una estimación

Utilizar una estimación numérica es una estrategia que se emplea para resolver problemas, o para detectar la razonabilidad de una respuesta. Si el contexto lo requiere el realizar una estimación para resolver un problema puede ser adecuado, pero entendemos que no es el caso de los problemas que hemos planteado en este estudio y, por lo tanto, si el sujeto ha empleado una estrategia de estimación consideramos que ha incurrido en un error al que hemos dado este nombre.

Este error sólo se ha dado de manera significativa en los problemas con números decimales.

Ha aparecido de las siguientes maneras:

a) Interpretan el "trozo" de queso como la mitad.
b) Establecen una equivalencia inadecuada entre los dólares y los gramos, por ejemplo, 1,5 dólares =75 gramos.

8. No responde

Esta categoría incluye los casos en que el resolutor no ha producido un proceso escrito para alcanzar la solución. En general, no responden a un único criterio, aunque la mayoría de los casos se refieren a las respuestas de los sujetos que *no responden,* esto ocurre en algunos problemas en los que no hay respuesta, es decir, aparecen en blanco; en menor medida, también hemos incluido respuestas en las que el *resolutor hace algo*, como es el caso del sujeto que construye la figura de un cuadrado, le añade las medidas de sus lados y se detiene.

Reflexión final

De los datos que hemos recogido sacamos como conclusión que, en contra de lo que se podría pensar, los sujetos con talento cometen una gran variedad de errores, que en cierta medida son sistemáticos, cuando resuelven problemas aritméticos de estructura multiplicativa. Si bien la frecuencia de errores que cometen los sujetos con talento es menor que la de un grupo de sujetos no catalogados como tales, no por ello deja de ser importante y representa una oportunidad para corregirlos y tratar de profundizar con este tipo de estudiantes en el conocimiento de la estructura multiplicativa.

Los errores pueden ser un punto de partida sobre los que apoyar nuestra actuación didáctica, no sólo para corregir los errores y completar una formación errónea, sino también para extender el conocimiento que tienen los estudiantes sobre aritmética e ir más allá de lo que lo hace el colectivo de estudiantes de su edad.

Cuando se analizan las producciones de los sujetos con talento hay que ser cautos a la hora de catalogar una respuesta como errónea. Los sujetos con talento son especialmente creativos a la hora de resolver problemas y suelen utilizar estrategias de solución poco usuales, que nos pueden hacer pensar en un principio que hay un error en la solución.

Bibliografía

- Assouline, S. G. & Lupkowski-Shoplik, A. (2005). *Developing math talent: A guide for educating gifted and advanced learners in math*. Waco, TX: Prufrock Press.
- Bell, A., Greer, B., Grimison, L., & Mangan, C. (1989). Children's performance on multiplicative word problems. Elements of a descriptive theory*. Journal for Research in Mathematics Education, 20*(5), 434-449.
- Benavides, M. (2008). *Caracterizacion de sujetos con talento en resolucion de problemas de estructura multiplicativa*. Tesis doctoral. Granada: Universidad de Granada.
- Blanco, R., Ríos, C. G. y Benavides, M. (2004). Respuesta educativa para los niños con talento. En M. Benavides, A. Maz, E. Castro y R. Blanco (Eds.), *La Educación de niños con talento en Iberoamérica* (pp. 49-60). Santiago: Oreal-Unesco.
- Castro, E. (1995). *Niveles de comprensión en problemas verbales de comparación multiplicativa.* Tesis doctoral. Granada: Comares.
- Castro, E., Benavides, M. y Segovia, I. (2006). Cuestionario para caracterizar a niños con talento en resolución de problemas de estructura multiplicativa. *FAISCA. Revista de Altas Capacidades, 11* (13), 4-22.
- Castro, E., Maz, A., Benavides, M. y Segovia. I. (2006). Talento matemático: diagnóstico e intervención. En M. D. Valadez, M. A. Zavala y J. Betancourt (Eds.), *Alumnos Superdotados y Talentosos. Identificación, Evaluación e Intervención. Una Perspectiva para Docentes.* (pp. 453-473). México, D.F.: Editorial El Manual Moderno.
- Castro, E., Rico, E. y Castro, E. (1992). Choice of structure and interpretation of relation in multiplicative compare problems. En W. Geeslin y K. Grahan, *Proceedings of the sixteenth PME Conference*. Vol. 1, (pp. 113-120). Durham, NH (USA): University of New Hampshire.
- Freeman, J. (1988). *Los niños superdotados. Aspectos psicológicos y pedagógicos*. Bilbao: Santillana.
- Greer, B. (1992). Multiplication and division as models of situations. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: Macmillan.
- Gutiérrez, M. P. y Maz, A. (2004). Educación y diversidad. En M. Benavides, A. Maz., E. Castro y R. Blanco (Eds.), *La educación de niños con talento en Iberoamérica* (pp. 15-24). Santiago (Chile): OREALC/UNESCO.
- Johnson, M. L. (1983). Identifying and teaching mathematically gifted elementary school students. *Arithmetic Teacher, 30*(5), 25-26, 55-56.
- Lappan, G. (Sin fecha). 'Mathematics for all' must include high-ability and highly motivated students**.** Disponible en: http://www.nctm.org/about/content.aspx?id=1010. (06/08/2007)
- Machado, A. L. (2004). Presentación. En M. Benavides, A. Maz, E. Castro y R. Blanco (Eds.) (2004). *La educación de niños con talento en Iberoamérica* (pp. 9-13). Santiago (Chile): OREALC/UNESCO.
- Mayer, R. (1986). *Pensamiento, resolución de problemas y cognición*. Barcelona: Paidós.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (1980). *An Agenda for Action: Recommendations for School Mathematics of the 1980s*. Reston, VA: El autor.

- NCTM (1989). Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics. Reston, VA: El autor.
- NCTM (1991). Professional Standards. Reston, VA: El autor.
- NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: El autor.
- Nesher, P. (1988). Multiplicative School Word Problems: Theoretical Approaches and Empirical Findings. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp.19-41). Reston, VA: NCTM; Hislldale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Rico, L. (1993). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. En J. Kilpatrick, P. Gómez y L. Rico. (Comps), Educación Matemática (pp. 60-108). México: Grupo Editorial Iberoamericano.
- Ruiz, L. y Márquez, M. (2006). Estrategias de identificación e intervención para niños potencialmente sobresalientes. En M. D. Valadez, M. A. Zavala y J. Betancourt (Eds.), *Alumnos Superdotados y Talentosos. Identificación, Evaluación e Intervención. Una Perspectiva para Docentes* (pp. 213-245). México, DF: Editorial El Manual Moderno.
- Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. En L. Rico (Coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 125-154). Barcelona: Horsori.
- Van de Walle, J. A. (2001). *Elementary and middle school mathematics. Teaching developmentally*. New York: Addison Wesley Longman.
- Vergnaud, G. (1983). Multiplicative Structure. En Lesh, R. y Landau, M. (Eds.). *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*. Florida: Academic Press.
- Vergnaud, G. (1988). Multiplicative Sructures. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp.141-161). Reston, VA: NCTM; Hislldale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10 (23), 133-170.

Enrique Castro Martínez, Universidad de Granada, España.
Email: ecastro@ugr.es

Maryorie Benavides Simon, Universidad de Granada, España.

Isidoro Segovia Alex, Universidad de Granada, España.