Junio de 2009, Número 18, páginas 29 – 40
ISSN: 1815-0640

Reflexiones sobre el valor del diálogo en la Enseñanza de la Matemática

María Cristina Rocerau; Silvia Vilanova; María Isabel Oliver; María Susana Vecino; Guillermo Valdez.

Resumen

El diálogo crea un proceso de comprensión interpersonal, un espacio de negociaciones de significados y una revalorización de las diferencias como oportunidades de alcanzar perspectivas nuevas. El tipo de pregunta que propicia la apertura al diálogo es aquella que plantea un problema, un desafío o una crítica, que permite trascender la respuesta y lleva a plantearse más preguntas, que tiene la suficiente fuerza como para hacer tambalear los cimientos sobre los que se asienta la propia certeza. El presente trabajo tiene la intención de recuperar el valor del diálogo como un potente recurso para la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática. A partir de un breve rastreo de la utilización que han hecho del diálogo algunos matemáticos célebres, proponemos un ejemplo de este recurso para ser implementado en el nivel secundario de enseñanza.

Abstract

The dialogue creates a process of interpersonal understanding, an area of negotiations of meanings and a revaluation of the differences as opportunities to reach new prospects. The kind of question that fosters openness to dialogue is one that poses a problem, a challenge or a criticism, that leads to more questions and has enough strength to shake the foundations on which settles itself certainty. This paper's intention is to recover the value of dialogue as a powerful resource for mathematics teaching and learning. Starting from a brief review of the use of dialogue made by some famous mathematicians, we propose an example of this resource for secondary educational level.

Resumo

O diálogo cria um processo de compreensão interpessoal, um espaço de negociações de significados e uma revalorização das diferenças como oportunidades de alcançar perspectivas novas. O tipo de pergunta que propicia a abertura ao diálogo é aquela que expõe um problema, um desafio ou uma crítica, que permite transcender a resposta e leva a propor mais perguntas, que tem a suficiente força como para fazer desequilibrar as bases sobre as quais se assenta a própria certeza. O presente trabalho tem a intenção de recuperar o valor do diálogo como um potente recurso para o ensino e a aprendizagem da Matemática. A partir de um breve rastreamento da utilização que fizeram do diálogo alguns matemáticos célebres, propomos um exemplo deste recurso para ser implementado no nível secundário de ensino.

El diálogo y la Matemática.

El diálogo crea un proceso de comprensión interpersonal, un espacio de negociaciones de significados y una revalorización de las diferencias como oportunidades de alcanzar perspectivas nuevas. Señala Bachelard (1985): "Ante todo es necesario saber plantear los problemas. En la vida científica los problemas no se plantean por sí mismos. Es precisamente este sentido del problema el que caracteriza el verdadero espíritu científico. Para un espíritu científico, todo conocimiento es una respuesta a una pregunta. Si no hubo pregunta, no puede haber conocimiento." Así, el tipo de pregunta que propicia la apertura al diálogo es aquella que plantea un problema, un desafío o una crítica; aquella que permite trascender la mera respuesta y lleva a plantearse más preguntas; aquella que tiene la suficiente fuerza como para hacer tambalear los cimientos sobre los que se asienta la propia certeza, que puede no ser la certeza de otros. Según Burbules (1999), "comprender que el que formula una pregunta puede, a su vez, ser objeto de otra pregunta, es la condición que ayuda a crear y a mantener una relación dialógica de respeto y confianza mutuos." El presente trabajo tiene la intención de hacer un breve rastreo de la utilización del diálogo en la matemática, desde el período socrático hasta nuestros días y recuperar el valor del diálogo para la enseñanza y el aprendizaje.

Recuperar el valor del diálogo en el aprendizaje y la enseñanza de la Matemática, es recuperar una técnica que ya usaban los griegos hace más de dos mil años y que ha continuado vigente en épocas posteriores.

La contribución de Sócrates a la filosofía ha sido de un marcado tono ético, pero también hizo hincapié en la discusión racional y en la búsqueda de definiciones universales. Dice Bréhier (1956): *"lo que con razón puede atribuirse a Sócrates son los razonamientos inductivos y las definiciones universales, situados unos y otras al principio de la ciencia"*. En el siguiente pasaje del Teetetos de Platón, se caracteriza el arte de la mayéutica propuesto por Sócrates (Ferrater Mora, J., 1969):

> "Mi mayéutica - dice Sócrates- tiene las mismas características generales que el arte de las comadronas. Pero difiere de él en que hace parir a los hombres y no a las mujeres y en que vigila las almas, y no los cuerpos, en su trabajo de parto. Lo mejor del arte que practico es, sin embargo, que permite saber si lo que engendra la reflexión del joven es una apariencia engañosa o un fruto verdadero"

Su método centrado en el *diálogo*, y sobre todo la i*nterrogación*, su habilidad de persuadir y disuadir y de hecho toda su obra, se dirigió al descubrimiento de problemas, más que a la búsqueda de soluciones*. "Sócrates hacia surgir dondequiera, lo que antes parecía no existir: un problema."* (Ferrater Mora, J, 1969).

