UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2009, Número 18, páginas 81 – 92
ISSN: 1815-0640

A construção de uma tabela trigonométrica

Vincenzo Bongiovanni

Resumo

Neste artigo pretende-se mostrar, a partir de um problema histórico, as etapas de construção de uma tabela trigonométrica. O texto seguiu em grande parte as idéias de Ptolomeu que foram muito bem sintetizadas por Aaboe no seu excelente livro "Episódios da história antiga da matemática". Para tornar o texto mais próximo da linguagem atual, adotou-se para as demonstrações a notação moderna e alguns resultados do Cálculo Diferencial.

Abstract

This article intends to show, from a historical problem, the steps for the construction of a trigonometric table. The text mostly followed Ptolomy's ideas that were clearly synthesized by Aaboe in his book "the ancient history of mathematics episodes." To make the text closer to the current language, it was adopted into the proofs in modern notation and some results of differencial calculus.

Resumen

En este artículo se pretende mostrar, a partir de un problema histórico, las etapas de construcción de una tabla trigonométrica. El texto siguió en gran parte las ideas de Ptolomeu que fueron muy bien sintetizadas por Aaboe en su excelente libro "Episodios de la historia antigua de la matemática". Para hacer que el texto esté más próximo del lenguaje actual, se adoptó para las demostraciones la notación moderna y algunos resultados del Cálculo Diferencial.

O sistema geocêntrico de Ptolomeu

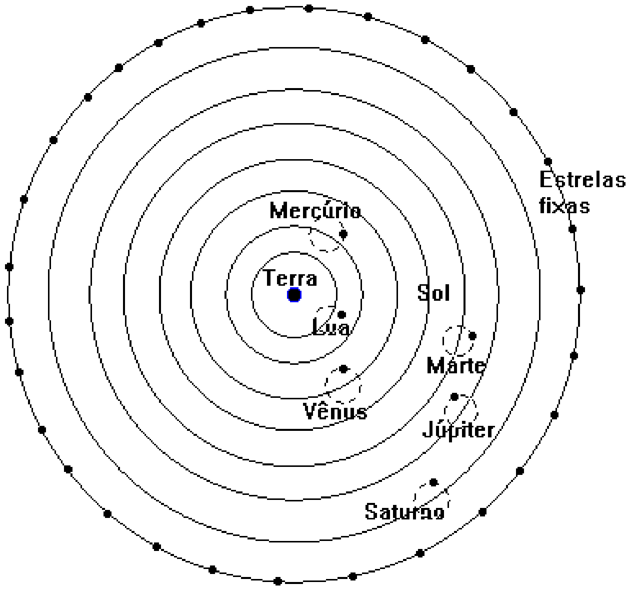
Por volta de 250 a.C, Aristarco de Samos, propôs o revolucionário modelo heliocêntrico para o nosso universo: a Terra gira diariamente em torno do seu eixo e anualmente em torno do Sol. Além de ter suposto o Sol como centro do sistema planetário, ele calculou a distância Terra-Sol em função da distância Terra-Lua.

Por volta de 200 a.C, Eratóstenes calculou de uma maneira engenhosa o raio da Terra a partir da simples observação de que na cidade de Assuan situada no hemisfério Norte a uma latitude de 23^o , no dia 21 de junho, ao meio dia, os raios do Sol incidiam perpendicularmente sobre esta cidade.

Hiparco de Nicéia(180a.C-125a.C), por volta de 150a.C, escreveu um tratado de 12 livros sobre cordas em uma circunferência que não chegou até nós. Construiu uma tabela de cordas que é equivalente a uma tabela de senos. Hiparco fez um cálculo da distância Terra-Lua a partir da simples contagem do tempo de um eclipse lunar. Para fazer este cálculo ele utilizou tabelas trigonométricas talvez de origens babilônicas.

