UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2008, Número 15, páginas 61 - 87
ISSN: 1815-0640

Génesis histórica y enseñanza de las matemáticas

Juan Antonio García Cruz

Resumen

La Historia de las Matemáticas ofrece múltiples ejemplos que pueden utilizarse, en el aula, mediante una metodología muy próxima a la resolución de problemas y al mismo tiempo servir de ejemplificación de cómo las matemáticas organizan los fenómenos cotidianos. Mostramos aquí dos ejemplos tomados de la historia del cálculo de probabilidades y la estadística matemática. El primero es el conocido problema del reparto de la apuesta en la versión de Huygens para la conceptualización de la esperanza matemática. El segundo es el test de hipótesis de Fisher. Ambos se presentan mediante un enfoque en el que los problemas sirven para introducir y desarrollar, no aplicar, los conceptos subyacentes.

Abstract

History of Mathematics gives us multiple situations that can be used as a setting to develop a problem solving approach and at the same time serve as an exemplification of how mathematics can organize everyday phenomena. In this paper we outline this approach using two episodes of the history of probability and statistic. The first is the know Huygens' solution to the problem "division of stake" which is a first step toward the conceptualization of mathematics expectation. The second is the Fisher's test. Both are used to introduce and develop, not to apply, the under laying concepts.

Introducción

En el capítulo segundo de *Didactical Fenomenology of Mathematical Structures*, Freudenthal (1983) expone su *método*. Antes ha utilizado la longitud como medio paradigmático para ilustrar su *fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas*. En el proceso de construcción del conocimiento matemático Freudenthal distingue entre *phainomenon* y *nooumena*. *Phainomenon* es el fenómeno que queremos comprender y estructurar, mientras que *nooumena* corresponde a las entidades de pensamiento con las que organizamos tal fenómeno. *Nooumenon* procede de *noos* o *nous* forma arcaica, cuyo significado es mente, inteligencia, pensamiento, memoria, razón, intelecto, incluso, alma, intención y deseo. De ahí el sustantivo *to nooumenon*, lo que solo es capaz de concebirse con la mente, la idea. Mientras que *phainomenon* procede de *phainomai*, verbo antiguo que significa aparecer, mostrarse, manifestarse, hacerse visible, de ahí *to phainomeno*, lo comprensible o inteligible solo a través de la experiencia.

Para Freudenthal los *objetos* matemáticos son *nooumena*, y una parte de la matemática puede *experimentarse* como un *phainomenon*. Por ejemplo, los números son *nooumena* y trabajar con números puede ser un *phainomenon*. De esta forma los conceptos, estructuras e ideas matemáticas, es decir los *nooumena*, sirven para organizar los fenómenos, entendidos como experiencias personales, tanto del mundo real como de la misma matemática. Por otro lado, los fenómenos no son algo ajeno a nosotros, sino que son la parte esencial de cómo nosotros percibimos la realidad y vamos conformando nuestras experiencias del mundo y de la propia matemática. La fenomenología de Freudenthal surge de la interrelación entre ambos conceptos.

La relación entre los *phainomena* y los *nooumena* puede estudiarse de varias maneras. Sin embargo a nosotros, profesores de matemáticas, nos interesa principalmente la relación que surge del proceso de enseñanza y aprendizaje. La fenomenología de un concepto, estructura o idea matemática significa, en la terminología empleada por Freudenthal (Freudenthal, 1983, p. 28), describir el *nooumenon* en relación con el *phainomena,* del cual es el medio de organización, indicando qué fenómeno se crea para organizar y a cuál puede ser ampliado, cómo actúa sobre tal fenómeno como medio de organización, y con qué poder nos arma a nosotros frente a tal fenómeno. Si en esa relación, lo que se enfatiza es el elemento didáctico, es decir, se presta atención a cómo se adquiere tal relación en el proceso de enseñanza y aprendizaje, entonces se habla de la *fenomenología didáctica* de tal *nooumenon*.

A partir de esta exposición Freudenthal elabora el principio didáctico que sustenta su concepción del proceso de enseñanza: se debe comenzar por los fenómenos que se quiere organizar y enseñar al estudiante a manejar los medios de organización.

Para este enfoque, Freudenthal, conscientemente evita el término *adquisición* del concepto. Por el contrario habla de la *constitución* de objetos mentales (*nooumenon*) que precede en su teoría a la adquisición de conceptos. Frente a la adquisición de los conceptos por medio de la materialización concreta, Freudenthal antepone la constitución de objetos mentales basados en la fenomenología. Para enseñar grupos, en vez de comenzar por el concepto de grupo y buscar alrededor un material concreto para tal concepto, uno debería en primer lugar buscar un fenómeno que empuje al estudiante a constituir el objeto mental que luego será matematizado por el concepto de grupo. En la fenomenología de Freudenthal los *nooumena* son primariamente objetos mentales y sólo de forma secundaria son conceptos. Por lo tanto, la manipulación de objetos mentales precede a la explicitación de los conceptos. Para cada caso particular, uno debería establecer los criterios que se deben cumplir para que se pueda considerar constituido el objeto mental.

Freudenthal aboga por una actividad matemática o por una matemática activa como base de la enseñanza. Tal forma de entender la matemática posee una característica fundamental denominada **matematización**, y que consiste en o*rganizar y estructurar la información que aparece en un problema, identificar los aspectos matemáticos y descubrir regularidades, relaciones y estructuras.*

La experimentación de los fenómenos por los alumnos permite la aparición de soluciones y concepciones particulares. La labor del profesor, en coherencia con el principio, debe ser avanzar desde esas soluciones y concepciones particulares hacia las más elaboradas de la matemática. Surge así, la disquisición de A. Treffers (1987) sobre la matemática horizontal y vertical. En el proceso de matematización, dominio del fenómeno mediante herramientas matemáticas, se establece una dicotomía entre los procesos de matemática horizontal y vertical. La matemática horizontal nos lleva desde el mundo real al mundo de los símbolos y posibilita el tratamiento matemático de los problemas. Este tipo de actividad tiene su principal característica en la utilización de los procesos de tipo general siguientes:

- IDENTIFICAR las matemáticas en contextos generales

- ESQUEMATIZAR

- FORMULAR y VISUALIZAR un problema de varias maneras

- DESCUBRIR relaciones y regularidades

- RECONOCER aspectos isomorfos en diferentes problemas

- TRANSFERIR un problema real a uno matemático

- TRANSFERIR un problema real a un modelo matemático conocido.

Una vez que el problema ha sido formulado en términos matemáticos la actividad se vuelve específicamente matemática. Este tipo de matematización ha sido denominada **matematizacion vertical**. Tal actividad se caracteriza por el uso y potenciación de los siguientes procesos generales:

- REPRESENTAR una relación mediante una fórmula

- UTILIZAR diferentes modelos

- REFINAR y AJUSTAR modelos

- COMBINAR e INTEGRAR modelos

- PROBAR regularidades

- FORMULAR un concepto matemático nuevo

- GENERALIZAR

Quizás sea ahora el momento de preguntarnos:

¿Qué papel juega la historia aquí?

Como bien señala Barbin (1996) el estudio de la historia de la matemática por los profesores cambiará de forma profunda el estatus epistemológico del conocimiento matemático y transformará la práctica de la enseñanza. La historia de la matemática muestra, y un ejemplo será los episodios que conforma esta exposición, que los conceptos matemáticos se construyen, se modifican, se amplían en orden a resolver problemas. De esta forma se puede decir que todo conocimiento matemático es la respuesta a una cuestión, es la solución a un problema.

La historia de la matemática y, de forma especial, la historia del cálculo de probabilidades y de la inferencia estadística proporciona suficientes elementos para reconsiderar la enseñanza de dichos temas en la educación secundaria y universitaria. Mostraré tres episodios de la historia que ilustran cómo la matemática sirvió para organizar el fenómeno del azar a través de la resolución de ciertos problemas. A partir de estos episodios reflexionaré sobre la enseñanza y configuraré la propuesta metodológica.

Primer Episodio: ¿Cómo repartir la apuesta en un juego inacabado?

A comienzos de la segunda mitad del siglo XVII ocurren dos hechos históricos que van a significar un hito en el nacimiento y desarrollo de la teoría matemática de las probabilidades. El primero lo constituye la correspondencia entre Pascal y Fermat sobre el problema propuesto a Pascal por el caballero de Meré, y conocido con el nombre del problema del reparto de la apuesta. El problema se puede formular de la siguiente forma: *Dos jugadores participan en un juego. Al comienzo cada uno coloca una misma cantidad de monedas como apuesta. El ganador será el primero que consiga S puntos. Sin embargo, el juego se interrumpe cuando uno de los jugadores ha ganado* α *puntos (*$\alpha < S$*) y el otro* β *puntos (*$\beta < S$*). La cuestión es cómo dividir la apuesta inicial*.

El segundo hecho es la publicación por C. Huygens de un tratado sobre los cálculos en los juegos de azar: *De ratiociniis in ludo aleae.*

Tanto la correspondencia como el tratado se refieren a la solución del problema del reparto de la apuesta y, como a continuación expondré, son de gran interés para el tema que estamos tratando.

El primer personaje histórico que aborda el problema del reparto de la apuesta es Fra Luca Pacioli (ca1445-ca1514). En su obra *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalità* (Venecia 1494) presenta la siguiente versión del problema:

Un grupo juega a la pelota de modo tal que se necesita un total de 60 puntos para ganar el juego. La apuesta es de 22 ducados. Por algún incidente no pueden terminar el juego y un bando queda con 50 puntos y el otro con 30. Se quiere saber qué participación del premio le corresponde a cada bando.