En nuestros días, reconocidos matemáticos contemporáneos han retomado la utilización del diálogo aunque con fines diversos: la obra pionera de Polya, por ejemplo, aborda la resolución de problemas a través de un gran diálogo con el lector; el matemático húngaro Renyi, presenta contenidos de gran complejidad a través de diálogos, que convierte en ingeniosos textos de divulgación; por último, la mirada crítica de Morris Kline sobre lo que se denominó "la matemática moderna" se expresa, en algunas partes de su libro, a través de diálogos cuya finalidad es refutar una postura; por último, Mason, Burton y Stacey le dan al diálogo una finalidad metacognitiva: la de cuestionar nuestro propio pensamiento matemático.

♦ ***Polya: Cómo plantear y resolver problemas***

Cómo plantear y resolver problemas, una de las obras de Polya (1979) de especial interés para docentes y estudiantes de matemática, editada por primera vez en inglés en 1945 y en español en 1965, enfatiza el proceso de invención de la matemática y su lado experimental e inductivo, proporcionando procedimientos originales para llegar a la solución de los problemas. Como lo señalan importantes matemáticos actuales vinculados a la educación matemática (Schoenfeld, 1985), fue Polya quien sentó las bases sobre las que se impulsó el cambio en la enseñanza de esta ciencia y este material constituye el primer intento de la puesta a punto de la heurística moderna, que según su propia definición:

> "(…) trata de comprender el método que conduce a la solución de problemas, en particular las operaciones mentales típicamente útiles en este proceso. (…) Un estudio serio de la heurística debe tener en cuenta el trasfondo tanto lógico como psicológico (…) pero debe apegarse más a la experiencia objetiva. Una experiencia que resulta a la vez de la solución de problemas y de la observación de los métodos del prójimo, constituye la base sobre la cual se construye la heurística. En este estudio buscaremos, sin descuidar ningún tipo de problema, los puntos comunes de las diversas formas de tratar cada uno de ellos y después trataremos de determinar las características generales independientes del tema del problema. Tal estudio tiene objetivos prácticos; una mejor comprensión de las operaciones mentales típicamente útiles en la solución de un problema puede en efecto influir favorablemente en los métodos de la enseñanza, en particular en lo que se refiere a la matemática" (Polya, 1979)

En su libro, además de opinar sobre la enseñanza de la matemática y el rol de docentes y alumnos, explica el desarrollo de su método a través de cuatro problemas que, bajo la forma del *diálogo,* ayuda a resolver. Realiza un serio estudio de los métodos de solución y hace un recorrido histórico por la heurística, desde matemáticos como Pappus, hasta contemporáneos como Hadammard. En la última parte del texto, da al lector la oportunidad de resolver veinte problemas de diverso tipo y para cada uno de ellos ofrece sugerencias para su solución en diálogo permanente con el lector-resolutor, poniéndose en evidencia un método didáctico inductivo.

Siempre hay un doble diálogo maestro-alumno y escritor-lector, que se hace evidente, por ejemplo, en los fragmentos siguientes:

"(...) el profesor (…) tiene que estar dispuesto a emplear toda una serie de alusiones cada vez más explícitas:
¿Qué clase de triángulo quieren que aparezca? ¿Todavía no pueden determinar la diagonal? Sin embargo, decían ustedes que sabían cómo encontrar el lado del triángulo. Entonces ¿que van a hacer? ¿Podrían encontrar la diagonal si fuese el lado de un triángulo? Cuando finalmente, con su ayuda, los alumnos han logrado hacer el elemento auxiliar decisivo, el maestro debe asegurarse que ven la continuación del razonamiento antes de animarlos a lanzarse en cálculos reales." (Polya, 1979)

