

## De las descripciones verbales a las representaciones gráficas. El caso de la rapidez de la variación en la enseñanza de la matemática

**Crisólogo Dolores Flores; Andrés Greogorio Chi Chablé;  
Eduardo Rafael Canul Pech; Cristy Arely Cantú Interián;  
Crispín Giovanni Pastor Solache**

### Resumen

En este artículo se presentan los resultados de una investigación que explora las representaciones gráficas que hacen los estudiantes sobre la rapidez. Los textos, el currículum y la enseñanza de la matemática y la física prevén generar una idea de la rapidez asociada a la fórmula:  $r = d/t$ , y a la representación gráfica como pendiente de la curva que representa a la gráfica de la función tiempo-distancia. Sin embargo, en este trabajo encontramos representaciones gráficas de la rapidez que difieren de las previstas, tales como: pictogramas, gráficas de columnas, gráficas de “puntos”, gráficas de “rectas” o gráficas de “curvas”. La mayoría de los estudiantes dan representaciones gráficas de la rapidez asociándola con su magnitud y no como la pendiente de curvas.

**PALABRAS CLAVE:** representaciones gráficas, rapidez, variación, concepciones alternativas

### Abstract

Research results on the student's speed graphical representations, are presented in this article. Texts, curriculum and mathematics and physics education aim at generating an idea of speed that goes with the formula:  $r = d/t$ , and to the graphical representation as the slope of the curve representing the time-distance function graph. Nevertheless we report in this work speed graphical representations different than those expected, such as: cartoons, bar graphs, "points" graphs, "line" graphs and "curved" graphs. Most students give speed graphical representations of its size and not as the slopes of the curve.

**KEYWORDS:** graphical representations, speed, variation, alternative conceptions

### Resumo

Neste artigo apresentam-se os resultados de uma pesquisa que explora as representações gráficas que fazem os estudantes sobre a velocidade. Os textos, o currículo e o ensino da matemática e a física prevêm gerar uma idéia da velocidade associada à fórmula:  $r = d/t$ , e à representação gráfica como pendente da curva que representa à gráfica da função tempo-distância. Embora, neste trabalho encontramos representações gráficas da velocidade que diferem das previstas, tais como: pictogramas, gráficas de colunas, gráficas de “pontos”, gráficas de “retas” ou gráficas de “curvas”. A maioria dos estudantes dá representações gráficas da velocidade associando-a com sua magnitude e não como a pendente de curvas.

**PALAVRAS CHAVE:** representações gráficas, velocidade, variação, concepções alternativas

## 1. Introducción

En este trabajo hemos adoptado a las gráficas sobre la rapidez de la variación como objeto de investigación. Las gráficas son elementos que juegan un papel central dentro de los diversos contextos, ya sea en la escuela, en nuestra vida cotidiana o en la ciencia misma. Por ejemplo, como una forma de auto-aprendizaje Kitsantas y Zimmerman (2006) reportan que los estudiantes que utilizan gráficas para llevar un control de sus propios avances y retrocesos durante el desarrollo de sus habilidades motrices, tienen mejores resultados al final de su curso en comparación con los que no las utilizan. Roth y McGinn (1997) por su parte asumen que las gráficas no son solo una representación mental sino una forma humana de vida, plantean que para desarrollar habilidades para su lectura e interpretación es necesario involucrar a los estudiantes en la realización de prácticas sociales asociadas más que en la posesión a priori de habilidades cognoscitivas. En el marco de la línea de investigación del Pensamiento y Lenguaje Variacional desarrollada por varios investigadores como Cantoral y Farfán (2000), Dolores (2008), se ha asumido la hipótesis que plantea que un universo amplio y significativo de gráficas puede contribuir al desarrollo de esta forma de pensamiento matemático. De hecho, este estudio está inscrito al seno de esta línea de investigación.

La idea de la rapidez o velocidad es conocida por los niños y adolescentes antes de que sean tratados de manera formal en las aulas escolares y forman parte de sus percepciones sobre el movimiento adoptando según Gómez (2008) un estatus fenomenológico, es decir ligados estrechamente con los fenómenos de variación y cambio. Lovell (1962, pp. 108-110) plantea que, como producto del juego y de lo que oyen decir de los adultos, los niños concluyen que si una persona u objeto en movimiento alcanza a otra persona u objeto, dicen que va *más rápido*, la idea de velocidad en los niños pequeños (4 -5 años) no tiene en cuenta la relación espacio-tiempo como tal, aunque encontraron que en los niños de 8-9 años comprendían la velocidad en función de la distancia. En condiciones escolares este concepto es tratado en los cursos de matemáticas y física de la secundaria y el bachillerato<sup>1</sup> asociándolo con la variación directamente proporcional o con el movimiento rectilíneo uniforme, suele definirse como una razón de cambio particular determinada por la fórmula:  $r = d/t$ , para posteriormente en matemáticas darle un estatus funcional.

La enseñanza de la rapidez tanto en física como en matemáticas asume que los estudiantes, después de haber estudiado este tema, estarán en condiciones de poder representar este concepto utilizando la noción de pendiente. Sin embargo, nuestra experiencia como profesores de matemáticas nos indica que esto no suele suceder así. Inclusive investigaciones en el campo reportan que las concepciones alternativas (llamadas también concepciones erróneas) de los estudiantes muchas veces son más poderosas que los conceptos científicos que se supone son los que la enseñanza formal se encarga de formar en ellos. Esto nos ha llamado mucho la atención y dado que la rapidez o velocidad son utilizadas con mucha frecuencia en matemáticas y ciencias, puede resultar de mucha utilidad el investigar las

<sup>1</sup> En México el Nivel Medio lo componen la secundaria y el bachillerato. El primero se le conoce como Nivel Medio Básico y comprende el 7º, 8º y 9º grado de escolarización y el segundo es conocido como Nivel Medio Superior y comprende el 10º, 11º y 12º grado. Las edades de los estudiantes en secundaria fluctúan entre 12 y 15 años y en el bachillerato entre 15 y 18.

representaciones gráficas que los estudiantes hacen de este concepto. Su conocimiento puede ayudar a profesores e investigadores al diseño de situaciones o secuencia didácticas que posibiliten el cambio conceptual deseado en la enseñanza y el aprendizaje de las ciencias naturales y la matemática.