En el supuesto de que se ganen 10 puntos en cada lance, Pacioli afirma que el juego lo más que puede durar es 11 lances. Como se han jugado 8, habrá que dividir la apuesta proporcional a lo que cada grupo ha ganado en el momento de la interrupción. Luego $\frac{8}{11}$ equivale a 22 ducados, y por lo tanto se tiene que al bando que va ganando le corresponderá $\frac{5}{11}$ de 22 ducados ($13\frac{3}{4}$ ducados) y al bando que va perdiendo le corresponderá $\frac{3}{11}$ de 22 ducados ($8\frac{1}{4}$ ducados)[1].

Posteriormente Niccolo Tartaglia (ca1499-1557) aborda el problema en su obra *Trattato generale di numeri et misure* (Venecia 1556). Tartaglia reproduce la solución dada por Paccioli y lanza la siguiente objeción: *Supongamos que en un juego, un bando ha ganado 10 puntos y el otro bando 0 puntos. En esta situación el bando que tiene 10 puntos debería recibir toda la apuesta, lo cual no tiene sentido.* Frente al argumento de Pacioli, puntos ganados por cada jugador, el argumento de Tartaglia se basa en la ventaja de un jugador respecto del otro en el momento en que debe interrumpirse el juego. En la versión del problema dada por Pacioli, la solución de Tartaglia es como sigue: *50-30=20;* $\frac{20}{60}=\frac{1}{3};\frac{22}{3}=7\frac{1}{3}$*, luego el jugador A recibe* $22+7\frac{1}{3}=29\frac{1}{3}$ *y el jugador B recibe* $22-7\frac{1}{3}=14\frac{2}{3}$*.*

En ambos casos, Pacioli y Tartaglia han enfocado el problema hacia lo que ha ocurrido. Un cambio en el enfoque y un método de solución correcto es la contribución de Pascal y Fermat por un lado y Christiaan Huygens por el otro. Sin embargo, G. Cardano (1501-1576) ya había avanzado el enfoque correcto consistente en mirar hacia lo que podría ocurrir en la eventualidad de que el juego continuara, en su obra *Practica arithmeticae generalis* (1539) pero sin proporcionar un método de solución correcto.

El miércoles 29 de julio de 1654, Pascal escribe una carta a Pierre de Fermat en la que entre otras cosas le dice:

"Para conocer el valor del reparto, cuando participan dos jugadores en tres tiradas y pone cada uno 32 monedas en la apuesta:

Supongamos que el primero de ambos tiene 2 puntos y el otro 1 punto. Si, ahora, vuelven a lanzar el dado las posibilidades son tales que si el primero gana, ganará el total de monedas en la apuesta, es decir, 64. Pero si es el otro el que gana, estarán 2 a 2 y en consecuencia, si desean acabar o se interrumpe el juego, sigue que cada uno tomará su apuesta, es decir, 32 monedas.

Por lo tanto Señor, se ha de considerar que, si el primero gana, 64 monedas le pertenecerán y si pierde, entonces sólo le pertenecerán 32 monedas. Si no desearan

[1] La forma de presentar los cálculos es confusa, de hecho corresponden a un reparto proporcional en el que al jugador que va ganando le asignan cinco partes de ocho y tres al que va perdiendo.

jugar este punto, y desearan separarse, el primero podría argumentar "Tengo seguras 32 monedas, pues incluso si pierdo las recibiré. Las 32 restantes, quizás las gane o quizás no, el riesgo es el mismo. Por lo tanto, dividamos esas 32 restantes por la mitad, y dadme además las 32 que tengo seguras".

El primero tendrá 48 monedas y el segundo tendrá 16.

Supongamos ahora que el primer jugador tiene 2 puntos y el segundo ninguno. Las posibilidades son tales que si el primero gana, recibirá toda la apuesta, 64 monedas. Si es el otro el que gana, entonces volvemos al caso anterior en el que el primero tiene 2 puntos y el segundo uno. Sabemos que en este caso al primero le corresponden 48 monedas. Por lo tanto, si desearan seguir jugando, el primero podría argumentar que si gana, le corresponderían 64 monedas y si perdiera le corresponderían 48. En cualquier caso, tendría 48 seguras, luego dividamos las 16 restantes por la mitad pues tiene las mismas posibilidades de ganar que de perder. Luego al primero le corresponden 56 monedas y 8 al segundo.

Supongamos, por último, que el primer jugador tiene un punto y el otro ninguno. Si volvieran a jugar y ganara el primero tendría entonces dos puntos y, estaríamos en el caso anterior en el que le corresponden 56 monedas. Si por el contrario, perdiera entonces le corresponderían 32 monedas. Luego podría argumentar que si no continuaran el juego, le corresponderían 32 monedas en cualquier caso. Las que restan de 52 deben dividirse por la mitad. De 52 restamos 32 y obtenemos 24. 24 dividido por la mitad hace 12. Tomando las 12 con las 32 hacen un total de 44 monedas para el primer jugador.

Pascal expone mediante un ejemplo concreto su método empezando con el tanteo particular 2:1 y continuando con los otros dos posibles tanteos parciales, 2:0 y 1:0, en caso de que se pacte a tres el juego. Para el caso 2:0 el argumento es, resumido, como sigue. Supongamos que gana el primer jugador. Entonces le corresponderá el total de la apuesta, es decir 64 monedas. Si pierde, entonces estarán 2:1 y le corresponderán, según lo visto, 48 monedas. En cualquier caso le corresponderán 48, y de las 64-48= 16 restantes, le corresponderán la mitad, es decir, 8. Por tanto, en este caso al jugador que va ganando le corresponde un total de 48+8=56 monedas. Por último, sea 1:0 el tanteo parcial. Si ahora gana el primero estarán 2:0 y, por lo visto en el caso anterior, le corresponde 56 monedas. Si pierde estarán 1:1 y dividirán por la mitad la apuesta, correspondiendo a cada uno 32 monedas. Por lo tanto, al jugador que va en primer lugar le corresponde 32 que tiene seguras y de las 56-32=24 restantes le corresponde la mitad. Al jugador que lleva ventaja le corresponde, por lo tanto, 32+12=44 monedas en este caso.

A Fermat, el método recursivo de Pascal, le debió parecer poco general y le respondió con otro método en una carta que se ha perdido. Sin embargo, se conserva la respuesta de Pascal en la que critica el método de Fermat, y gracias a la cuál conocemos tal método. El método de Fermat, según se desprende del resto del comentario de Pascal es como sigue. Supongamos que hay dos jugadores. Al primer jugador, le faltan dos lances para ganar y al segundo jugador, le faltan tres lances. Obsérvese el cambio en el enunciado: independientemente del número de lances requeridos y el tanteo particular, lo que importa es el número de lances que le falta a cada jugador para concluir el juego.

Sigamos con la exposición de Pascal del método de Fermat. En primer lugar, hay que determinar *necesariamente* en cuántos lances el juego quedará decidido con toda seguridad. Fermat supone que el juego acabará en cuatro lances. Luego habrá que ver cómo se distribuyen los cuatro lances entre los dos jugadores, cuántas *combinaciones* harán ganar al primero, cuántas al segundo, y dividir la apuesta de acuerdo con tal proporción. Supongamos, pues, que el juego se desarrolla con un dado de dos caras en el que en una cara aparece la letra **a** (gana el primer jugador) y en la otra cara la letra **b** (gana el segundo jugador). ¿Cuántas *combinaciones* posibles hay? La siguiente tabla es la respuesta.

a	a	a	a	a	a	a	a	b	b	b	b	b	b	b	b
a	a	a	a	b	b	b	b	a	a	a	a	b	b	b	b
a	a	b	b	a	a	b	b	a	a	b	b	a	a	b	b
a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b
1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	2	1	2	2	2

Luego todas las combinaciones en las que hay dos **a** significa que gana el primer jugador y todas en las que hay tres **b** gana el segundo jugador. Por lo tanto, la apuesta debe dividirse como 11 es a 5. Pascal expresa en la carta las dificultades que tiene de comprender tal razonamiento que involucra *combinaciones*, y hace una objeción seria al método de Fermat *pues no es necesario, cuando al primero le faltan dos lances para ganar, tener que jugar cuatro lances, pues podrían ser dos o tres o quizás cuatro.*

Ambos métodos (Fermat más tarde refinó el suyo), son correctos pero ninguno puede ser considerado como un método general (Maistrov, 1974, p. 45). El primer método general, que conlleva además la formulación de un nuevo concepto, es debido a Christiaan Huygens. Veamos la aportación de C. Huygens a la solución del problema.