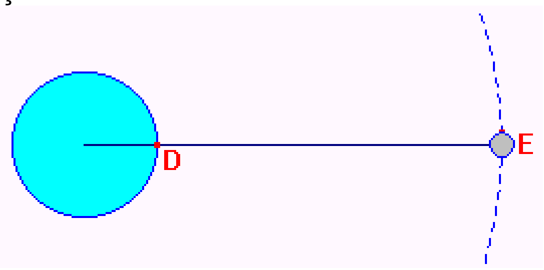
Cláudio Ptolomeu, 150D.C escreveu uma obra chamada o *Almagesto*, cuja finalidade era a astronomia. Durante 14 séculos essa obra permaneceu como a bíblia da astronomia. Eram 13 livros onde ele defendia uma estrutura, com a Terra no centro do universo e todos os astros girando em torno dela, chamada de sistema geocêntrico. Ptolomeu supôs a lua e os planetas em movimento uniforme sobre círculos chamados epiciclos. Por sua vez, o centro de um epiciclo estaria se movendo uniformemente ao longo de um outro círculo maior chamado deferente. No livro I, Ptolomeu constrói uma tabela trigonométrica que seria a ferramenta principal de suas descobertas astronômicas.

O universo de Ptolomeu



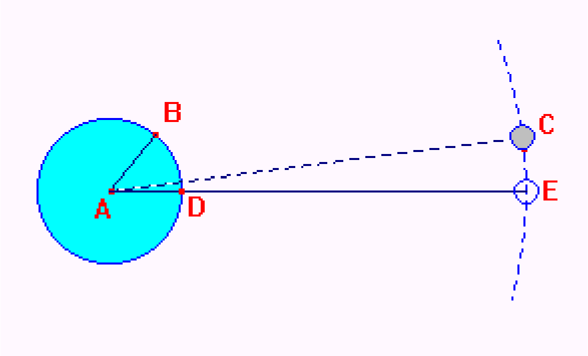
O cálculo da distância Terra-Lua por Ptolomeu

Ptolomeu propôs um método bastante simples par calcular a distância Terra-Lua. Vamos imaginar um observador na posição D da superfície da Terra que observa a Lua na posição E

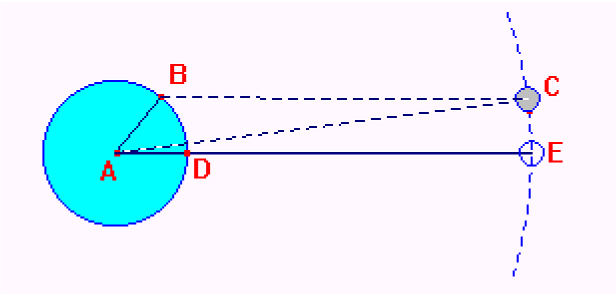


.

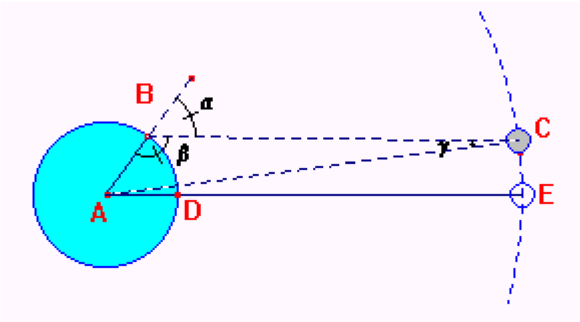
Após um tempo t, o observador estará na posição B e a lua na posição C:



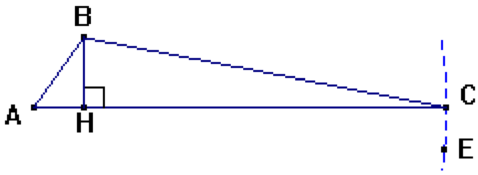
Vamos supor t=4 horas. Nesse caso BAD mede 60^o. Sabe-se que a Lua dá um giro de 360^o ao redor da Terra em 27,3 dias. Portanto após 4 horas o ângulo CAE será 2^o . Donde o ângulo CAB medirá 58º