## 2. Antecedentes

Desde finales de la década de los ochenta y principios de los noventa del siglo pasado varios investigadores (Zimmerman y Cunningham, 1991; Janvier, 1987) se interesaron por el estudio de las gráficas en virtud de que propician el uso de la visualización matemática, medio que empezó a ser considerado desde aquellos años como necesario para el mejoramiento del aprendizaje de la matemáticas y las ciencias. A pesar de las bondades que representa el uso de las gráficas para el aprendizaje los investigadores han encontrado varias dificultades a las que se enfrentan los estudiantes cuando construyen gráficas o extraen información de ellas (Wainer, 1992), al aplicar lo aprendido sobre gráficas en las clases de matemática a la física o a otras materias (Mc Dermot *et al*, 1987). Una clasificación de las dificultades de los estudiantes en la comprensión de las gráficas fue hecha por Leinhardt *et al* (1990), plantean cuatro tipos de categorías: la confusión entre la pendiente y la altura, la confusión entre un intervalo y en un punto, la consideración de una gráfica como un dibujo y la concepción de una gráfica como construida por un conjunto discreto de puntos. En otros estudios realizados por Espinel (2007) usando gráficas estadísticas para evaluar la capacidad de leer y razonar sobre distribuciones, hizo hallazgos similares a los descritos anteriormente, encontró en alumnos que se forman como profesores de primaria, que tienen dificultades para: distinguir gráficos de barras e histogramas, asignar la escala de una variable, razonar de forma global (miran puntos), identificar un gráfico a partir de la descripción de una variable, y reconocer patrones de comportamiento de las variables, en relación a los gráficos temporales, a pesar de su aparente simplicidad, halló que los futuros profesores no disponen de un método para leer o interpretar cambios en el tiempo, muchos justifican sus respuestas con la observación visual o utilizando la regla de tres para encontrar incrementos y decrementos en el tiempo.

Otros investigadores se han dado a la tarea de estudiar los fenómenos asociados a las gráficas y a la graficación bajo diversos enfoques. Hay quienes la miran como una habilidad cognitiva, ver por ejemplo a Dolores (2004); Mevarech y Kramarsky (1997); Otros la conciben como una práctica social, ver por ejemplo, Roth y McGinn (1997); Roth y Bowen (1998); Roth y Lee (2004). Otros investigadores las usan para la construcción de significados, por ejemplo, Ainley *et al* (2000) utilizan la graficación a través de una propuesta pedagógica para la construcción de significados de la relación fenómeno-gráfica, elaboran una secuencia de actividades para niños (8-9 años) utilizando una hoja de cálculo donde recaban datos producto de la experimentación con diversos fenómenos, por ejemplo, la resistencia de un puente de papel y el peso que soporta.

Por su parte, Cordero y Flores (2007) realizaron un estudio sobre el uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Su propósito fue ofrecer indicadores que

contribuyan a favorecer el desarrollo de una matemática funcional<sup>2</sup> en el sistema educativo, asumiendo la graficación como una práctica social en su proceso institucional. Sobre el análisis del uso que se le da a las gráficas con respecto a sus funcionamientos y sus formas en el discurso de los libros de texto del nivel básico (primaria y secundaria), identificaron tres momentos: el síntoma del uso de la gráfica de una función, el uso de la gráfica de una función, y el uso de la curva que proporcionan.

Empero, fuera de la escuela los ciudadanos comunes o profesionales utilizan las gráficas de una manera diferente de como se les usa o estudia en el ambiente escolar. Por ejemplo, un médico utiliza los electrocardiogramas con la finalidad de realizar diagnósticos sobre enfermedades cardiovasculares, los medios de comunicación las utilizan para transmitir información (Chi, 2008), en las tiendas de autoservicio se les utiliza para incentivar las ventas de los empleados (Meza, 2008). En el contexto de su uso, Roth y McGinn (1997) plantean que las gráficas y la graficación, más que algo escolar y cognitivo son una forma humana de vida, una práctica social donde la práctica es la actividad diaria. En algunos estudios realizados en esta dirección, Bowen y Roth (1998) concluyen que las lecturas están separadas de la interpretación gráfica.

Si bien como dice Roth y McGinn (1997) el éxito o fracaso del aprendizaje de las gráficas en el currículum puede ser explicado por medio de la presencia o ausencia de la práctica social, vista ésta como las actividades directamente vinculadas a las actividades cotidianas, también podríamos explicar lo anterior, por medio de las concepciones y representaciones que se forman los individuos a lo largo de su vida escolar. Un acercamiento mayor entre las prácticas humanas cotidianas y las actividades escolares podrían fortalecer el desarrollo de las habilidades sobre interpretación y elaboración de gráficas. En la literatura sobre la cognición asociada a las gráficas se estudian las dificultades y errores que tienen los estudiantes en la lectura e interpretación de gráficas (Wainer, 1992; Fabra y Deulofeu, 2000; Acuña, 2001). Sin embargo, no es lo mismo interpretar una gráfica ya construida para extraer información, que elaborar una representación gráfica dada cierta información sobre un fenómeno determinado. Por ello y pensando en la relación entre las actividades cotidianas y sus representaciones gráficas, en este trabajo estamos empeñados en investigar las representaciones gráficas que los estudiantes escolarizados hacen de situaciones cotidianas que involucran el concepto de rapidez.

### 3. Planteamiento del problema y el objetivo

La literatura indica que algunos grupos de investigadores estudian la interpretación y lectura de gráficas, dada la gráfica exploran la habilidad de extraer la información, parte importante están interesados en explorar las dificultades que tienen los estudiantes en ese proceso. Otros investigadores se interesan en identificar los significados que emergen de la práctica al estudiar las relaciones entre el fenómeno, la gráfica y los datos, incluso algunos investigadores no usan la gráfica

---

<sup>2</sup> Matemática funcional quiere decir un conocimiento incorporado orgánicamente en el humano que lo transforma y que le transforma su realidad.

como objeto de estudio sino como herramienta para desarrollar habilidades motrices en niños.

Partiendo de una posición antropológica W.M. Roth enfoca la atención en los usos de las gráficas, asumiendo que para desarrollar habilidades para su lectura e interpretación es necesario involucrar a los estudiantes en la realización de las prácticas sociales asociadas más que en la posesión a priori de habilidades cognitivas (Roth, 2003; Bowen, Roth y McGinn, 1999). A diferencia de quienes se interesan por la lectura e interpretación de gráficas, por las dificultades que tiene en su lectura, o quienes se interesan en su uso social, nosotros estamos interesados en esta investigación en explorar qué representaciones gráficas hacen los estudiantes acerca de enunciados verbales sobre situaciones cotidianas de la variación física, con ello propiciamos un acercamiento entre las situaciones cotidianas y las representaciones gráficas. En particular el centro de nuestra atención es la rapidez de la variación ya que es una noción muy cercana a la práctica cotidiana. Nuestro objeto de estudio son las representaciones gráficas acerca de la rapidez y nuestro objetivo es explorarlas en estudiantes del nivel medio de la escuela mexicana. Asumimos que las representaciones gráficas que los estudiantes hacen acerca de situaciones de rapidez son diferentes de las que se aceptan como válidas tanto en física como en matemáticas. De hecho este es un problema que consideramos obstaculiza el desarrollo de los conceptos matemáticos asociados a la variación. Tal problema lo hemos adoptado en este trabajo y mediante su estudio pretendemos aportar elementos para que los profesores de matemáticas y ciencias puedan afrontarlo y resolverlo en situación escolar.