"ALUMNO: ¿Por dónde puedo empezar?
DOCENTE: Empiece de nuevo por el enunciado del problema. Empiece cuando dicho enunciado resulte tan claro y lo tenga tan bien grabado en su mente que pueda usted perderlo de vista por un momento sin temor de perderlo por completo.
ALUMNO: ¿Qué puedo hacer?
DOCENTE: Aislar las principales partes del problema. La hipótesis y la conclusión son las principales partes de un "problema por demostrar"; la incógnita, los datos y las condiciones son las (…)
ALUMNO: ¿Qué gano haciendo esto?
DOCENTE: Está usted preparando y aclarando detalles que probablemente estarán en juego más tarde." (Polya, 1979)

- ***Rényi: sus diálogos***

Alfred Renyi fue un importante matemático húngaro que se destacó en estadística, métodos probabilísticos, teoría del número y teoría de grafos; aplicó técnicas probabilísticas a la mecánica cuántica, a la química industrial, a la biología, a la regulación de tráfico y al control de precios. Junto a su interés por las aplicaciones de la matemática, puede verse en su obra el interés por la historia, la filosofía y la enseñanza de la matemática.

Sus ideas son expuestas en tres ensayos con forma de diálogo ficticio, en los que sus actores principales son Sócrates, Arquímedes, Herón, Hipócrates, Galileo, etc. Estos grandes diálogos son publicados por primera vez en Hungría en 1965 y en ellos Rényi batalla con problemas como la naturaleza de la matemática, la matemática pura versus la matemática aplicada, la relación de la matemática con las ciencias naturales, etc.

En el fragmento del *Diálogo Socrático sobre la Matemática*, que sigue, en el que intervienen Sócrates e Hipócrates, Renyi plantea una discusión sobre la naturaleza de la matemática:

SÓCRATES: Bien, dime entonces: ¿sabes qué es la matemática? Supongo que puedes definirla ya que deseas estudiarla.
HIPÓCRATES: Pienso que un niño puede hacerlo. La matemática es una de las ciencias y una de las más admirables.
SÓCRATES: No te he pedido que alabes a la matemática, sino que describas su naturaleza. Por ejemplo, si te interrogo sobre el oficio de los médicos me responderías que se trata de la salud y de la enfermedad y que su finalidad es curar los enfermos y preservar la salud. ¿Estoy en lo cierto?
HIPÓCRATES: Exactamente.
SÓCRATES: Respóndeme entonces lo siguiente: ¿el oficio de los médicos trata con algo existente o con algo que no existe? Si no existiesen los médicos, ¿existirían las enfermedades?
HIPÓCRATES: Seguramente y más que en la actualidad. (…)
SÓCRATES: Y si afirmo que todo oficio trata con algo que existe ¿estarías de acuerdo?
HIPÓCRATES: Completamente.
SÓCRATES: Dime ahora, mi joven amigo, ¿cuál es el objeto de la matemática? ¿Qué objetos estudian los matemáticos? (…)". (Renyi, 1989)

Sin duda los llamados diálogos socráticos de Renyi, son un ejemplo contemporáneo de las virtudes del diálogo como método expositivo de ideas, en algunos casos, de gran complejidad. Son, además, valiosas herramientas didácticas para introducir problemas básicos de la historia y posiblemente de la filosofía de la matemática y generar discusiones en torno a algunas de las cuestiones que en ellos se presentan.

- ***Kline: su pensamiento crítico***

¿Por qué Juanito no sabe sumar? El fracaso de la matemática moderna, obra del matemático norteamericano Morris Kline (1976), constituye una crítica a la influencia en la educación de lo que se llamó "la matemática moderna". La búsqueda de la formalización, que caracterizó en gran medida a la matemática de finales del siglo XIX y principios del siglo XX, tuvo una influencia importante en las reformas del curriculum matemático que se gestaron en el mundo en la década de los 50. En este libro, Kline intenta llamar la atención sobre el fanatismo con el que una gran parte de los docentes de matemática abrazó esta moda pedagógica. Su texto es una incisiva y razonada refutación de la utilización de la matemática moderna en la enseñanza, unida a un llamado a la reflexión sobre cuestiones metodológicas relacionadas con la enseñanza de esta ciencia.