En 1655 a la edad de 26 años, Christiaan Huygens (1629-1695) realiza su primer viaje a Francia. Durante su estancia en París llegó a conocer, sin duda, el problema y la respuesta de Pascal. El 27 de abril de 1657 envía a su tutor Frank van Schooten un manuscrito titulado *Van Rekinigh in Spelen van Geluck.* En la carta introductoria, Huygens explica a su tutor el contenido del manuscrito. Por tal carta sabemos que, los problemas de los que trata, ya fueron tema de ocupación de grandes matemáticos de Francia y que, por lo tanto, el mérito de la nueva teoría que presenta no se le debe atribuir sólo a él. También cuenta que tales problemas eran propuestos, entre los sabios franceses, sin mostrar los métodos de solución, con el objetivo de ponerse a prueba entre ellos. La carta finaliza en los siguientes términos: *Por lo tanto, he tenido que examinar y profundizar por mi cuenta en esta materia, empezando con lo más básico. Por esta razón, para mí es imposible afirmar que haya partido desde los mismos principios. Finalmente he hallado que mis* *respuestas, en muchos casos, no difieren de las de ellos*. El manuscrito de Huygens, escrito en holandés, es traducido al latín por el propio van Schooten (Todhunter, 1949, p. 22), con el título *De ratiociniis in ludo aleae,* y publicado como un apéndice al libro quinto de su obra *Exercitationvm Mathematicorum*, sirviendo de introducción la carta antes referida.

De ratiociniis in ludo aleae se desarrolla en catorce páginas (521-534) y consta de catorce proposiciones, más un apéndice de cinco problemas propuestos y no resueltos. Veamos la primera proposición.

Proposición I: Si puedo obtener igual de fácil, **a** *o* **b***, entonces mi* ***expectatio*** *es* $\frac{a+b}{2}$*.*

A continuación Huygens pasa a probar su afirmación. La prueba consta de dos partes. En la primera determina el valor de la ***expectatio*** para las condiciones de la afirmación; en la segunda parte verifica la solución al más puro estilo utilizado en la resolución de ecuaciones. Huygens supone que su ***expectatio*** es **x** y que puede llegar a ella mediante un juego equitativo. En el juego participa Huygens y un oponente. Cada uno ha colocado **x** como apuesta y acuerdan que el que gane dará la cantidad **a** al que pierda. Luego hay la misma probabilidad de ganar **a** que de ganar **2x-a**.

Sea **2x-a=b**, se sigue que $x = \frac{a+b}{2}$.

En la segunda parte muestra la comprobación. Como cada jugador ha puesto la misma cantidad, el montante total de la apuesta es **a+b**. Si ahora gana entonces dará a su oponente la cantidad **a**, y él se quedará con la cantidad **b**. Si pierde ganará **a** y su oponente **b**. Y ambos sucesos tienen la misma probabilidad (*ganar igual de fácil,* **a** *o* **b**). Luego está comprobado que $\frac{a+b}{2}$ es la ***expectatio***.

Una vez finalizada la prueba, Huygens pone un ejemplo numérico: *Si puedo obtener de igual suerte 3 que 7, entonces mi expectatio es 5.* Más adelante mostraré cómo utilizar este ejemplo en una clase con alumnos de secundaria.

La segunda proposición se refiere a la ***expectatio*** cuando intervienen tres cantidades que puedo ganar con igual suerte. Su intención es que el lector generalice, a partir de las dos primeras proposiciones, utilizando la inducción empírica.

La tercera proposición es la expresión general del concepto de ***expectatio***, utilizando la noción de media ponderada

Proposición III: Sea p el número cualquiera de casos para a, sea q el número cualquiera de casos para b, tomando todos los casos igualmente posibles (proclivi), mi ***expectatio*** *es* $\frac{pa+qb}{p+q}$.

Proposición IV: Así pues, para que lleguemos primeramente a la cuestión propuesta, sobre cómo hacer la distribución entre diversos jugadores, cuando las suertes de estos son desiguales, es necesario que empecemos por las más fáciles. Supongamos que juego contra mi oponente al primero que gane tres lances, habiendo yo ganado ya dos y mi oponente uno. Deseo saber qué parte de la apuesta me corresponde si decido no jugar los lances restantes.

¡De nuevo encontramos aquí el problema del *reparto de la apuesta* en los mismos términos propuestos por Pascal a Fermat!

Sigamos a Huygens en su exposición: *Para calcular la proporción para cada uno de nosotros, debemos considerar que ocurriría si el juego hubiera continuado. Es cierto, que si yo gano la primera ronda entonces habré acabado el juego y por lo tanto ganaría el monte total de la apuesta, a lo que llamaré* α*. Pero, si es mi oponente el que gana la primera ronda, entonces nuestras posibilidades serán iguales a partir de ese mismo momento, dado que a cada uno nos restará un punto para acabar el juego; por lo tanto cada uno podrá reclamar* $\frac{1}{2}\alpha$*. Evidentemente, tengo las mismas posibilidades de ganar que de perder la primera ronda. Luego, tengo iguales posibilidades de conseguir* α *o* $\frac{1}{2}\alpha$*, de acuerdo con la primera proposición mi proporción es* $\frac{3}{4}\alpha$ *y la de mi oponente* $\frac{1}{4}\alpha$.

Apliquemos la primera proposición de Huygens a la versión del problema presentada por Pascal.

Caso 2:1. Puedo ganar de igual forma 64 que 32, luego mi ***expectatio*** es $\frac{64+32}{2}=48$.

Caso 2:0. Puedo ganar de igual forma 64 que 48, luego mi ***expectatio*** es $\frac{64+48}{2}=56$.

Caso 1:0: Puedo ganar de igual forma 56 que 32, luego mi ***expectatio*** es $\frac{32+56}{2}=44$.

En las tres primeras proposiciones Christiaan Huygens define un nuevo concepto matemático: ***expectatio*****,** y da una expresión para su cálculo. El resto de las proposiciones las dedica a exponer diferentes situaciones y calcular la ***expectatio*** correspondiente. Huygens es el primero que introduce, en la historia de la matemática, la noción de ***esperanza matemática***, la ***expectatio*** es un antecedente de tal concepto[2], a partir de la noción de ***juego equitativo***. En la terminología de Huygens, la ***expectatio*** o ***esperanza matemática*** es tanto lo que espero ganar como el valor de la apuesta para tal ganancia.

Durante casi un siglo, la ***esperanza matemática***, fue un concepto más básico que el concepto de probabilidad (Hacking, 1995, p. 123) y el tratado de Huygens tuvo gran influencia sobre el desarrollo posterior de la nueva teoría. De hecho, el primer capítulo de *Ars Conjectandi* de Jacob Bernoulli es una reproducción comentada de *De ratiociniis in ludo aleae,* que además le sirvió de inspiración en el desarrollo de las fórmulas para el cálculo de probabilidades, en especial, la aplicación de la fórmula de la potencia del binomio al cálculo de probabilidades.

El método de Huygens es, sin duda, mucho más simple y elegante. Pero no es fácil de entender para los alumnos. Por otro lado, la solución aportada por Pascal es engorrosa y difícil de seguir. Por último, la solución aportada por Fermat no es económica y puede además inducir al error.

Después de todo esto, es inevitable la pregunta: ¿se puede sacar algún partido de esta historia?

Veamos. Presente a los alumnos la siguiente formulación del problema:

Dos jugadores participan en un juego. Cada uno coloca sobre la mesa 32 monedas. Acuerdan que el primero que consiga 3 puntos gana el total de la apuesta. Por algún motivo el juego debe interrumpirse cuando un jugador lleva ganados 2 puntos y el otro 1 punto. ¿Cómo debe repartirse la apuesta inicial? Justificar el reparto.

Como ve, es la formulación del problema hecha por Pascal y Huygens. Pienso que tal formulación es la más sencilla de las posibles sin llegar a ser trivial (partir de un empate).

Espere un tiempo prudencial y observará la cantidad de preguntas que surgen de los alumnos sobre aclaraciones del juego. En primer lugar, en ningún sitio se ha dicho que el juego sea al azar. Como queremos que tal situación sirva de punto de partida, podemos aclarar este término. Por ejemplo, los jugadores utilizan un artefacto aleatorio en cada lance del juego. Además garantizamos la equidad en los lances. Estas son dos ideas importantes en la conceptualización del azar. Luego vendrán las soluciones.

Por lo general los alumnos presentan la de Pacioli, es decir, el reparto proporcional a los puntos ganados. De forma similar a Pacioli y Tartaglia, los alumnos se centran en lo ocurrido, en la certeza del juego. Este es un obstáculo difícil de superar. Solo la argumentación y la toma de posición en el juego pueden hacer que se acepte otra forma de solución. Para tal fin, se debe conseguir que los alumnos se pongan en la situación del jugador que lleva 1 punto, de esa forma aceptarán como conveniente el argumento de que eso no es lo acordado al principio

[2] En palabras de Freudenthal estaríamos en la fase de constitución del concepto.