Por observação direta o ângulo α pode ser obtido. Nesse caso com t = 4horas teremos α = 58,8°. Conseqüentemente β = 121,2° e m(BCA) = 0,8°



Consideremos o triângulo ABC:
O ângulo BAC mede (60^o –2^o) = 58^o. De sen 58^o = BH/6300, obtémse BH desde que sem 58^o fosse conhecido. AB é o raio que era conhecido na época. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo AHB obtémse AH. De sen $0,8^o$ = BH/BC, (supondo sem $0,8^o$ conhecido) obtém-se BC. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo BHC obtém-se CH. Logo a distância Terra-Lua é AH+HC.



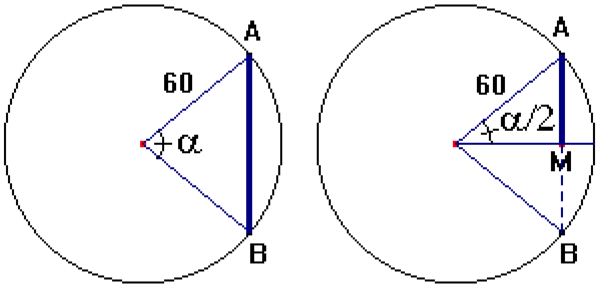
A solução do problema depende apenas de uma **tabela de senos**

A construção de uma tabela trigonométrica por Ptolomeu

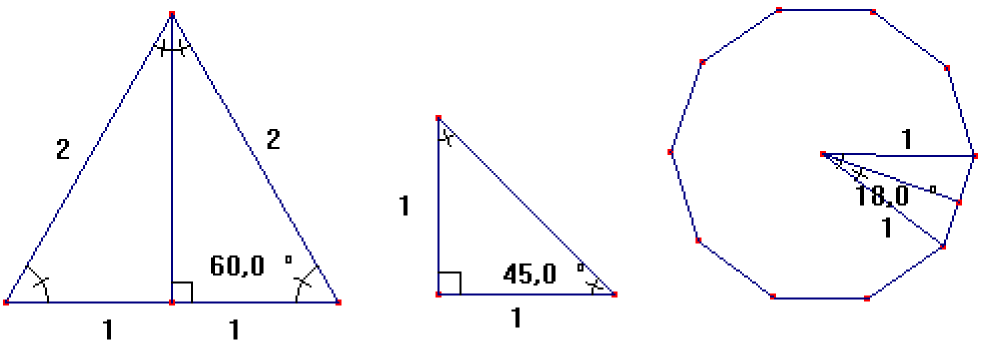
Ptolomeu construiu uma tabela de cordas dos arcos de 1^o até 180^o de meio em meio grau nos capítulos 10 e 11 do seu livro I. Faremos a construção da tabela utilizando o seno no lugar da corda.

A relação entre o **seno** de um ângulo α e a **corda** subentendida por esse ângulo numa circunferência de raio 60 é crd α =120.sen$\frac{\alpha}{2}$. De fato, na figura abaixo temos:

sen$\frac{\alpha}{2} = \frac{AM}{60} = \frac{\frac{AB}{2}}{60} = \frac{AB}{120}$. Portanto AB=corda α =120.sen$\frac{\alpha}{2}$



Seno e co-seno dos ângulos de 30^o, 60^o, 45^o e 18^o



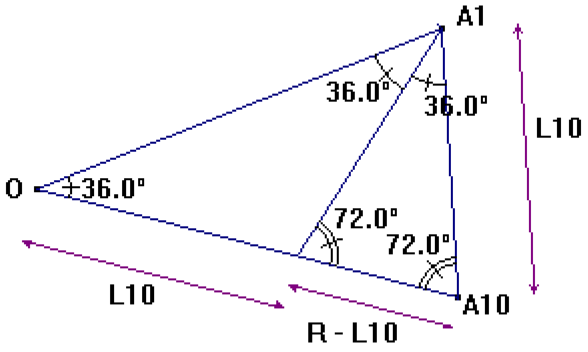
sen 60 ^{o} = cos 30 ^{o} = 0,8660
sen 30 ^{o} = cos 60 ^{o} = 0,5000

sen 45 ^{o} = 0,7071
cos 45 ^{o} = 0,7071

sen18 ^{o} = 0,3090
cos18 ^{o} = 0.9515

Cálculo do sen18° e cos18°

O ângulo central de um decágono regular inscrito numa circunferência de centro O e raio R mede 36°