#### 4. Elementos teóricos

Para explicar nuestros resultados este trabajo se sustenta en tres elementos fundamentales: el pensamiento y lenguaje variacional, las representaciones semióticas y la noción de concepción alternativa. El pensamiento y lenguaje variacional es caracterizado por Cantoral y Farfán (2000) como el campo en el que se estudian los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de saberes matemáticos propios de la variación y el cambio, en el sistema educativo y en el medio social que le da cabida. Pone particular atención en el estudio de los diferentes procesos cognitivos y culturales con que las personas asignan y comparten sentidos y significados utilizando diferentes estructuras y lenguajes variacionales. En tanto vertiente investigativa posee una triple orientación, por un lado se ocupa de estructuras variacionales específicas desde un punto de vista matemático y fenomenológico, en segundo término, estudia las funciones cognitivas que los seres humanos desarrollan mediante el uso de conceptos y propiedades de la matemática del cambio, en tercer lugar, tiene en cuenta los problemas y situaciones que se abordan y resuelven en el terreno de lo social mediante las estructuras variacionales consideradas en la escuela y el laboratorio.

Dentro de las nociones que conforman este tipo de pensamiento está justamente el cambio que se cuantifica mediante las diferencias. En las funciones tiempo-distancia, donde  $s$  es una función del tiempo, se escribe:  $s(t)$ , el cambio del tiempo se cuantifica mediante a diferencia:  $\Delta t = t_2 - t_1$ ; el cambio de distancia se cuantifica mediante la diferencia:  $\Delta s$ , y se expresa como:  $\Delta s = s(t_2) - s(t_1)$ . La rapidez

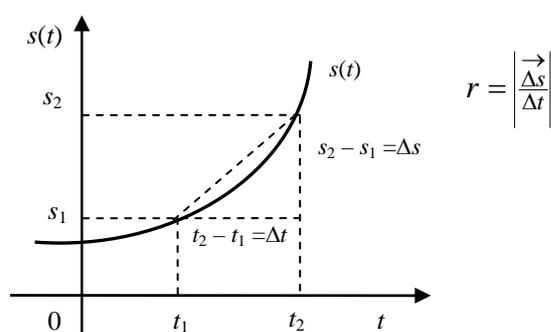
es una razón de cambio particular:  $\Delta s/\Delta t$ , comúnmente aparece como un tema propio de la física en particular es tratado dentro de la cinemática. La rapidez y la velocidad son conceptos que suelen usarse indistintamente, sin embargo, la velocidad tiene magnitud vectorial y la rapidez tiene magnitud escalar, esto es, para definir la velocidad de un objeto se considera no sólo la distancia que recorre por unidad de tiempo sino también la dirección y el sentido del desplazamiento, en tanto la rapidez es la relación entre el cambio de distancia recorrida y el cambio en el tiempo expresada en números positivos.

En términos matemáticos la rapidez media  $r$  se define como el valor absoluto de la velocidad media:  $r = \left| \frac{\overrightarrow{\Delta s}}{\Delta t} \right|$ . Donde  $s$  y  $t$  son la distancia y el tiempo

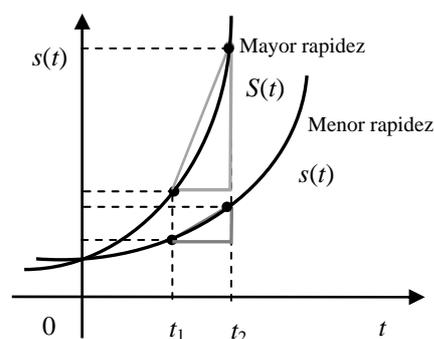
respectivamente. La rapidez instantánea  $r_i$  se define en términos del límite, como una derivada particular, es decir:

$$r_i = \left| \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{\Delta s}}{\Delta t} \right|$$

En términos gráficos la rapidez se le asocia con la inclinación y la pendiente de la gráfica (ver Gráfica 1). La pendiente en matemáticas está definida como la tangente trigonométrica del ángulo de inclinación y ésta, como ya se explicó antes, es un *cociente de cambios*. Así, la rapidez media se le asocia con la pendiente positiva de la secante a la curva que representa a la función tiempo-distancia y la rapidez instantánea como la pendiente (positiva) de la tangente en un punto determinado de la gráfica. A mayor pendiente de la curva mayor rapidez, a menor pendiente menor rapidez (ver Gráfica 2).



Graf. 1. Representación gráfica de la rapidez



Graf. 2. Mayor pendiente, mayor rapidez

En el terreno de la cognición, los objetos matemáticos no son directamente accesibles a través de la percepción o de una experiencia intuitiva inmediata, por ello es necesario proporcionar sus mediadores. Vigotsky (1996, pág. 22) dejó en claro que los procesos del conocimiento son mediatizados por el lenguaje. La distinción entre un objeto y su representación es un punto estratégico para la comprensión de las matemáticas. Sobre la base de los mediadores del conocimiento Duval (1998) plantea el concepto de registro de representación semiótica. Las representaciones semióticas son producciones constituidas por el empleo de signos que pertenecen a un sistema de representación, el cual tiene sus propios

constreñimientos de significancia y de funcionamiento. Una figura geométrica, un enunciado en lengua natural, una fórmula algebraica, una gráfica, son representaciones semióticas que pertenecen a sistemas semióticos diferentes. En particular en esta investigación usamos las representaciones semióticas enunciadas en formas escrita y exploramos las representaciones semióticas gráficas que se producen como producto de la transferencia entre el primer sistema semiótico y el segundo. Este proceso de transferencia se denomina conversión y se define como la transformación de una representación en otra correspondiente a otro registro conservando la totalidad o solamente una parte del contenido de la representación inicial. Buscamos en este trabajo representaciones semióticas gráficas y las llamamos simplemente gráficas como producto de la conversión. Este proceso puede propiciar la aparición de los conocimientos auténtico de los estudiantes acerca de la rapidez, e inducir al lector a ver los procesos de aprendizaje desde el punto de vista de los estudiantes no desde el punto de vista del profesor.