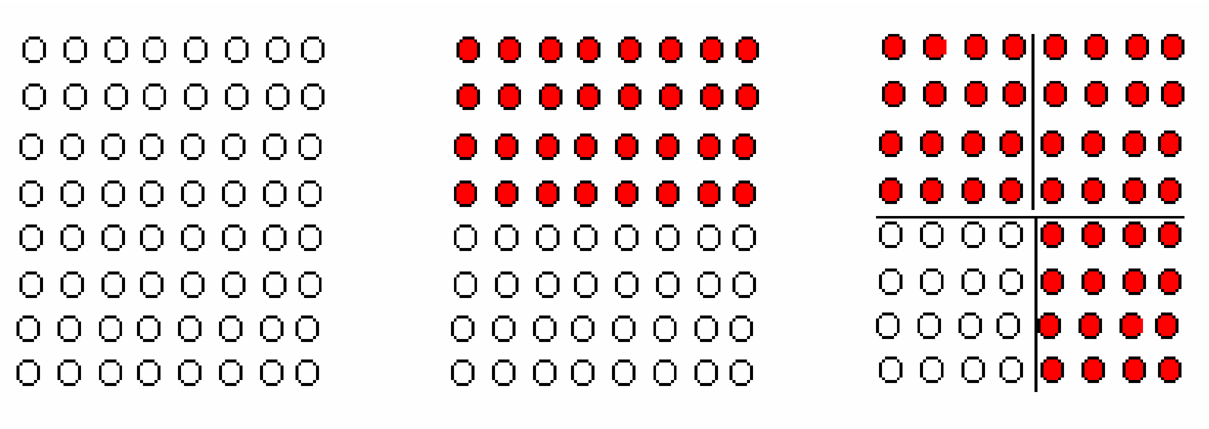
y por lo tanto, no satisface al que va perdiendo. Hay que hacerles ver que si el juego continuara podrían ganar y que tal posibilidad no se tiene en cuenta con la solución de Pacioli. La solución dada por Tartaglia no suele proponerse por los alumnos. Por lo menos a mí nunca se me ha presentado en clase. Es bastante sutil. Pero se puede dar como una forma de solución a discutir en clase. Después de estas discusiones se debe explicitar que ambas soluciones sólo tienen en cuenta lo que ha ocurrido y no lo que podría ocurrir. La certeza frente a lo incierto.

¿Cómo seguir? Lo más probable es que nadie presente una solución como la de Pascal y menos aun como la de Huygens. En caso contrario, es usted un profesor afortunado.

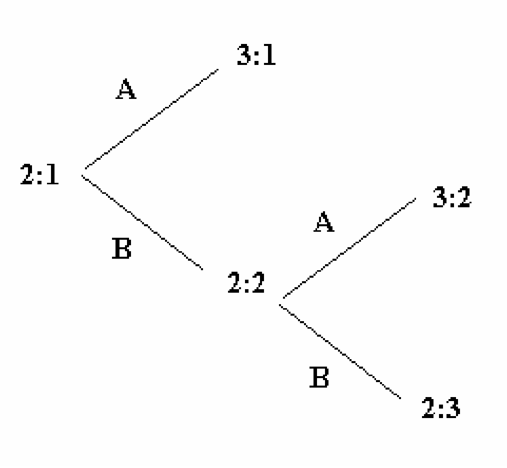
Cuente la historia del problema hasta ese momento. Es una buena oportunidad para que los alumnos se trasladen en el tiempo y vean la importancia matemática que tuvo el problema. Además, les llamará la atención que, la solución dada por ellos, corresponda con un personaje de la antigüedad. Ahora es el momento de que aparezcan en clase Pascal y Fermat.

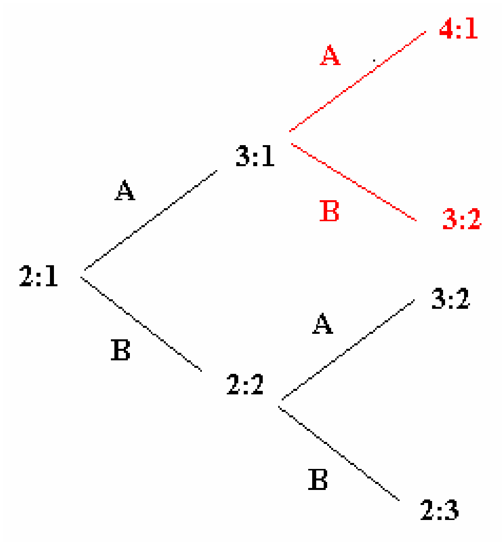
Es el momento de introducir dos herramientas visuales que permiten analizar la situación: el diagrama figurado y el diagrama de árbol.

El siguiente diagrama figurado, reproduce gráficamente el reparto de las 64 monedas, de acuerdo con las diferentes contingencias del juego si este pudiera continuarse. Me fue sugerido por la lectura del texto de Pascal, incluso llegué a pensar que este era el método de solución dado allí.



El diagrama es concluyente, la representación gráfica muestra claramente que de la división de la apuesta inicial en cuatro partes, tres corresponderían al jugador que ha ganado dos juegos y la parte restante al otro jugador. La herramienta visual, geométrica, aporta comprensión, frente a la retórica empleada por Pascal que, aunque suficientemente concisa y explícita, es difícil de seguir.





El método de Fermat sugiere, de alguna manera, el diagrama de árbol. Si utilizáramos el diagrama de árbol para resolver el problema en el que el tanteo parcial está 2:1, tendríamos cuatro posibles formas de acabar el juego, dos favorables al primer jugado(A) y una favorable al segundo jugador (B). Muchos alumnos (y profesores) tienen como primera reacción dividir la apuesta total en tres partes iguales y entregar dos al primer jugador y una al segundo. Pasando por alto que la alternativa 3:1 tiene *mayor valor* que las otras, y estas últimas son *equivalentes*. Para estos alumnos es necesario completar el diagrama con dos resultados que nunca ocurrirían en la realidad y que muestran la *equivalencia* de las cuatro posibles soluciones del juego. Este es en esencia el método de Fermat. Completar la tabla de forma que todas las alternativas fuesen equiprobables pudo ser la idea que indujo a Fermat a presentar una tabla en la que, como hemos visto, hay lances que jamás ocurrirían en la realidad. De este modo, se concluye en que el resultado 3:1 vale el doble que 3:2 o 2:3. Por lo tanto, el reparto debe ser realizado como 3:1 favorable al primer jugador (A).

La combinación de las dos herramientas de representación del problema, el diagrama de árbol y el diagrama figurado, facilitan la comprensión. El diagrama de árbol tiene dos funciones: la primera es facilitar el recuento sistemático de todas las posibilidades (hechos o sucesos) del juego, en segundo lugar hacer operativo el cálculo de la probabilidad de cada evento.

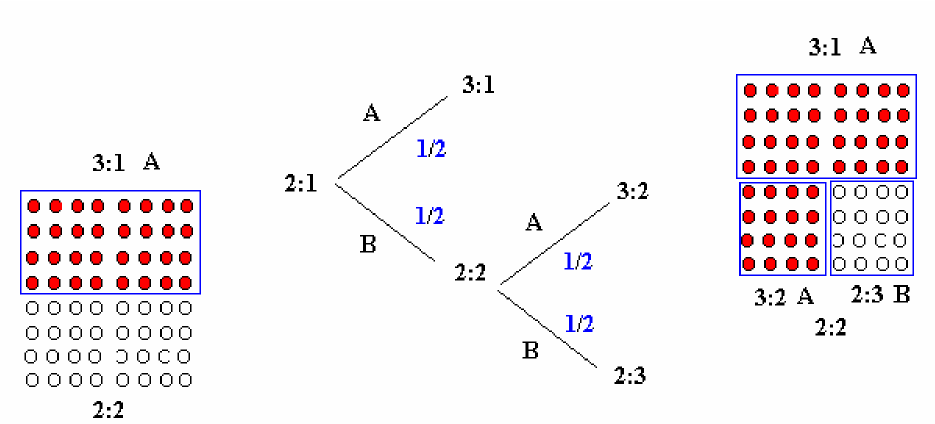
Uno de los errores que suele cometer el alumnado, al utilizar el diagrama de árbol, es sumar las probabilidades que se sitúan en ramas consecutivas.

Si combinamos las dos representaciones (diagrama figurado y diagrama de árbol) podemos introducir el cálculo de las probabilidades de cada evento y de este modo intentar que no se produzca tal error.

A tal fin se debe mantener las dos representaciones a la vista y señalar qué partes de cada representación corresponden entre sí. Se debe comenzar por el diagrama de las monedas y aclarar que el reparto se hará al mismo tiempo que se enumeran las alternativas del juego mediante el diagrama de árbol.

Así, a la alternativa gana A, resultado 3:1, corresponde la mitad de la apuesta total (señalada en el diagrama de monedas). A la alternativa gana B, resultado 2:2, corresponde la parte no recuadrada del diagrama de monedas.

Ahora, el diagrama de árbol continúa a partir de este último resultado, y tendríamos que gana A (3:2), mitad de lo restante (cuarta parte del total) o gana B (2:3), la otra mitad (cuarto restante).



Una vez que se han identificado las partes correspondientes en los dos diagramas, queda por introducir la ley multiplicativa de las probabilidades parciales.

Se mostrará que el resultado $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ corresponde con la probabilidad de la alternativa BA, por ejemplo, dado que su valor es equivalente a la parte correspondiente del diagrama de monedas (3:2 A). De igual forma, se debe señalar la otra alternativa BB que corresponde con la parte del diagrama de monedas (2:3 B). Es conveniente señalar al alumnado que no se deben sumar las probabilidades, pues $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$ y tal valor otorgaría el total de la apuesta, lo que no tiene sentido. Pienso que esta es una forma natural de introducir la ley de multiplicación de probabilidades parciales para obtener la probabilidad total a través de un itinerario posible del juego.