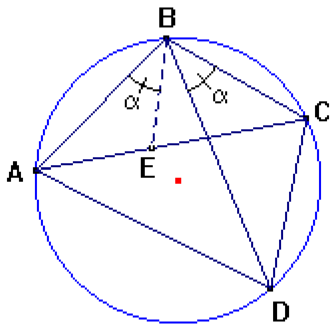
Pelo teorema da bissetriz interna temos: $\frac{R}{L10} = \frac{L10}{R - L10}$

Resolvendo a equação do segundo grau obtém-se $L_{10} = \frac{R\sqrt{5}}{2} - \frac{R}{2}$

Portanto sen18° = $\frac{\frac{L10}{2}}{OA1} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ e sendo M o ponto médio de A_1A_{10}, o teorema de Pitágoras aplicado no triângulo OMA_1 fornece OM. Portanto cos18° = $\frac{OM}{OA1}$

O teorema de Ptolomeu

Ptolomeu demonstra um teorema que será o ponto de partida para a obtenção das fórmulas trigonométricas. O enunciado do teorema de Ptolomeu, em linguagem moderna, é:
"A soma dos produtos das medidas dos lados opostos de um quadrilátero inscritível é igual ao produto das medidas das diagonais. Na época de Ptolomeu não tinha sentido multiplicar dois segmentos. Ptolomeu enunciava o teorema de uma outra maneira: *o retângulo construído sobre AC e BD é igual ao retângulo construído sobre AB e CD mais o retângulo construído sobre BC e AD*".

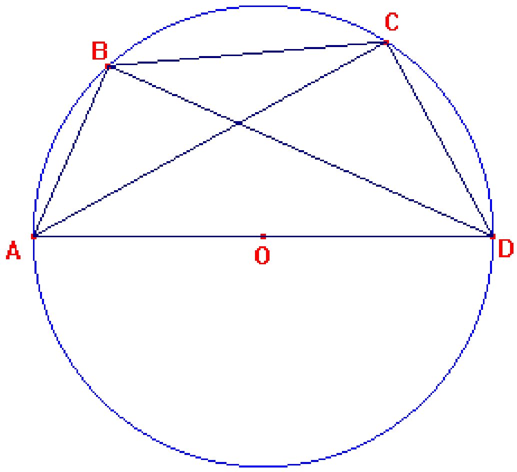


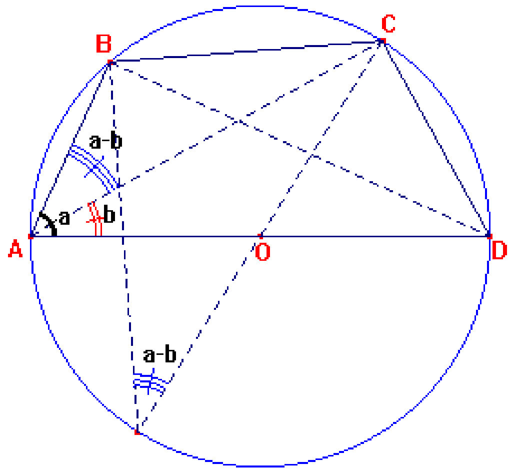
AB.CD+BC.AD=AC.BD

Seja BE um segmento tal que o ângulo ABE seja igual ao ângulo DBC. O triângulo ABE é semelhante ao triângulo BCD. Logo $\frac{AE}{CD}=\frac{AB}{BD}$. Portanto AE.BD=CD.AB (1)