En el primer capítulo titulado *"Una muestra de la matemática moderna"* ilustra irónicamente, bajo la forma de un diálogo, una clase típica basada en la nueva metodología de enseñanza:

Echemos un vistazo a una clase de matemática moderna. La docente pregunta:
« ¿Por qué es $2+3=3+2$ *?»*
Los estudiantes responden decididamente:
«Porque ambos son iguales a 5*»*
«No -reprueba la profesora-, la respuesta correcta es: porque se cumple la propiedad conmutativa de la suma.»
La siguiente pregunta es:
« ¿Por qué $9+2=11$*?»*
De nuevo los estudiantes responden a la vez:
«9 *y* 1 *son* 10 *y* 1 *más son* 11*.»*
«Falso -exclama la profesora-, la respuesta correcta es, que por definición de 2*,* $9+2=9+(1+1)$*. Pero como se cumple la propiedad asociativa de la suma,* $9+(1+1)=(9+1)+1$*. Ahora bien,* $9+1$ *son* 10*, por definición de* 10*, y* $10+1$ *son* 11 *por definición de* 11*.»*
Evidentemente, la clase no lo está haciendo muy bien, así que la docente plantea una pregunta más sencilla:
« ¿7 *es un número? » (…)*
Cansada, pero no vencida, pregunta una vez más:
« ¿Cuánto es n 2 dividido por 4?»
Un brillante estudiante dice sin dudar: «Menos 2.»
« ¿Cómo has obtenido ese resultado?», pregunta la profesora.
«Bien —dice el alumno—, usted nos ha enseñado que la división es una substracción repetida. Yo resté 4 *de* 2 *y saqué menos* 2*.»*
Podría parecer que los pobres chicos se habían hecho merecedores de algún descanso después de la escuela, pero no. Los padres, ansiosos por conocer los

progresos hechos por sus niños, también les preguntan. Un padre le pregunta a su hijo de ocho años:
« ¿Cuánto es $5+3$*?»*
Por toda respuesta obtiene que $5+3=3+5$, por la propiedad conmutativa. Asombrado, vuelve a preguntar: *«Pero, ¿cuántas son* 5 *manzanas y* 3 *manzanas?»*
El niño no comprende bien que «y» significa «más» y pregunta:
« ¿Quieres decir 5 *manzanas más* 3 *manzanas?»*
El padre se apresura a responder afirmativamente y espera atento.
«0h! -dice el niño-, no importa si son manzanas, peras o libros; en cada caso, $5+3=3+5$*.»*
Otro padre, preocupado por los progresos de su hijo en aritmética, le pregunta cómo va.
«No muy bien —responde el niño—*. La profesora se dedica a hablar de las propiedades asociativa, conmutativa y distributiva. Yo hago las sumas bien, pero a ella no le gustan(…)»* (Kline, 1976)

Podría decirse que éste es un diálogo paradigmático, una suerte de arquetipo caricaturizado con gran valor didáctico, ya que en sólo tres páginas incita a la reflexión y discusión de las ideas que expondrá en el resto de su texto. Entre ellas señala, que en el nuevo plan: *"(…) se subrayan sofisticadas versiones finales de ideas simples, mientras que se tratan superficialmente las ideas más profundas, lo que conduce necesariamente al dogmatismo y al aprendizaje mecánico de nuevas rutinas mucho más inútiles que las rutinas tradicionales"* (Kline, 1976).

♦ ***Mason, Burton y Stacey : cuestionar el propio pensamiento***

En el libro *Pensar Matemáticamente*, de particular importancia para docentes, padres y, en general, para cualquiera que esté en posición de ayudar al pensamiento de otros, Mason, Burton y Stacey (1989), incitan a la resolución de problemas centrándose en los procesos que rigen el pensamiento matemático. Paulatinamente van mostrando cómo se puede reflexionar sobre la propia experiencia, involucrando al lector en un clima de "diálogo activo" que lo lleva a formular conjeturas, discutirlas, probarlas, variarlas, etc.

En el primer capitulo del libro, se presentan los primeros problemas que incitan a reflexionar sobre los procesos fundamentales de particularización y generalización; uno de estos problemas es el denominado Cuadros del Ajedrez: "*Alguien dijo una vez que el tablero de ajedrez corriente tenía* 204 *cuadrados. ¿Puedes explicar esta afirmación?"*

En el siguiente capitulo, dedicado a las tres fases del trabajo llamadas abordaje, ataque y revisión, los autores utilizan el problema llamado Rectángulos en el tablero de Ajedrez para continuar reflexionando: "*¿Cuántos rectángulos hay en un tablero de ajedrez?"* y orientan el pensamiento con las siguientes preguntas:

- ¿ATASCADO?
- ¿Qué es lo que quieres?
- Inténtalo primero con un tablero pequeño (particulariza).
- ¿Qué forma sistemática de contar los rectángulos será la mejor?
- Examina el método utilizado para contar los cuadrados en un tablero de ajedrez, y generaliza.
- ¿Generalizar? ¡Generaliza el tablero!" (Mason et al, 1989)