Pero las producciones de los estudiantes, incluso de los que ya estudiaron este concepto en la escuela, pueden ser inconsistentes con los que se aceptan en matemáticas y física o con las que el profesores esperan después de haber enseñado este concepto en las aulas. Para identificar estas producciones utilizamos la noción de concepción alternativa. A lo largo de su vida los seres humanos generan creencias, teorías, significados y explicaciones, las consideramos como concepciones de los estudiantes. Cuando esas concepciones se forman antes de que el conocimiento haya sido sujeto formal de aprendizaje dan lugar a las concepciones espontáneas. Aún después de que son sujetos a procesos sistemáticos de enseñanza los estudiantes construyen sus propios conocimientos que pueden diferir de los saberes que los profesores les desean transmitir. Cuando esas concepciones entran en conflicto con los significados aceptados, aparecen las concepciones erróneas, errores sistemáticos, las concepciones alternativas. Estos términos reflejan diferentes perspectivas de los conocimientos de los estudiantes. En tanto los conceptos erróneos y los errores sistemáticos describen rasgos incorrectos de los conocimientos de los estudiantes que son repetibles y explícitos, las preconcepciones y las concepciones alternativas tienen una connotación más neutral, pues enfatizan el cambio que va, desde los errores de los estudiantes hasta las diferentes maneras en que ellos entienden las tareas demandadas. El término concepciones alternativas es utilizado por nosotros en el mismo sentido de Confrey (1990) y se usa para describir al conocimiento que difiere de aquél que se propone sea aprendido y por tanto no es congruente con el aceptado por la ciencia.

## 5. Método

Se elaboró un cuestionario y se aplicó a estudiantes de secundaria (9º grado) y de bachillerato (12º grado) a los cuales se les pidió que para cada una de las siguientes situaciones elaboraran la o las gráficas que describieran la situación planteada:

- I. Un radar capta el movimiento de un automóvil durante 20 segundos. El radar reporta que el auto se mueve con una rapidez de 30 m/s.
- II. Desde un mismo punto de partida de una pista olímpica, inician su carrera los corredores Antonio y Raúl. Después de 5 minutos, Antonio alcanza una

rapidez de 2m/s y Raúl de 5 m/s. Así se mantienen durante una vuelta entera en la pista.

- III. Juanito y Eduardo son hermanos gemelos que crecieron (en estatura) con la misma rapidez durante sus primeros cinco años de vida. Juanito nació midiendo 50 cm de talla y Eduardo 55 cm.
- IV. Dos recipientes que contienen un litro de agua y un litro de aceite están en ebullición a 100 °C y 218 °C, respectivamente. Después ambos recipientes se dejan enfriar de manera que el agua se enfría más rápido que el aceite.

Los estudiantes recibieron hojas en blanco a fin de que construyeran la o las gráficas a pulso sin usar regla. La fase de validación del instrumento fue realizada basada en un estudio piloto con estudiantes de secundaria y de bachillerato, fase que estuvo supervisado por investigadores de Educación Matemática. En el estudio participaron 388 estudiantes, 157 del Nivel Medio Básico (secundaria) que estaban en el 9º grado y 231 del Nivel Medio Superior (bachillerato) los cuales estaban en el 12º grado, todos ellos de escuelas ubicadas en una región del sur de México.

Previo a la aplicación del cuestionario realizamos un análisis didáctico en el que hicimos una revisión de los programas y libros de texto que mayormente se utiliza en el nivel medio con el propósito de mirar cómo se presenta, se estructura y es tratado el concepto de rapidez en tales instituciones educativas. Ello nos permitió constatar su presencia asociada al concepto de velocidad y su representación gráfica asociada a la pendiente de rectas o curvas. Para el estudio de las representaciones gráficas producidas por los estudiantes realizamos un análisis cualitativo y una descripción cuantitativa de esas producciones. El análisis cualitativo consistió en revisar cada una de las gráficas presentadas por los estudiantes a fin de obtener una clasificación que atendió al tipo de gráfica, los tipos se refieren a la forma gráfica más usada por los estudiantes: pictogramas, barras, puntos aislados, rectas, curvas, etc. El análisis cualitativo también incluyó el estudio las características propias de la variación y el cambio (focalizando la atención en la rapidez) a saber: la primera relativa a encontrar *qué cambia*, es decir, a la identificación de las variables, para el caso particular de este estudio se atendió a la manera de cómo etiquetan los ejes. La segunda cuestión atañe al reconocimiento de la manera de *cómo cambia* el fenómeno que se pide representar gráficamente, este aspecto lo vimos reflejado en las producciones de los estudiantes según el tipo, la tendencia y los puntos (o zonas) particulares de la gráfica presentada, por ejemplo, creciente, decreciente, con máximos y mínimos, o estables, etc. El tercer aspecto atendido fue el relativo a la *cuantificación* de la razón de cambio, esto es la rapidez, particularmente en este estudio se tomó la decisión de visualizar este aspecto en las producciones de los encuestados, si ellos daban indicios de tener conciencia sobre su valor y su representación gráfica. Si en las producciones se manifestaban todos estos elementos de la variación y el cambio entonces fueron evaluadas por nosotros como concepciones aceptables, en caso contrario fueron consideradas como concepciones alternativas.

Sobre la base de los resultados obtenidos en el análisis cualitativo, realizamos una descripción cuantitativa acerca de las producciones gráficas de los estudiantes. Esto nos permitió hacer comparaciones numéricas entre las producciones de los

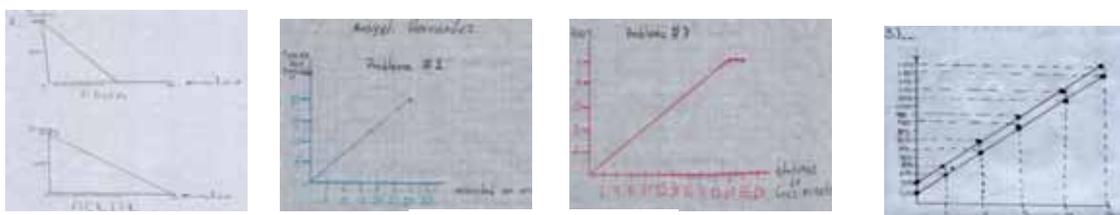
estudiantes de secundaria y de bachillerato cuestionados, por un lado entre los tipos de gráficas por ellos presentadas y por el otro entre las concepciones alternativas y aceptables detectadas.