La historia del problema de la división de la apuesta es una historia ejemplar de cómo se produce el tránsito entre un conocimiento consolidado, la aritmética y las operaciones básicas de división, reparto y media aritmética, a una nueva teoría matemática: la probabilidad. Los intentos de solución del problema presentados por Pacioli y Tartaglia se centraron en lo que ha ocurrido, puntos ganados por los contrincantes en Pacioli y ventaja del que va ganando en Tartaglia, es decir en aquello sobre lo que tenemos la más absoluta certeza. Girolamo Cardano fue el primero que aventuró otro camino, el camino de lo incierto, de lo que está por ocurrir, pero no fue capaz de arbitrar un algoritmo para la resolución del problema. La correspondencia entre Pascal y Fermat retoma el problema en el punto en que lo había dejado Cardano y, aunque su método de solución es correcto, no establecen una nueva noción conceptual. Esto último es el mérito de Christiaan Huygens. El interés de Huygens está centrado en los *riesgos* o *suertes* que son los que permiten, de forma fácil, definir las apuestas y pagos en un juego de azar, y que más tarde serán la base del estudio de las pensiones vitalicias y de los seguros de vida. Tal punto de partida lleva a la noción de esperanza matemática. Como señalará más tarde J. Bernoulli en su Ars Conjectandi (1713), el significado de la palabra *expectatio* es diferente del uso común de la misma. La expectativa o esperanza, en el sentido ordinario del término, se refiere al resultado posible más favorable, aunque sabemos que puede también ocurrir lo menos favorable. En el uso empleado por Huygens del término debemos entender ***expectatio***, como la esperanza de conseguir lo mejor, disminuida por el temor de conseguir lo peor. De este modo, nuestra ***expectatio*** se sitúa a medio camino entre lo mejor que podemos esperar y lo peor que podemos temer.

Para experimentar el significado del término, nada mejor que una simulación o la realización de un juego. Tomemos el ejemplo que utiliza Huygens en su tratado y al que aplica la primera proposición. Juguemos en clase a un juego en el que se puede ganar 7 € o 3 € con la misma *facilidad*.

¿Cuál es el valor de la apuesta? Según la proposición uno de Huygens es (7+3)/2=5. ¿Cuál es su significado?

Juguemos un cierto número de veces, por ejemplo cada alumno juega veinte veces (simulemos 200 veces el juego). La siguiente tabla muestra los resultados obtenidos por diez alumnos.

Ganancias (series de 20)	Suma	Promedio
37333333773773333337	84	4,2
73773773733373777333	100	5,0
33337773333773733373	88	4,4
73373737377333737737	100	5,0
33373337373733337337	84	4,2
77337373777333737737	104	5,2
37777373777777337373	112	5,6
37777777777377773777	128	6,4
33777777333777733337	104	5,2
37777373777777733737	116	5,8
		5,1

En primer lugar observamos la variabilidad de las muestras aleatorias obtenidas. La variabilidad es una característica del muestreo aleatorio a la que se accede por experimentación personal al realizar o al observar los resultados de tales muestreos. Si efectuamos el promedio total de ganancia, última casilla de la tercera columna, vemos que corresponde aproximadamente a 5 €. Si jugamos por el placer de jugar, ni ganamos ni perdemos después de un cierto número de jugadas, ese sería el valor de la apuesta que tendríamos que haber realizado en cada jugada para compensar las pérdidas con las ganancias y acabar, prácticamente con la misma cantidad de dinero con la que empezamos a jugar. Eso es lo que ocurriría después de esas 200 jugadas.

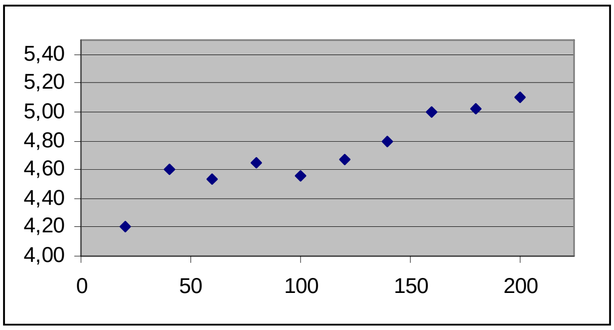
La tabla muestra lo que ha ocurrido en cada uno de los diez juegos individuales a veinte apuestas. En seis casos hemos obtenido una cantidad superior o igual a 100 (apuesta 5, 100 en veinte juegos), habiendo obtenido una cantidad menor en los cuatro casos restantes. Los promedios se dan en la tercera columna. Una primera conclusión es la disparidad en los resultados obtenidos.

Consideremos ahora el juego como una secuencia acumulada de 20, 40, 60... 200 jugadas. Para mejor observar este hecho construyamos una tabla con las frecuencias acumuladas.

jugadas	veces 3	veces 7	Ganancia	promedio	
20	14	6	84	4,20	0,80
40	24	16	184	4,60	0,40
60	37	23	272	4,53	0,47
80	47	33	372	4,65	0,35
100	61	39	456	4,56	0,44
120	70	50	560	4,67	0,33
140	77	63	672	4,80	0,20
160	80	80	800	5,00	0,00
180	89	91	904	5,02	-0,02
200	95	105	1020	5,10	-0,10

La última columna muestra las diferencias del promedio de ganancia con respecto a la ***expectatio*** de Huygens.

Mediante una gráfica:



Se observa una tendencia hacia el valor 5 (¿si?) y una disminución (al mismo tiempo) entre el promedio y la ***expectatio***. Un profesor debe aprovechar la oportunidad que proporciona un ejemplo como este para discutir el significado de la tendencia y cómo se observa.

Esta es una forma de experimentar el fenómeno del azar y que la esperanza de Huygens, y las demás nociones vistas del cálculo de probabilidades, constituyen un medio para su organización.

Segundo Episodio: ¿En qué consiste y qué prueba un experimento estadístico?

Primera parte: Primeras nociones sobre el test de significación. Uso de la Estadística para sustentar creencias sobre las que no se tiene base empírica.

John Arbuthnot nació en 1667 en Inverbervie (Escocia) y murió el 27 de Febrero de 1735 en Londres. En 1692 tradujo al inglés el tratado *De Ratiociniis in ludo aleae* de Christiaan Huygens. En 1696 se graduó como médico por la Universidad de St Andrews. Fue miembro de la Royal Society y del Real Colegio de Médicos. Fue también médico personal de la Reina Ana de Inglaterra. En la actualidad se le considera un escritor satírico, estimado por sus contemporáneos al mismo nivel que Jonathan Swift.

John Arbuthnot ha pasado a la historia de la estadística por haber sido el primero en llevar a cabo un test de inferencia con el que creyó haber probado la existencia de la Divina Providencia. Las Philosophical Transactions de la Royal Society, volumen xxvii, correspondiente a los años 1710, 1711 y 1712 contienen la memoria titulada *An Argument for Divine Providence, taken from the constant Regularity observ'd in the Births of both Sexes*[3] cuyo autor es John Arbuthnot (Todhunter, 1945, p.197).

La memoria comienza así...*entre las innumerables Huellas de la Divina Providencia que se pueden encontrar en la obras de la Naturaleza, hay una sobresaliente entre las demás y es aquella que se puede observar en el equilibrio exacto que se mantiene entre el número de hombres y mujeres; con ello se garantiza que las especies nunca fallen y no perezcan, ya que cada macho tendrá a su hembra, y de una edad proporcionada. Esta igualdad entre machos y hembras no es el efecto del Azar sino de la Divina Providencia, que trabaja para un buen Fin, y es lo que así paso a demostrar.*

Arbuthnot argumenta que la mano conductora del ser divino puede observarse en la razón casi constante de varones y hembras cristianizados en la ciudad de Londres, en el período de 82 años comprendido entre 1629 y 1710. Los datos presentados por Arbuthnot muestran que, durante tal período, el número anual de varones cristianizados fue consistentemente bastante más alto que el número de hembras cristianizadas, aunque nunca mucho más alto. La razón más alta de varones respecto de las hembras (1'156) ocurrió el año 1661, y equivale a una proporción de varones nacidos igual a 0'536; la proporción más baja (1'011) es la correspondiente al año 1703, que equivale a una proporción de varones nacidos

[3] Un argumento en favor de la Divina Providencia, tomado de la constante regularidad observada en los nacimientos de ambos sexos.

igual a 0'503 (Shoesmith, 1987). Tales observaciones llevaron a Arbuthnot a plantearse la siguiente cuestión:

¿Es el azar lo que determina el sexo o, por el contrario, debemos atribuir tal determinación a una intervención de la Divina Providencia?

Analicemos el *argumento*, forma de razonamiento, empleado por Arbuthnot.

En primer lugar supone la Hipótesis de equiprobabilidad para la determinación del sexo en los nacimientos. Sea, por lo tanto, tal probabilidad igual a 0'5. De esta forma el sexo en los nacimientos queda determinado por el lanzamiento de un dado, equilibrado, con dos caras marcadas respectivamente por V(varón) y H (hembra).

A continuación razona sobre lo que cabría esperar según el modelo de azar asumido. La probabilidad de que, al lanzar un número par n de dados de ese tipo, se obtenga un mismo número de V y de H es igual al término central $\binom{n}{n/2}0'5^{n}$ del desarrollo de la potencia enésima del binomio. Arbuthnot observa que tal valor es muy pequeño para valores de n grandes, y concluye que es poco probable observar el mismo número de varones que de hembras en los nacimientos. A continuación y, sin realizar ningún cálculo se fija en los extremos las colas de la distribución, afirmando que la probabilidad de que el número de V superen considerablemente al número de H y viceversa es también muy pequeño sin llegar a ser despreciables. Finalmente, concluye que la probabilidad de que ocurra un *año masculino*, es decir un año en el que las V superen a las H es menor que 0'5. Si asumimos que tal probabilidad vale 0'5, entonces la probabilidad de observar 82 años masculinos consecutivos es 10^{-25}, un número del orden $0'5^{82}$. Es decir, **1** posibilidad entre **483600000000000000000000** (cuatrocientos ochenta y tres mil seiscientos trillones). Sin embargo, tal hecho ha ocurrido como lo demuestra el registro de cristianizados de la ciudad de Londres en los años que van de 1629-1710. Por lo tanto Arbuthnot concluye que la constante regularidad observada en los registros de nacimientos no puede ser debida al azar. Arbuthnot ve en los datos empíricos presentados "*un acto de la voluntad Divina*" (*God will in action!*).