O triângulo BEC é semelhante ao triângulo BAD. Portanto $\frac{EC}{AD}=\frac{BC}{BD}$. Portanto EC.BD=AD.BC (2). Adicionando membro a membro (1) e (2) teremos: AE.BD+EC.BD=CDAB+AD.BC. Donde BD(AE+EC)=CD.AB+AD.BC.
Finalmente a relação de Ptolomeu AC.BD=CD.AB+AD.BC

Aplicando o teorema de Ptolomeu num quadrilátero com um lado sendo o diâmetro da circunferência temos:





AD.BC = AC.BD - AB.CD (1)

Mas sen b=CD/2R (2), cos b=$\frac{AC}{2R}$ (3), sen a=$\frac{BD}{2R}$ (4), cos a= $\frac{AB}{2R}$ (5) e

sen(a-b)= $\frac{BC}{2R}$ (6)

Substituindo (2), (3) (4), (5) e (6) em (1) teremos : sen(a-b)=sena.cos b- sen b.cos a
Um raciocínio análogo nos leva às fórmulas sen(a+b), cos(a-b) e cos(a+b). Essas 4 fórmulas da soma e da diferença costumam ser chamadas de fórmulas de Ptolomeu.

Iniciando a construção da tabela trigonométrica

Sendo conhecidos os senos e co-senos de ângulos de 30^{o}, 60^{o}, 45^{o} e 18^{o} e utilizando a fórmula sen(a-b)=sena.cos b- sen b.cosa obtém-se:

sen12^{o} = sen(30^{o} -18^{o}) = 0,2079

sen15^{o} = sen(45^{o} -30^{o}) = 0,2588

sen 3^{o} = sen(15^{o} -12^{o}) = 0,0523

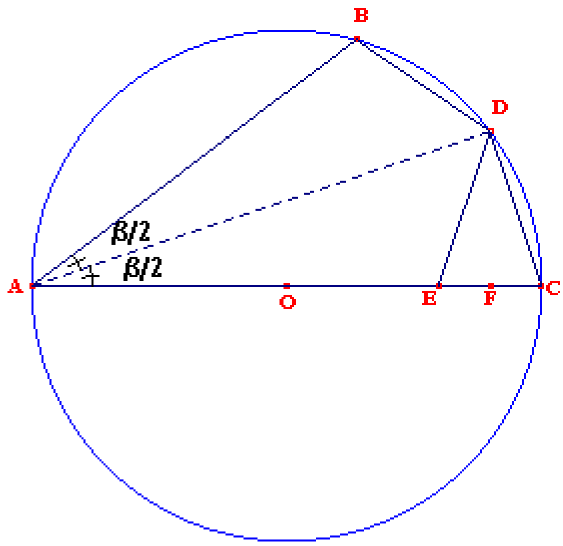
sen 9^{o} = sen(12^{o} -3^{o}) = 0,1564 sen 6º = sen(9º -3º) = 0,1045

sen 3º = sen(6º -3º) = 0.0523

Como prosseguir?

Uma nova idéia: a fórmula do arco metade

Considere um quadrilátero ABDC inscrito numa circunferência de raio R e centro O (figura abaixo) e tendo D como ponto médio do arco BC.



Seja AB = AE. Pelo ponto D traça-se a perpendicular DF a EC. O triângulo ABD será congruente ao triângulo ADE. Logo BD = DE. Conclui-se que DE = DC.

Como AB + 2FC = 2.r então 2.FC = 2.r - AB. Portanto FC = $\frac{2r-AB}{2}$. No triângulo ADC temos: DC² = AC.FC. Portanto DC² = 2.r.(1/2).(2.r - AB) = r.(2.r - AB). Seja ß a medida do arco BC. Teremos: sen$\frac{\beta}{2}$ = $\frac{DC}{2r}$. Portanto DC = 2.r.sen($\frac{\beta}{2}$).

Como cos ß = $\frac{AB}{2r}$ então AB = 2.r.cosβ.