## 6. Las representaciones gráficas mostradas

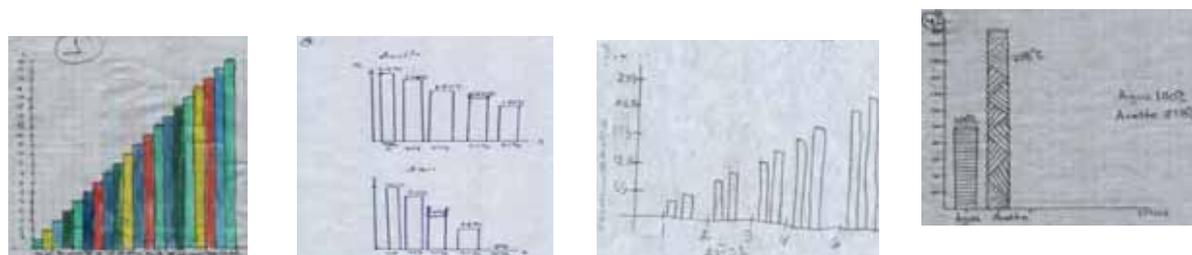
### Análisis cualitativo

Los estudiantes que participaron contestando el cuestionario estaban en el último año de la secundaria y del bachillerato, por tanto ya habían recibido alguna instrucción acerca de la graficación y la rapidez. Según el curriculum de la secundaria y el bachillerato la rapidez se incluye en el curso de Física I asociada al concepto de velocidad. En matemáticas también se le estudia como parte de las aplicaciones del concepto de derivada. Por tanto se puede esperar que alguna influencia haya tenido la enseñanza formal en las concepciones externadas por los estudiantes a través de sus representaciones gráficas. La mayoría de los estudiantes transformaron las descripciones verbales a una gráfica en el sentido cartesiano aunque hay quienes hicieron representaciones pictóricas o tabulaciones. Además aunque las situaciones no se referían necesariamente a funciones lineales, la mayoría de los estudiantes que construyeron las gráficas correctamente prefirieron describirlas como tales.

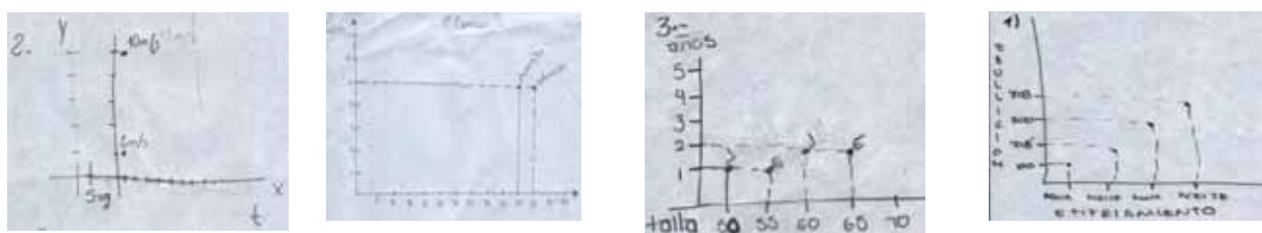
Esta fuerte tendencia hacia la linealidad también ha sido reportada por Dreyfus y Eisenberg (1982) y Markovits *et al* (1983). En términos generales las representaciones gráficas mostradas por los estudiantes son de cinco tipos: rectas, columnas, puntos, pictóricas, curvas. A continuación presentamos esto a través de representaciones prototípicas.



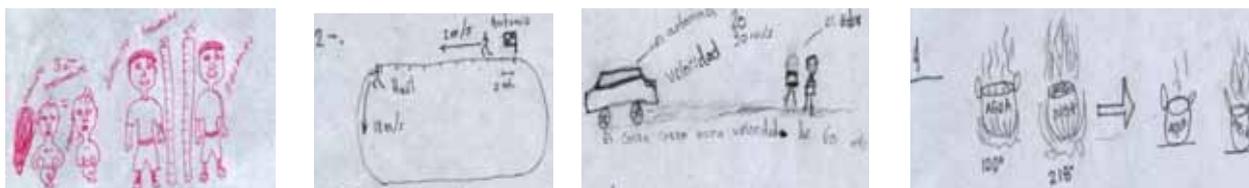
Graf. 3. Rectas



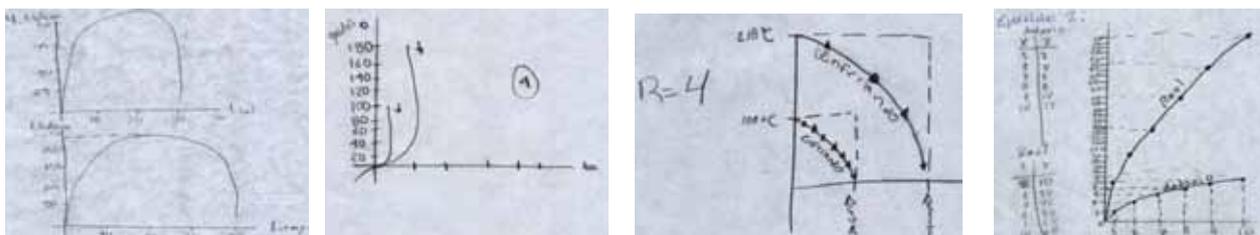
Graf. 4. Columnas



Graf. 5. Puntos



Graf. 6. Pictóricas

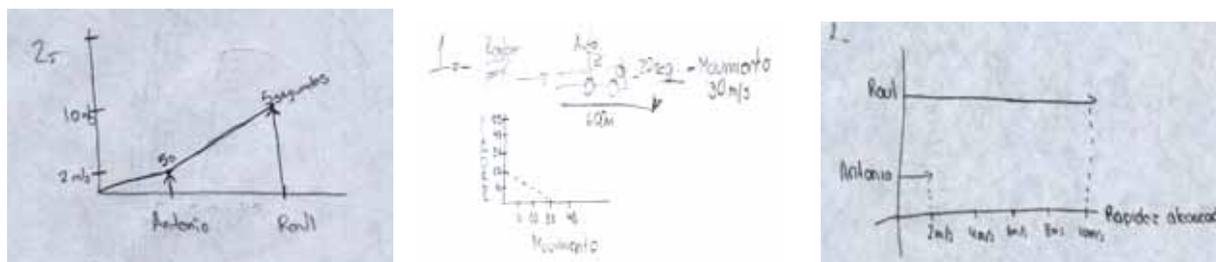


Graf. 7. Curvas

Las representaciones gráficas asociadas a dibujos o pictogramas intentan describir o traducir, con dibujos, la situación planteada. En el caso de los corredores dibujan la pista olímpica y los supuestos corredores etiquetando la rapidez que cada uno lleva, incluso dibujando el corredor de mayor rapidez adelante que el de menor rapidez, de manera análoga lo hacen para el resto de situaciones. Las representaciones pictóricas presentadas indican que a la mayor rapidez se la asocia, para el caso de los corredores o el de los niños, con “muñequitos” más grandes, sugiriendo que la rapidez está asociada a la magnitud del dibujo. Las gráficas de “columnas” sugieren algo parecido al notado en los pictogramas, una barra más grande para el de mayor rapidez y una más chica para la de menor rapidez, representan con ello el dato dado a este respecto, es notorio que varios estudiantes utilizan el término velocidad en lugar del de rapidez. Las gráficas de “puntos” tienen una connotación también similar, el punto más alto representa a la mayor rapidez y el más bajo al de menor rapidez. Las gráficas de “curvas” y las de “rectas” se acercan más a las representaciones usuales en la escuela, las segundas fueron utilizadas estableciendo las diferencias entre su pendientes: la gráficas del calentamiento del agua tiene mayor pendiente que la gráfica del calentamiento del aceite; para el caso de las primeras fueron utilizadas quizá recuperando la continuidad de los movimientos representados, en algunos casos se utilizaron para comparar crecimientos.