El método de inferencia empleado por Arbuthnot consiste en contrastar una hipótesis (H) por medio de un suceso observado (S), utilizando como valor del contraste la probabilidad condicionada p(S/H). Si el valor de tal probabilidad es pequeño entonces se rechaza la hipótesis H (*likelihood argument*).

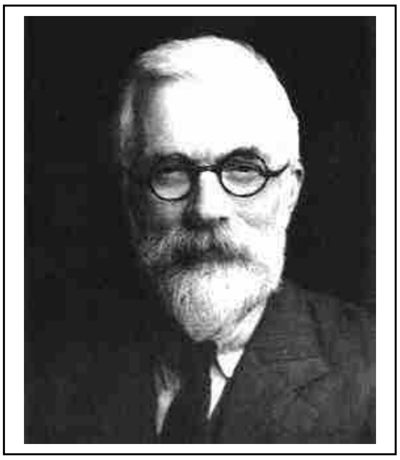
El argumento presenta dos razonamientos, solo uno de los cuales es cierto. Rechazar la equiprobabilidad es una consecuencia inmediata del razonamiento, pero inferir de ahí que la constante regularidad no es debida al azar es falso. Tal regularidad es la que cabría esperar si la proporción de varones a hembras fuera 18:17, como mostró posteriormente Nicolás Bernoulli. No se excluye el fenómeno del azar si el dado equilibrado de dos caras se reemplaza por un dado en el que aparezcan 18 caras con V y 17 con H. Este hecho empírico hace más comprensible la ley de los grandes números de Jacob Bernoulli, al mostrar una estabilidad estadística observable de que un suceso con probabilidad p ocurrirá, con mucha seguridad, en un número de ensayos suficientes, con frecuencia relativa próxima a p.

$$P\left(\left|p-\frac{k}{n}\right|<\varepsilon\right)\rightarrow 1,\quad \text{cuando}\quad n\rightarrow\infty$$

El artículo fue entregado a la Royal Society por William Burnet, hijo de Gilbert Burnet, Obispo de Salisbury. Fue leído en el encuentro de la Royal Society celebrado el 19 de Abril de 1711. Su publicación y difusión por los círculos ilustrados de la época produjo gran controversia. Sin embargo, la importancia del trabajo de Arbuthnot fue que posibilitó el surgimiento de un grupo, dentro de la Royal Society, conocido como los Teólogos, que aprovecharon la estabilidad mostrada por los procesos estocásticos, y demostrada por el primer teorema del límite, como evidencia del designio divino (Hacking, 1995). La regularidad estocástica se utilizó para confirmar ciertas creencias para las cuales no existe evidencia estadística.

Pero más importante aún, el argumento de Arbuthnot fue utilizado por Nicolás Bernoulli como un ejemplo real al que aplicar las primeras leyes de que disponía la teoría emergente de las probabilidades mostrando que, una vez que se descartaba la igualdad inicial de probabilidades en la determinación del sexo, el resultado obtenido en el registro de Londres se derivaba de forma natural del cálculo de probabilidades y que no era necesaria la consideración de una hipótesis divina. Asociar equiprobabilidad con azar, unido a ciertas creencias, se puede convertir en un obstáculo cognitivo en el desarrollo y conceptualización de los conceptos de probabilidad y estadística.

Segunda parte: El test de significación de Fisher. Argumento contra el razonamiento inductivo.



En el desarrollo moderno de la estadística jugó un papel esencial Sir Ronald Aylmer Fisher (1890-1962), al punto de ser considerado uno de sus fundadores. Entre las importantes contribuciones de Fisher cabe destacar el diseño de experimentos y el test de hipótesis.

Según Fisher, el razonamiento inductivo nunca puede confirmar una hipótesis. En todo caso, a lo más que se puede llegar es a rechazar la hipótesis por insostenible a la luz de los datos aportados por los experimentos.

La obra *The World of Mathematics* (Newman, 1956) contiene un artículo de R. A. Fisher paradigmático sobre la prueba de significación de una hipótesis estadística titulado *Las matemáticas de una catadora de té*.

El artículo comienza con la siguiente afirmación, *Una dama afirma que al probar el té con leche puede distinguir qué fue lo primero que se echó en la taza, el té o la leche*.

Fisher considera el problema de plantear un experimento mediante el cuál se llegue a demostrar la afirmación de la catadora de té, y que constituye toda una metodología sobre la prueba de significación de una hipótesis estadística.

La cuestión de partida es ¿Cómo realizar el experimento y por qué?

Experimento

Se preparan 8 tes con leche, cuatro de una forma y cuatro de la otra. Luego se llevan las tazas, escogidas al azar, a la catadora para que indique su opinión. Deberá separar las tazas en dos grupos según su modo de formación.

Interpretación de los resultados posibles

Es necesario que consideremos todos los resultados posibles y qué interpretación corresponde a cada uno de ellos. Al separar las tazas en dos grupos, caben los siguientes resultados:

i) Cuatro aciertos.

ii) Tres aciertos y un fallo.

iii) Dos aciertos y dos fallos.

iv) Un acierto y cuatro fallos.

v) Ningún acierto.

Lo siguiente que se pregunta Fisher es qué probabilidad tiene cada uno de tales resultados. Como hay 70 formas de elegir 4 tazas de un conjunto de 8, entonces la siguiente tabla proporciona la distribución de probabilidades de los resultados posibles del experimento:

Resultado	**Probabilidad**
Cuatro aciertos	1/70
Tres aciertos y un fallo	16/70
Dos aciertos y dos fallos	36/70
Un acierto y tres fallos	16/70
Ningún acierto	1/70

Una persona que no tuviese la habilidad de la catadora de té conseguiría acertar las cuatro tazas con una probabilidad de 1/70, es decir, un poco más de un 1%. La posibilidad de éxito es tan pequeña que habría que atribuir tal resultado al azar.

La tabla anterior proporciona los resultados del experimento bajo la hipótesis de que un sujeto no distingue entre dos objetos (Hipótesis nula). Bajo esa hipótesis se ha construido la tabla de probabilidades de los resultados posibles del experimento, es decir, la hipótesis nula proporciona la distribución de probabilidad para el contraste de la hipótesis.

Una objeción: ¿Por qué ocho tazas y no, por ejemplo, seis tazas con tres de cada tipo? Aclarar esta objeción nos lleva a clarificar la prueba de significación.

Prueba de significación

¿Cuándo consideraremos que el resultado del experimento no es debido al azar y que, por lo tanto, es significativo estadísticamente? Esta cuestión nos conduce a fijar el nivel de significación de la prueba. Fisher fija el nivel base o tipo de significación en 1 sobre 20 (*5%, por corriente y conveniente*).

Si hubiéramos utilizado seis tazas, tres de cada tipo, entonces la probabilidad de dividir correctamente el conjunto de seis tazas es 1/20, es decir el sujeto obtendría un éxito en la prueba, por puro azar, en el 5% de las veces que la realizara. Esta es la razón por la que se descarta el experimento compuesto por seis y se opta por el de ocho tazas.

Al fijar tal nivel, también se descarta el resultado tres aciertos y un fallo, pues su probabilidad es algo superior al 20%.

Luego los posibles resultados del experimento se dividen en dos grupos cuyas interpretaciones son opuestas: los que no muestran una desviación significativa respecto de la hipótesis y aquellos que sí muestran diferencias significativas, regiones de aceptación y rechazo de la hipótesis, respectivamente.

El examen de los resultados posibles del experimento nos proporciona una prueba estadística significativa. Sin embargo, Fisher hace una observación importante: *El hecho de que 1 acontecimiento sobre 70 (cuatro aciertos) sea significativo estadísticamente no basta para demostrar experimentalmente cualquier fenómeno natural. Para afirmar que un fenómeno natural es experimentalmente demostrable se necesita un verdadero método de realización y no sólo una referencia aislada*.

Cuando sometemos una hipótesis a un test, nuestra intención es concluir que la misma es verdadera o falsa. Sin embargo, la lógica nos impide llegar a conclusiones tan categóricas.

Veamos desde el punto de vista lógico el significado de la observación anterior de Fisher.

Sea H la hipótesis “la catadora posee la habilidad que afirma”. Sea S el suceso “dadas 8 tazas, la catadora divide correctamente el conjunto en dos mitades”. Tenemos pues que si H es verdadera también lo es S. Ahora bien, S es verdadera (*ocurre* es el significado de *verdad* para nuestro caso), ¿qué podemos concluir respecto de H

$$\frac{\begin{array}{c}\mathbf{H \to S}\\ \mathbf{S}\end{array}}{\mathbf{H}}$$

Si concluimos que H es verdadera hemos incurrido en lo que se denomina la falacia del consecuente. Sabemos que tal conclusión no es lógicamente válida. El hecho de que ocurra S hace más creíble H, pero no se deduce de ello. Sin embargo, si disponemos del siguiente argumento lógico (*modus tollens*):

$$\frac{\begin{array}{c}\mathbf{H \to S}\\ \neg\mathbf{S}\end{array}}{\neg\mathbf{H}}$$

Es decir, si S es *falsa* (*no ocurre*), entonces también es falsa H. Esta es la base lógica del test de Fisher y su principal argumento contra el razonamiento inductivo. A lo sumo podemos rechazar una hipótesis, nunca confirmarla mediante tal razonamiento. Lo visto suministra la base argumental del siguiente apartado.