Substituindo AB em DC² = r.(2.r - AB) teremos: (2.r.sen$\frac{\beta}{2}$)² = r.(2.r-2.r.cosß).

Donde se conclui que: sen $\frac{\beta}{2}$ = $\sqrt{\frac{1-\cos\beta}{2}}$.

Utilizando a fórmula do arco metade obtém-se:

sen 1,5º = $\sqrt{\frac{1-\cos 3°}{2}}$ = 0,0261

sen 0,75º = $\sqrt{\frac{1-\cos 1{,}5°}{2}}$ = 0,0130

Como obter sen 1 º ?

Ptolomeu demonstra um teorema que foi usado por Aristarco na sua obra *Sobre os Tamanhos e Distâncias do sol e da lua*: se 0 < b < a < 90 º então $\frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} b} < \frac{a}{b}$

A prova de Ptolomeu é geométrica (ver Aaboe). Faremos uma prova no quadro do cálculo diferencial lembrando que a derivada de sen x (x em graus) é $\frac{\pi}{180}$.cos x e que a derivada de cos x (x em graus) é -$\frac{\pi}{180}$.senx.

Para se 0 < b < a < 90º , a desigualdade $\frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} b} < \frac{a}{b}$ implica na desigualdade $\frac{\operatorname{sen} a}{a} < \frac{\operatorname{sen} b}{b}$. Este resultado sugere estudar a função f(x)=$\frac{\operatorname{sen} x}{x}$. A derivada dessa função é f ´(x) = $\frac{\frac{\pi}{180} x \cos x - \operatorname{sen} x}{x^2}$.

Vamos mostrar que $\frac{\pi}{180}$x.cosx - senx é menor que zero para 0 < x < 90º e concluir que f é estritamente decrescente nesse intervalo.

Seja a função g(x)= $\frac{\pi}{180}$x.cosx-senx.

Logo g´(x)= $\frac{\pi}{180}$.cos x + $\frac{\pi}{180}$.x.(-$\frac{\pi}{180}$).sen x - $\frac{\pi}{180}$.cos x = -$(\frac{\pi}{180})^2$.x.sen x < 0.

Logo g é estritamente decrescente no intervalo 0 < x < 90º. Portanto x > 0 implica que g(x) < g(0). Logo $\frac{\pi}{180}$.x.cos x – sen x < 0.

Concluise que também a função f(x) = $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ é estritamente decrescente no intervalo 0 < x < 90 º.

Portanto, a > b implica que f(a) < f(b). Segue que $\frac{\operatorname{sen} a}{a} < \frac{\operatorname{sen} b}{b}$ e que $\frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} b} < \frac{a}{b}$

Escolhendo a = 1,5 º e b = 1 º temos: $\frac{\operatorname{sen} 1{,}5°}{\operatorname{sen} 1°} < \frac{1{,}5°}{1°}$.

Donde sen 1 º > 0,01745.

Escolhendo a= 1 º e b= 0,75 º temos: $\frac{\operatorname{sen} 1°}{\operatorname{sen} 0{,}75°} < \frac{1°}{0{,}75°}$. Donde sen 1 º < 0,01746

Logo 0,01745 < sen 1 º < 0,01746

Podemos concluir que com uma aproximação de quatro casas decimais temos:

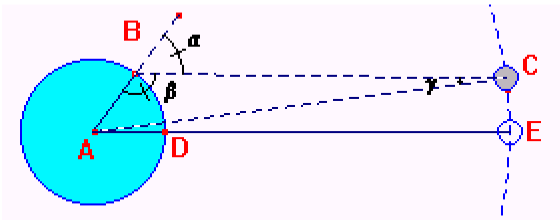
sen 1º = 0,0174

Utilizando-se este valor e a fórmula de sen (a + b) deduzida de forma análoga completa-se a tabela .

sen 2 º = sen (1º +1º) = ...