Con un análisis más detallado de las respuestas al cuestionario observamos que existieron estudiantes que etiquetaron sus ejes usando expresiones como metros, movimiento, segundos, usando el nombre de las personas o de los objetos, la rapidez fue usualmente medida en m/s. Aunque existieron representaciones en las que no se etiquetó algún eje (o ambos) se observó que intercambiaron las etiquetas de los ejes en comparación a como suele hacerse tradicionalmente en la escuela, es decir, etiquetaron al eje vertical (que usualmente se etiqueta con las “y”) con el tiempo y el eje horizontal a la distancia. Notamos que existe una visible tendencia en representar los datos de la situación que en identificar las variables en juego, este hecho se resalta más cuando la representación del enunciado es de tipo pictórica. De las producciones presentadas por los estudiantes se observó que en

una cantidad significativa de los casos el comportamiento de la gráfica era acorde con la tendencia implicada en la situación de variación planteada, por ejemplo, para los tres primeros enunciados las representaciones son crecientes y para la cuarta situación son decrecientes. Pero, al igual para describir este aspecto de la situación hubo quienes recurrieron al empleo de flechas para marcar la dirección del cambio.



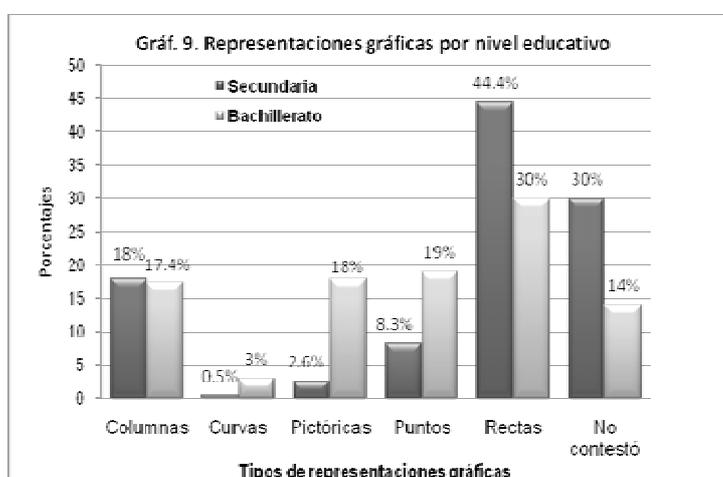
Graf. 8. Flechas que indican dirección del cambio

Con respecto a la representación del cambio (nos referimos a los  $\Delta y$  o  $\Delta x$ ) estas no fueron representados explícitamente sin embargo en las gráficas de columnas y de rectas e incluso en algunas de puntos se dejan entrever, dibujando las columnas (o los puntos en el plano cartesiano) diferenciadas en alturas, que crecen uniformemente.

En el caso de la primera situación, hubo quienes solo unieron el origen con la coordenada que tenía como valores los datos de la situación (30 m/s), otro grupo de estudiantes necesitaron suponer cierta razón de crecimiento (o decrecimiento) a manera de rapidez y poder bosquejar la situación gráficamente. Y otros asociaron la magnitud del segmento o el relleno de la barra con la proporción con la que cambiaba el fenómeno.

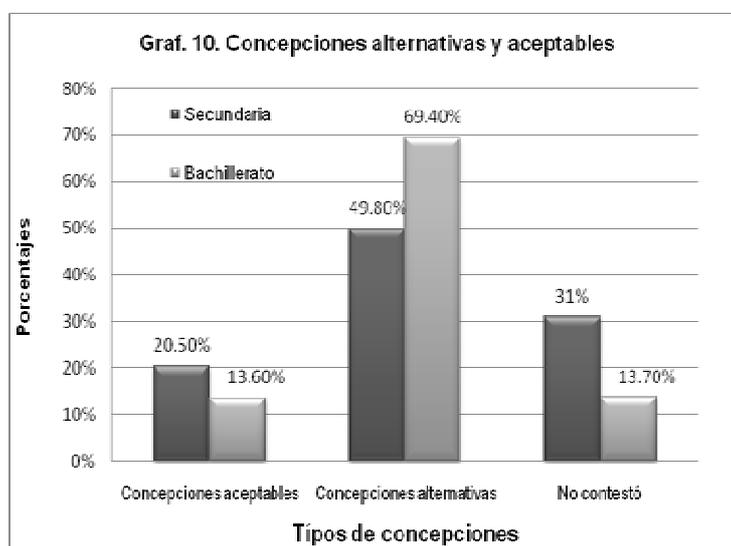
### Descripción cuantitativa.

En términos de porcentajes los tipos de gráficas presentadas por los estudiantes se muestran a continuación, en la Gráfica 9.



Como ya lo señalamos anteriormente, las gráficas de líneas rectas fueron mayoritariamente utilizadas por los estudiantes cuestionados, en especial por los de secundaria (44.4%); también los de bachillerato, aunque con menor frecuencia que los de secundaria utilizaron este tipo de representación (30%). La utilización de gráficas de columnas fue utilizada casi con la misma frecuencia en ambos niveles (17.4% y 18%). Los estudiantes de bachillerato son más proclives a utilizar representaciones pictóricas y los puntos para representar la rapidez. La utilización de gráficas que representan líneas curvas fue utilizada con muy escasa frecuencia. Los datos mostrados indican que a mayor avance en nivel educativo los estudiantes tienden a utilizar más los puntos y las representaciones pictóricas. Es notorio que el 30% de los estudiantes de secundaria no hayan contestado el cuestionario, esto puede ser indicativo del escaso universo de gráficas que la escuela ha generado en ellos o quizá de la reticencia a usar gráficas para dar respuesta a las tareas propuestas por los investigadores.

En lo que respecta a las concepciones alternativas y las concepciones aceptables, la Gráfica 10 nos ha permitido resumir esta información. Las gráficas aceptables fueron consideradas como aquellas que reunían las siguientes condiciones: a) Si la grafica incluye un sistema de dos ejes coordenados, b) Si los ejes están etiquetados correctamente, c) Si las unidades marcadas en los ejes siguen una escala consistente, d) Si la grafica representa la distancia y el tiempo de modo que la rapidez (expresada a través la pendiente) es consistente con la información dada en el enunciado. Las gráficas que no reunían estas condiciones en conjunto fueron consideradas como concepciones alternativas.