La hipótesis nula

Para Fisher la hipótesis nula nunca puede demostrarse y sí refutarse. En este sentido cada experimento existe para darnos la oportunidad de refutar la hipótesis nula.

¿Qué ocurre entonces con la hipótesis contraria? (hipótesis alternativa).

En su argumentación Fisher explícita por primera vez cuál es la hipótesis nula: *El sujeto es incapaz de distinguir dos tipos de objetos*. Obsérvese que es lo contrario de lo que afirma la catadora de té. Entonces, se podría objetar que si un experimento excluye la hipótesis nula debe probar la hipótesis contraria. Contra esta objeción Fisher argumenta que aunque la hipótesis contraria sea razonable no interesa como hipótesis nula por inexacta. Pues si fuera posible asegurar que un individuo nunca se equivoca en sus juicios, deberíamos tener de nuevo una hipótesis exacta y esta se podría refutar por un simple fallo y en cambio nunca podría ser demostrable por una cantidad finita de experiencias. Tal hipótesis nula debe ser exacta porque suministra el estadístico de prueba y su distribución, a partir de la cuál se construye la prueba de significación.

Según esta argumentación, el test de significación de Fisher no es más que una forma de inferencia incierta. Disponemos de los datos suministrados por una muestra y de una hipótesis. La decisión se toma entre dos alternativas: o bien ha ocurrido un resultado extraño y sorprendente (la catadora acierta) o bien la hipótesis no es cierta. Lo que aquí cabe es cuantificar, probabilísticamente hablando, lo extraño y sorprendente del hecho de que la catadora presente una división exacta de las ocho tazas. Esta cuantificación se obtiene al fijar, como hemos visto, el nivel de significación.

Para Fisher la alternativa de rechazar una hipótesis nula no es aceptar la hipótesis alternativa, sino medir el riesgo de equivocarnos. Es decir, controlar la probabilidad de que rechacemos una hipótesis nula cierta, valor que es proporcionado por el nivel de significación o error de tipo I: α =p(rechazar H_0/ H_0 cierta).

El artículo de Fisher muestra las debilidades del razonamiento inductivo y, al mismo tiempo, clarifica el papel que en un test de hipótesis juega la hipótesis nula al suministrar el modelo de azar para el contraste y valorar el riesgo de rechazar la hipótesis nula mediante el nivel de significación.

Reflexionemos sobre los dos episodios expuestos.

En apariencia en el primero, un simple problema de reparto, nos lleva a considerar diferentes formas o procedimientos de solución. Los dos primeros procedimientos, de Luca y Tartaglia, enfocan la solución sobre lo que ha ocurrido, mientras que los restantes procedimientos, enfocan la solución en lo que está por venir. Esto último supone un cambio en el enfoque dado al problema. Un cambio cualitativo que permite una conceptualización nueva: la ***expectatio*** de Christiaan Huygens. La igualdad de soluciones numéricas proporcionadas para un caso concreto, reparto en un juego pactado a 3 lances y en diversas contingencias parciales del mismo, por los tres métodos últimos (Pascal, Fermat y Huygens) es lo único que en apariencia los hace equivalentes, pues es difícil ver la base teórica común que permitiría establecer la equivalencia entre ambos. Esta equivalencia es posible planteando el nuevo concepto de probabilidad. Por el camino recorrido hacia la solución, se proporcionan nuevos métodos de solución dados por Pascal y por Fermat, este último basado en combinaciones, primera aproximación a un conjunto fundamental de sucesos (CFS) para el experimento aleatorio. Vemos así que la génesis de la noción de probabilidad se produce a partir de diferentes métodos o reglas para el cálculo pero sobre todo a partir de los conceptos de ***expectatio*** y de ***juego equitativo***.

En el segundo episodio entramos en una cuestión fundamental: ¿En qué consiste y qué prueba un experimento estadístico?

El test de Arbuthnot muestra como históricamente se confunde azar con equiprobabilidad y como se utiliza una inferencia válida (no equiprobabilidad) para aceptar una hipótesis mediatizada por las creencias religiosas y sobre la cuál no es posible disponer de datos empíricos. Además, la historia muestra un ejemplo válido de razonamiento sobre la ley de Bernoulli que permite superar el obstáculo de equiprobabilidad-azar.

El Test de Fisher muestra algunas ideas básicas que conviene aclarar en el estudio y aplicación de la estadística a situaciones reales. En primer lugar, el papel de la hipótesis nula y la distribución de probabilidad que genera, utilizada como elemento de contraste para los datos empíricos proporcionados por el experimento. En segundo lugar, la alternativa que consiste en establecer una medida apropiada al riesgo que correríamos al rechazar la hipótesis nula en el supuesto de que sea cierta. Esto nos lleva al concepto de nivel de significación, cuyo profundo significado está en la respuesta a la cuestión tantas veces planteada en situaciones de incertidumbre: ¿Cuán raro es este hecho? El nivel de significación permite una cuantificación del mismo y es, no lo olvidemos, una decisión que debe tomar el diseñador del experimento.

En resumen, con la exposición de estos dos episodios he querido, por un lado mostrar cómo las ideas emergentes del cálculo de probabilidades sirvieron históricamente para organizar el fenómeno del azar. Por otro, observar cómo suministran un ejemplo metodológico para presentar el tema en el aula de secundaria (o en la universidad).

Una forma vívida de iniciar el estudio de la inferencia estadística es partir de una situación realista en la que sea fácil involucrar a los alumnos en una controversia. En otro lugar (García Cruz, 2000) he presentado, en forma de diálogo entre varios personajes, un problema cuya discusión permite aflorar concepciones y creencias sobre la probabilidad y, mediante la guía del profesor, desembocar en la construcción de una distribución de probabilidad *ad hoc* que permite tomar una decisión sobre lo extraño de un resultado. El diálogo y la dramatización se ha sugerido como recurso útil para la presentación del nacimiento y desarrollo de los conceptos matemáticos (Hirchcock, 1996).

Durante varios años presenté a mis alumnos de bachillerato el siguiente relato (el lector interesado en una recreación teatral de este problema puede consultar García Cruz, 2000):

El caso de los despedidos de la empresa Westvaco: A finales de los años 80, la empresa Westvaco procedió a una regulación de empleo. Esta se realizó en dos fases. Después de la primera fase de la regulación, las edades de los empleados que permanecieron contratados eran: 25, 33, 35, 38, 40, 55, 55, 55, 56, 64. En la segunda fase, la empresa despidió a tres empleados de edades 55, 55, 64. El comité de empresa argumentó que la empresa cometió discriminación por edad, en los despidos. La empresa afirmó que los tres empleados despedidos habían sido elegidos al azar y no por su edad.

La discusión que proporciona este problema sobre si la muestra ha sido o no elegida al azar, sirve para clarificar el significado de un suceso extraño y para cuantificar su probabilidad. El estudio de la distribución de la media de edad para muestras de tamaño tres, nos lleva a la construcción de la tabla de la función de distribución siguiente ($f(a)=P(\text{media} \leq a)$):

Estadístico		**Probabilidad**	***Estadístico***		**Probabilidad**	***Estadístico***		**Probabilidad**
31,00	*-2,34*	**0,01**	**41,33**	*-0,69*	**0,27**	**48,67**	*0,49*	**0,68**
32,00	*-2,18*	**0,02**	**42,00**	*-0,58*	**0,29**	**49,33**	*0,60*	**0,71**
32,67	*-2,08*	**0,03**	**42,33**	*-0,52*	**0,31**	**49,67**	*0,65*	**0,73**
33,33	*-1,97*	**0,04**	**42,67**	*-0,47*	**0,36**	**50,00**	*0,71*	**0,76**
34,33	*-1,81*	**0,05**	**43,00**	*-0,42*	**0,38**	**50,33**	*0,76*	**0,78**
35,33	*-1,65*	**0,06**	**43,33**	*-0,36*	**0,41**	**50,67**	*0,81*	**0,81**
36,00	*-1,54*	**0,07**	**43,67**	*-0,31*	**0,42**	**51,00**	*0,87*	**0,82**
37,00	*-1,38*	**0,08**	**44,00**	*-0,26*	**0,43**	**51,33**	*0,92*	**0,84**
37,67	*-1,27*	**0,11**	**44,33**	*-0,20*	**0,45**	**51,67**	*0,97*	**0,85**
38,00	*-1,22*	**0,12**	**44,67**	*-0,15*	**0,46**	**52,33**	*1,08*	**0,88**
38,33	*-1,17*	**0,14**	**45,00**	*-0,10*	**0,49**	**52,67**	*1,13*	**0,88**
38,67	*-1,11*	**0,15**	**45,33**	*-0,04*	**0,52**	**53,00**	*1,19*	**0,91**
39,33	*-1,01*	**0,18**	**45,67**	*0,01*	**0,53**	**53,33**	*1,24*	**0,92**
39,67	*-0,95*	**0,18**	**46,33**	*0,12*	**0,54**	**55,00**	*1,51*	**0,93**
40,00	*-0,90*	**0,21**	**47,33**	*0,28*	**0,55**	**55,33**	*1,56*	**0,95**
40,33	*-0,85*	**0,22**	**47,67**	*0,33*	**0,58**	**58,00**	*1,99*	**0,98**
40,67	*-0,79*	**0,23**	**48,00**	*0,39*	**0,63**	**58,33**	*2,04*	**1,00**
41,00	*-0,74*	**0,25**	**48,33**	*0,44*	**0,66**			