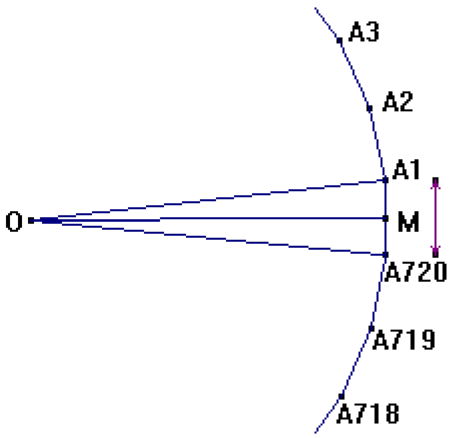
sen 3°= sen (2°+1°) = ...

Este exemplo do cálculo da distância da Terra à Lua ilustra como uma situação real é resolvida pela passagem a um modelo matemático e finalmente uma volta à situação real.



O uso da tabela trigonométrica no cálculo do π

Ptolomeu considera um polígono de 720 lados:

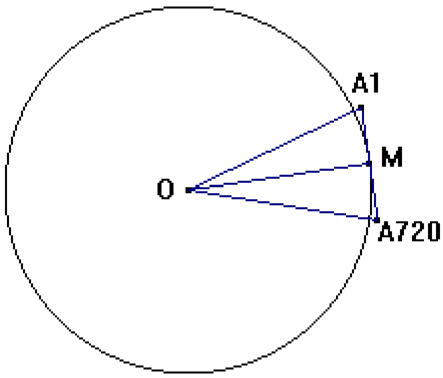


O ângulo central de um polígono de 720 lados é 0,5º. Seja M o ponto médio do lado A_1A_{720}. No triângulo retângulo OMA_{720} temos: sen 0,25 º = $\frac{L720}{2}$: R

Portanto L_{720}= 2.R.sen 0,25 º

Na época de Arquimedes sabia-se que o quociente entre o comprimento da circunferência e o diâmetro era constante. Pode-se obter o quociente $\frac{C}{2R}$ a partir das desigualdades $\frac{p}{2R} < \frac{C}{2R} < \frac{P}{2R}$ onde p é o perímetro do polígono regular inscrito na circunferência de raio R e P é o perímetro do polígono regular circunscrito.

Considerando o polígono regular de 720 lados circunscritos à circunferência de raio R acima temos:



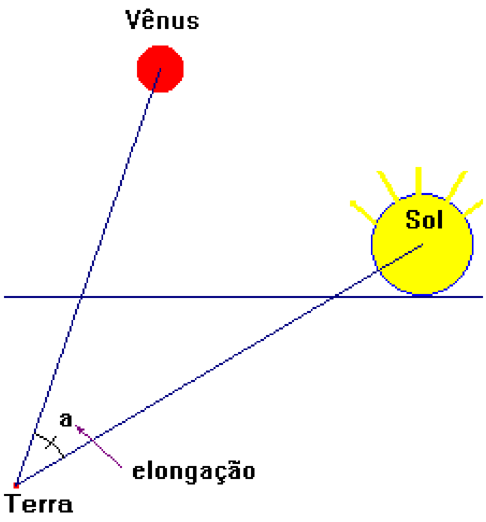
O ângulo central A_1OA_{720} mede 0,5 º. O ângulo MOA_{720} mede 0,25 º

Cós 0,25 º = $\frac{R}{OB}$ e sem 0,25 º = $\frac{AM}{OB}$. Dessas duas igualdades resulta que o lado do polígono circunscrito mede 2R. $\frac{\text{sen}\,0{,}25°}{\cos 0{,}25°}$. Portanto o perímetro do polígono será 720. 2R. $\frac{\text{sen}\,0{,}25°}{\cos 0{,}25°}$. Substituindo os dois perímetros na desigualdade $\frac{p}{2R} < \frac{C}{2R} < \frac{P}{2R}$ obtém-se: 3,14158 < $\frac{C}{2R}$ < 3,14162. Ptolomeu aproximou $\frac{C}{2R}$ por 3,1416.