En estas condiciones, las concepciones alternativas mayoritarias fueron externadas por los estudiantes del bachillerato, prácticamente el 70% presentaron este tipo de concepciones a través de gráficas. En el caso de la secundaria el porcentaje es menor pero significativo, pues alcanzó prácticamente el 50%. La frecuencia de concepciones aceptables mostradas son muy bajas, casi el 14% en bachillerato y de 20.5% en secundaria.

## 7. Conclusiones y perspectivas

Este trabajo muestra los tipos de representaciones gráficas que los estudiantes hacen de enunciados verbales que incluyen la rapidez de la variación. Los profesores de matemáticas y física creemos que con el hecho de enseñar el concepto de velocidad o rapidez, incluso asociándolo a su representación gráfica, esto quedará como parte de los conocimientos aceptables en la mente de los estudiantes. Sin embargo esto no es así. En este trabajo hemos aportado evidencias de que son muchas más las concepciones alternativas que las aceptables, las que se forman en los estudiantes acerca de la rapidez. Las representaciones gráficas mostradas por los estudiantes son de cinco tipos: rectas, columnas, puntos, pictóricas y curvas. Este tipo de representaciones gráficas son consistentes con las encontradas por Mevarech y Kramarsky (1997), aunque ellas lo exploraron sólo con estudiantes de secundaria, aquí lo hicimos además con estudiantes de bachillerato, además en el presente trabajo se buscan representaciones de rapidez y aquellas concepciones alternativas sobre las gráficas de funciones. En síntesis, los resultados encontrados indican que la mayoría de los estudiantes dan representaciones gráficas de la rapidez asociándola con su magnitud y no con la pendiente o cociente de magnitudes de los cambios como se prevé en el currículum matemático escolar. De manera similar como lo señala Dolores (1998) cuando notó en estudiantes de bachillerato que la velocidad es considerada en el contexto gráfico como equivalente  $s(t_0)$  y no como la pendiente de la curva en  $t_0$  o sea como  $s'(t_0)$ .

Estos resultados pueden ser indicadores de que la enseñanza formal poco está haciendo por lograr cambios conceptuales en los estudiantes. El cambio conceptual intencional es definido por Ferrari y Elik (2003, pág. 36) como el intento deliberado de una persona por lograr un cambio radical de un sistema conceptual a otro porque son seducidos por el poder de ese nuevo sistema conceptual, o porque perciben algún defecto profundo en su visión actual. Este es uno de los principales retos que se desprenden de este trabajo y marca la dirección de futuros trabajos en el campo de la educación matemática tal como lo plantea Dolores (2008). Hoy día la educación centrada en el aprendizaje ha estado penetrando cada vez más en los sistemas educativos de varios países del mundo. Esto implica entre otras cosas, lo que Ausubel *et al* (2000) sugieren: el factor más importante que influye en el aprendizaje es lo que el alumno ya sabe, averíguese esto y enséñese consecuentemente.

Las representaciones gráficas que los estudiantes hacen de situaciones cotidianas que involucran la rapidez suelen ser diferentes de las aceptables. Tanto las de los estudiantes que salen de la secundaria para ingresar al bachillerato, como los que terminan el bachillerato y pretenden ingresar al nivel superior. Los profesores de estos niveles educativos podrían favorecer los cambios conceptuales y mejorar el aprendizaje de la matemática de las variables en la escuela conociendo previamente cómo representan los estudiantes a la rapidez. En este trabajo se dan a conocer tales representaciones y por tanto pueden ser el punto de partida para diseñar estrategias de enseñanza a fin de contribuir al desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional.

Pozo (1996, pp. 243-244) plantea que los cambios conceptuales podrían posibilitarse si se tienen en cuenta las condiciones siguientes:

- El aprendizaje de conceptos científicos no consiste sólo en reemplazar unas ideas cualesquiera por otras científicamente aceptadas, sino que en el aprendizaje existe una cierta conexión genética con la teoría alternativa del alumno y la teoría científica que se le pretende transmitir.
- Para que el alumno pueda comprender la superioridad de la nueva teoría es preciso enfrentarle a situaciones conflictivas que supongan un reto para sus ideas. Es decir, el alumno ha de darse cuenta de que su teoría previa es errónea en ciertas situaciones, en las que conduce a predicciones que no se cumplen.
- Por último, a partir de lo anterior, puede deducirse que la toma de conciencia por parte del alumno es un paso indispensable para el cambio conceptual. Los conceptos alternativos de los alumnos suelen ser implícitos. Un primer paso para su modificación será hacerlos explícitos mediante su aplicación a problemas concretos.

Este puede ser un marco propicio para proseguir investigando e incidiendo en la mejora de la enseñanza y el aprendizaje de los conceptos de la matemática de la variación y el cambio. De eso nos ocuparemos en próximas investigaciones.

### Bibliografía

- Acuña, C. (2001): *Concepciones en graficación, el orden entre las coordenadas de los puntos del plano cartesiano*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 4(3), 203-217.
- Ainley, J. Nardi, E. y Pratt, D. (2000): *The construction of meanings for trend in active graphing*. International Journal of Computers for Mathematical Learning 5, 85-114.
- Ausubel, D., Novak, J. y Hanesian, H. (2000): *Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo*. Editorial Trillas. México D.F.
- Bowen, G.M. y Roth, W.M. (1998). *Lecturing graphing: what features of lectures contribute to student difficulties in learning to interpret graphs?*. Research in Science Education 28, 77-90.
- Bowen, G.M. Roth, W.M. y McGinn, M. (1999). *Interpretations of graphs by university biology students and practicing scientists: Toward a social practice view of scientific representation practice*. Journal of Research in Science Teaching 36, 1020-1043.
- Cantoral, R. y Farfán, R. M. (2000): *Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis*. En: R. Cantoral (Eds.) *El futuro del cálculo infinitesimal*, ICME-8, 69-91. Grupo Editorial Iberoamérica, México D. F.
- Chi, A. (2008): *Un estudio sobre el discurso asociado a las gráficas en situaciones de uso*. Resúmenes de la Vigésima Segunda Reunión latinoamericana de Matemática Educativa, pág. 66. CLAME, IPN, México D. F.
- Confrey, J. (1990): *A review of research on student conceptions in mathematics, science and programming*. Review of Research in Education 16, 3-56.