Los números en negrita, bajo la etiqueta *estadístico*, corresponden a los valores que puede tomar la media muestral de tamaño tres. La distribución de medias muestrales tiene una media igual a 45,6. Los números en cursiva (bajo la misma etiqueta), llamados valores críticos, corresponden a la distancia (tomando como unidad de medida la desviación típica) entre cada media muestral y el valor promedio 45,6. Por último, los números en negrita bajo la etiqueta probabilidad representan la probabilidad acumulada. Es decir, para 31 (media muestral) tenemos 0,01, que es la probabilidad de extraer una muestra cuya media de edad sea igual que 31; para 32 la probabilidad es también 0,01, pero sumando las dos tenemos 0,02. Así, en la tabla, cada probabilidad corresponde a un valor de la media muestral menor o igual al número correspondiente, en negrita, a la derecha. Elijamos un número más avanzado en la tabla. Por ejemplo, al 40 (valor media muestral) corresponde una probabilidad (acumulada) de 0,21. En otras palabras, la probabilidad de extraer, al azar, una muestra cuya media sea menor o igual que 40 años es 0,21 (o también 21 de 100). Ahora podemos formular una pregunta mucho más precisa: la media de la muestra elegida por la empresa nos parece grande, pero ¿cuán grande es? Es decir, ¿cuál es la probabilidad de que por azar se elija una muestra cuya media sea igual o mayor que la de la muestra elegida por la empresa? La tabla tiene la respuesta. La probabilidad de que la media sea menor estrictamente que 58 años es de 0,95 o del 95%. Luego, obtener por azar una muestra cuya media de edad sea mayor o igual que 58 años es sólo del 5%. Luego debemos esperar que, por azar, tal media ocurrirá una vez de cada veinte que realicemos el experimento. Poco, muy poco como para creer que la empresa haya elegido la muestra por azar. Además, los datos nos dicen que nos equivocaremos una vez de cada veinte si consideramos que la empresa no actuó por azar.

La propuesta metodológica

Simplificando, existen dos formas de mirar al conocimiento matemático, cada una corresponde a un estatus epistemológico diferente y con una concepción diferente también de la enseñanza.

Si consideramos que la matemática es primordialmente un sistema formal acabado con aplicación general, entonces la enseñanza consiste en descomponer el conocimiento matemático formal en procedimientos de aprendizaje que, el estudiante aprende a aplicar más tarde.

Si, por el contrario, concebimos la matemática como un proceso en el que prima la actividad de resolución de problemas, la enseñanza se concibe, en correspondencia, como la actividad de hacer matemáticas, donde resolver problemas cotidianos es parte del trabajo y esencia en la construcción del conocimiento.

Ambas concepciones se diferencian fundamentalmente en cómo se estructura el proceso de enseñanza.

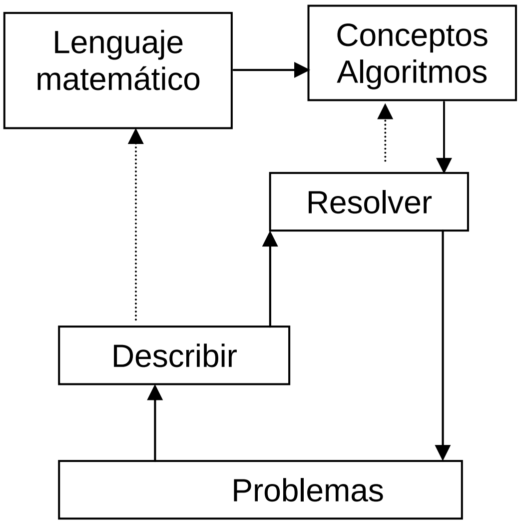
Si contemplamos la matemática como un sistema formal entonces su aplicabilidad está garantizada por el carácter general de sus conceptos y procedimientos. Luego lo primero que hay que hacer es adaptar este conocimiento abstracto para resolver problemas planteados en la realidad.

$$
\boxed{\textbf{Conocimiento matemático formal}}
$$
$$
\uparrow \qquad\qquad \downarrow
$$
$$
\boxed{\textbf{Problemas contextualizados}}
$$

Primero se traduce el problema a términos matemáticos. Luego se resuelve el problema con ayuda de los medios matemáticos disponibles. Finalmente, la solución matemática se traduce al contexto original. En primer lugar se imparte el conocimiento abstracto que luego, si cabe, será utilizado para resolver ciertas situaciones de aplicación.

Por el contrario, si elegimos enseñar matemáticas como una actividad, la resolución de problemas cobra un significado diferente. La enseñanza se centra en los problemas, lo que significa que el problema es el objetivo, en vez de ser simplemente el lugar donde utilizar las herramientas matemáticas.

Resolver un problema en este nivel menos formal difiere grandemente de la aplicación de un procedimiento formal.



Se parte de un problema y se comienza con una descripción del mismo que incluye tanto la forma de entender el problema en sí, como el enfoque que se le dará a su solución. La descripción de los problemas desarrolla un lenguaje informal y pone en juego las concepciones y formas de entender la situación por los alumnos. Al mismo tiempo, el lenguaje informal evoluciona en un lenguaje cada vez más formal debido al proceso de simplificación y formalización guiado por el profesor. A largo plazo, la resolución de un tipo particular de problemas se convierte en una rutina, al condensarse y formalizarse el procedimiento en el curso del tiempo, dando lugar a la constitución de los objetos mentales involucrados que precederían, en el sentido señalado por Freudenthal en su fenomenología didáctica, a los conceptos matemáticos formales.

Como señale anteriormente citando a Barbin, pienso que la historia puede y debe producir un cambio epistemológico en la concepción de la enseñanza de las matemáticas por los profesores. Sin ese cambio, la enseñanza de la Matemática se mantendrá en un ámbito puramente abstracto y alejado del profundo significado que han tenido los conceptos y estructuras matemáticas a lo largo de su historia.

Bibliografía

- Barbin, E. (1996). 'The Role of Problems in the History and Teaching of Mathematics', en R. Calinger (editor), *Vita Matemática. Historical Research and Integration with Teaching.* MAA Notes. No. 40, pp 17-25.
- Calinger, R. (editor) (1996). *Vita Matemática. Historical Research and Integration with Teaching.* MAA Notes. No. 40. The Mathematical Association of America. Washington.
- Fisher, R.A. (1976). 'Las matemáticas de una catadora de té' en James R. Newman (editor) *Sigma. El mundo de las matemáticas*. Tomo 3, pp 194-201. Ediciones Grijalbo. Barcelona.

- Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Mathematics Education Library. D. Reidel Publishing Company.
- García Cruz, J.A. (2000). El caso de los despedidos de la empresa Westvaco. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 23, 121-128.
- García Cruz, J.A. (2002). Inferencia y significación estadística, en E. Palacián y J. Sancho (editores): *Actas de las X Jornadas para el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas.* Actas II, 457-466. Instituto de Ciencias de la Educación de la Universidad de Zaragoza y Sociedad Aragonesa de Profesores de Matemáticas Pedro Sánchez Ciruelo.
- Hacking, I. (1995). *El surgimiento de la probabilidad*. Editorial Gedisa. Barcelona. (Traducción de la obra: *The emergence of probability*, Cambridge University Press. 1975).
- Hitchcock, G. (1996). 'Dramatizing the Birth and Adventures of Mathematical Concepts: Two Dialogues', en R. Calinger (editor), *Vita Matemática. Historical Research and Integration with Teaching.* MAA Notes. No. 40, pp 27-41.
- Hugenius, C. (1657). 'De ratiociniis in ludo aleae', en F. Schooten *Exercitationvm Mathematicorum*. Libri quinque, pp 517-534.
- Maistrov, L.E. (1974). *Probability Theory. A Historical Sketch*. Academic Press. New York.
- Newman, J. R. (1976). *Sigma. El Mundo de las Matemáticas*. 5 volúmenes. Ediciones Grijalbo. Barcelona. (Traducción de la obra: *The World of Mathematics*. Simon and Schuster. New York. 1956).
- Todhunter, I. (1949). *A history of the Mathematical Theory of Probability. From the time of Pascal to that of Laplace.* Chelsea Publishing Company. New York.
- Treffers, A. (1987). *Three Dimensions. A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Education: The Wiskobas Project*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Shoesmith, E. (1987). The continental controversy over Arbuthnot's argument for divine providence. *Historia Mathematica.* **14** (2), pp 133-146.

Juan Antonio García Cruz, es profesor titular de la Universidad de La Laguna, Tenerife, España, y catedrático de Bachillerato en excedencia. Fue director de la revista Números editada por la Sociedad Canaria Isaac Newton de Profesores de Matemáticas de la que fue Vicepresidente. Ha publicado libros y artículos sobre educación matemática y participado en numerosos congresos nacionales e internacionales. Además de la educación matemática se interesa por la historia de las Matemáticas y de la Cartografía.