Uso da tabela trigonométrica na astronomia

Cálculo das distâncias dos Planetas Vênus e Mercúrio ao Sol.

A tabela contém as medidas das elongações do planeta Vênus tomadas durante cerca de 2 anos. A distância Terra –Sol é aproximadamente 150 milhões de km.



Dia	elongação
0	20°
40	43°
60	47°
80	45°
120	37°
160	30°
200	19°
240	8°
280	0°
320	11°
360	21°
400	27°
440	35°
480	43°
520	47°
560	32°
600	21°
640	45°
680	45°
720	37°

Pela tabela percebe-se que a máxima elongação é 47°.

sen 47° = $\frac{d_{V-S}}{d_{T-S}}$. Por uma tabela trigonométrica temos que sen 47° = 0,7313.

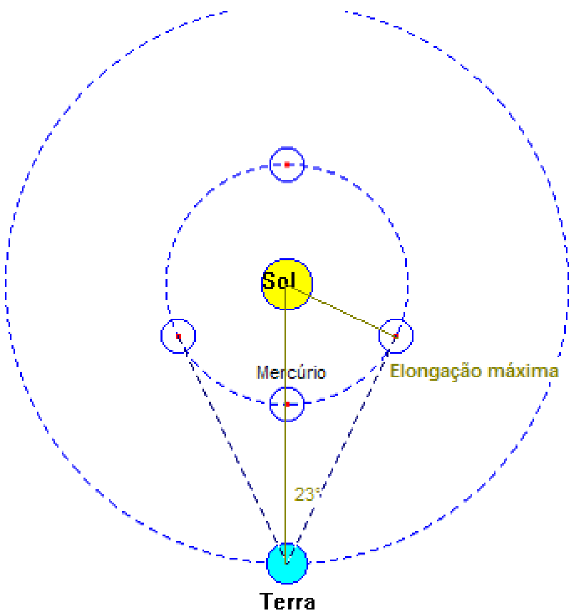
Logo $d_{V\text{-}S}$ = 0,7313. $d_{T\text{-}S}$ = 0,7313.150 milhões de km = 109,69 milhões de km.

A distância Mercúrio-Sol

As elongações do planeta Mercúrio ao longo de dois anos indicam que a elongação máxima ocorre quando o ângulo é de 23°.

sen 23° = $\frac{d_{M-S}}{d_{M-S}}$. Utilizando uma tabela trigonométrica temos que sen 23° = 0,3907.

Logo $d_{V\text{-}S}$ = 0,3907. $d_{T\text{-}S}$ = 58,61 milhões de km.



Bibliografia

- Aaboe, A. (1984) *Episódios da história antiga da matemática,* SBM.
- Ávila,G. *A geometria e as distâncias astronômicas na Grécia Antiga*, Revista do Professor de Matemática N° 1. pag. 9 - 13.
- Boczko,R. (1984) *Conceitos de astronomia*, Editora Edgard Blucher Ltda.
- Boyer, C. B. (1996) *História da Matemática*. São Paulo: Editora Edgard Blücher
- Dahan-Dalmadico, A.(1986). *Une histoire des mathématiques*, Éditions du Seuil
- Howard, E. (1995). *Introdução à história da matemática*. Editora UNICAMP.
- Lintz, R. (1999). *História da matemática*.Blumenau: Ed. FURB.
- Site: http://planeta.terra.com.br/educacao/formadaterra

Vincenzo Bongiovanni Possui graduação em Licenciatura em Matemática pela Universidade de São Paulo (1973), mestrado em Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo; (1987) e doutorado em Didática da matemática - Université Joseph Fourier (2001). Atualmente é professor do Programa de Pós-Graduação da Universidade Bandeirante de São Paulo. Tem experiência na área de Matemática, com ênfase em EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, atuando principalmente nos seguintes temas: geometria, novas tecnologias,formação de professores e história da matemática; Vincenzo.bongiovanni@uol.com.br