- Cordero, F. y Flores, R. (2007): *El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel medio básico a través de los libros de texto*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 10, 7-38.
- Dolores, C. (1998): *Algunas ideas que acerca de la derivada se forman los estudiantes en sus cursos de cálculo*. En: F. Hitt (Ed.) *Investigaciones en Matemática Educativa II*, 257–272. Grupo Editorial Iberoamérica, México D. F.
- Dolores, C. (2004): *Acerca del análisis de funciones a través de sus gráficas, concepciones alternativas de estudiantes de bachillerato*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 7(3), 195-218.
- Dolores, C. (2008): *Las gráficas, sus usos y retos en la enseñanza y en la investigación en matemática educativa*. Perspectivas docentes 36, 51-58.
- Dreyfus, T. y Eisenberg, T. (1982): *The function concept in college students: linearity smoothness and periodicity*. Focus on Learning Problem in Mathematics 5, 119-132.
- Duval, R. (1998): *Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento*. En: F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II*, 173–201. Grupo Editorial Iberoamérica, México, D. F.
- Espinel, M. C. (2007): *Construcción y razonamiento de gráficos estadísticos en la formación de profesores*. Actas XI SEIEM (Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática), 99-119. La Laguna. Tenerife. España.
- Fabra, M. y Deulofeu, J. (2000): *Construcción de gráficos de funciones: Continuidad y prototipos*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 43(2), 207-230.
- Ferrari, M. y Elik, N. (2003): *Influences on Intencional Conceptual Change*. En: G. Sinatra y P. Pintrich (Eds.) *Intencional conceptual change*, 21-54, Lawrence Erlbaum Associates. Hillsdale, N.J., USA
- Gómez, E. (2008). *La construcción de la noción de variable*. Tesis de Doctorado. Inédita. CICATA del IPN, México D.F.
- Kitsantas, A. y Zimmerman, B.J. (2006). *Enhancing self-regulation of practice: the influence of graphing and self-evaluative standards*. Metacognition Learning 1, 201–212.
- Janvier, C. (Ed) (1987): *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*. Lawrence Erlbaum Associates. Hillsdale, N.J., USA.
- Leinhardt, G. Zaslavsky, O. y Stein, M. (1990). *Functions, graphs and graphing: Tasks, learning and teaching*. Review of Educational Research 60, 1– 64.
- Mc. Dermot, L.C. Rosenquist, M. L. y Van Zee, E. H. (1987). *Studentes difficulties in connecting graphs and physics: Examples from kinematics*, American Journal of Physics 55, 503-513.
- Mevarech, Z. y Kramarsky, B. (1997). *From verbal descriptions to graphic representations: stability and change in students' alternative conceptions*. Educational Studies in Mathematics 32, 229–263.
- Meza, E. (2008): *El antecedente escolar de las gráficas de uso socioeconómico*. Resúmenes de la Vigésima Segunda Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, pág. 125, CLAME, IPN, México D.F.

- Novell, K. (1962). *Desarrollo de los conceptos básicos matemáticos en los niños*. Ediciones Morata, Madrid, España.
- Pozo, J.I. (1996). *Teorías cognitivas del aprendizaje*, Ediciones Morata, S. L., Madrid, España.
- Roth, W.M. (2003). *Toward Anthropology of Graphing. Semiotic and Activity-Theoretic Perspectives*. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht.
- Roth, W.M. y McGinn, M.K. (1997). *Graphing: Cognitive ability or Practice?* Science Education 81 (1), 91–106.
- Vigotsky, L. (1996). *Pensamiento y lenguaje*. Ediciones Quinto Sol, Segunda Edición, México D.F.
- Wainer, H. (1992). *Understanding graphs and tables*. Educational Researcher 21, 14–23.

Crisólogo Dolores Flores. Nacido en Tlalquetzala, Municipio de Huamuxtitlán. Guerrero, México. Es Profesor de Tiempo Completo de la Unidad Académica de Matemáticas de la UAG desde 1986, es Investigador Nacional del Sistema nacional de Investigadores desde 1996, es miembro regular de la Academia Mexicana de Ciencias desde 2003. Es Licenciado en Matemática Educativa y Maestro en Ciencias en la misma especialidad por la UAG, es Doctor en Ciencias por el Instituto Superior Pedagógico "Enrique José Varona" de la Habana Cuba. Trabaja en la línea de investigación relativa a los Estudios sobre el Pensamiento y Lenguaje Variacional, actualmente estudia los procesos de comunicación de los saberes matemáticos de la variación y el cambio en el contexto del discurso informativo. Miembro del Comité Editorial de la Revista Latinoamericana de Investigación de Matemática Educativas. Fundador del Centro de Investigación en Matemática Educativa de la UAG, es miembro fundador del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. [cdolores@cimateuagro.org](mailto:cdolores@cimateuagro.org),

Andrés Greogorio Chi Chablé. Nacido en Mérida Yucatán, México. Licenciado en Enseñanza de las Matemáticas por la Universidad Autónoma de Yucatán. Actualmente es estudiante de tiempo completo de la Maestría en Ciencias: Área Matemática Educativa, de la Universidad Autónoma de Guerrero (UAG). Ha participado como ponente en diversos congresos especializados como la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa 22, la XI Escuela de Invierno en Matemática Educativa. Ha participado como organizador del Seminario Permanente de Investigación en Matemática Educativa en la UAG. [chichableag@cimateuagro.org](mailto:chichableag@cimateuagro.org)

Eduardo Rafael Canul Pech. Nacido en Mérida Yucatán, México. Es Licenciado en Enseñanza de las Matemáticas por la Universidad Autónoma de Yucatán. Actualmente estudiante de la Maestría en Ciencias: Área Matemática Educativa de la Universidad Autónoma de Guerrero. Ha participado como ponente en diversos congresos especializados como la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa 22, la XI Escuela de Invierno en Matemática Educativa. [ecanul@cimateuagro.org](mailto:ecanul@cimateuagro.org)

Cristy Arely Cantú Interián. Nacida en Tuxtepec, Oaxaca, México. Es Licenciada en Enseñanza de las Matemáticas por la Universidad Autónoma de Yucatán. Actualmente es estudiante de tiempo completo de la Maestría en Ciencias: Área Matemática Educativa de la Universidad Autónoma de Guerrero (UAG). Ha participado como ponente en diversos congresos especializados como la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa 22 y la XI Escuela de Invierno en Matemática Educativa. [ccantu@cimateuagro.org](mailto:ccantu@cimateuagro.org),

Crispín Giovanni Pastor Solache. Nacido en Chilpancingo de los Bravo, Guerrero, México. Es Licenciado en Matemáticas, Área: Matemática Educativa por la Universidad Autónoma de Guerrero (UAG). Actualmente es estudiante de la Maestría en Ciencias: área Matemática Educativa de la misma universidad. Ha participado como ponente en diversos eventos especializados como la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa 22, la XI Escuela de Invierno en Matemática Educativa; así como en eventos académicos como el Tercer coloquio Estatal de Jóvenes Talentos del estado de Guerrero, Jornadas Científicas Estudiantiles de la Unidad Académica de Matemáticas de la UAG. [gpastor@cimateuagro.org](mailto:gpastor@cimateuagro.org)