Ahora la respuesta aislada de 204 para el número de cuadrados del tablero de ajedrez se ha situado en un contexto más amplio: es un caso particular de una ley más general. Una de las características interesantes de un problema es la de admitir diversas generalizaciones que extienden el marco original ya que sólo se llega a entender a fondo un resultado cuando se le enmarca en un contexto más amplio. Muchas veces esto se puede hacer eliminando o debilitando hipótesis del enunciado del problema, por ejemplo:

- ¿Por qué tiene que ser un tablero ordinario? Prueba con $n \times n$ cuadrados.
- ¿Por qué contar cuadrados? Cuenta rectángulos.
- ¿Por qué empezar con un cuadrado? Cuenta rectángulos en un rectángulo.

E incluso:

- ¿Por qué contar sólo cuadrados con lados paralelos a los del original?
- ¿Por qué trabajar en dos dimensiones? (…)" (Mason et al, 1989)

De este modo, en los diez capítulos del libro está presente la técnica del diálogo que, a lo largo del texto, moviliza al lector a trabajar con los problemas propuestos, replanteándose permanentemente sus hipótesis y estrategias.

♦ ***Semejanzas y diferencias.***

Retomando la mayéutica de Sócrates que, como señaláramos antes, consiste esencialmente en emplear el diálogo para llegar al conocimiento, cabe preguntarse: ¿qué es lo que comparten estos matemáticos contemporáneos con ella?

Se podría decir que básicamente todos tienen un método de trabajo basado en la interrogación, ya sea por razones de índole filosófica, científico-didáctica o científico- filosófica. Estos matemáticos, que en su obra responden a un modo de pensar esencialmente no dogmático, han utilizado el diálogo como herramienta de comunicación y todos, a pesar de sus diferencias, han aprovechado las virtudes del diálogo para lograr sus propósitos. Sin embargo, la finalidad de su utilización varía en cada uno de ellos:

▪ En el Menón, Sócrates, a través de un diálogo con el esclavo, intenta exponer su teoría de la reminiscencia. Aquí se utiliza el diálogo para *demostrar una teoría*.

▪ Polya, en su diálogo con el lector, muestra como funciona su método para enseñar a resolver problemas a través de diálogos ficticios entre un docente y un posible alumno. Se utilizan diálogos, dentro de un gran diálogo *para enseñar a enseñar* métodos de resolución de problemas.

▪ Renyi, a través de sus diálogos, que son ingeniosos textos de divulgación, presenta ideas de elevada complejidad a personas que no son expertas y que, de otro modo, requerirían de mucho tiempo y de una formación académica más compleja para comprenderlas. Son diálogos didácticos para *facilitar la comprensión de ideas.*

▪ Kline, a través de un diálogo figurado, muestra de modo contundente las terribles fallas de lo que llama el nuevo currículum matemático. Es un diálogo para *refutar una postura* pedagógica.

▪ Mason, Burton y Stacey ayudan a reflexionar sobre la propia experiencia matemática, involucrando al lector en un clima de "diálogo activo" que lo lleva a formular conjeturas, discutirlas, probarlas, variarlas, etc. Es un diálogo para *cuestionar el propio pensamiento*.

Estas cinco finalidades diferentes (demostrar, enseñar a enseñar, facilitar la comprensión, refutar, cuestionar el propio pensamiento) que se desprenden del análisis de la obra de los autores mencionados antes, de ninguna manera agotan las posibilidades de aplicación del diálogo como recurso en la enseñanza de la Matemática.

El siguiente diálogo, que proponemos como recurso didáctico para el nivel secundario de enseñanza, podría contribuir a reforzar el razonamiento inductivo o preparar el terreno hacia la demostración por inducción. A pesar de ser una propuesta mucho más modesta que las analizadas antes, intenta ser una invitación a los docentes de matemática a utilizar este valioso recurso, que implica una contribución a la formación del alumno que trasciende el terreno matemático:

<u>Juan</u>: Profesor, me dijeron que si escribo un número cualquiera, luego utilizando las mismas cifras escribo otro y hago la diferencia entre ellos el número que resulta es siempre un múltiplo de 9, ¿es verdad?

<u>Profesor</u>: Trajiste una buena inquietud pero, en lugar de contestarte, te propongo analizarlo con un compañero.

<u>Ana</u>:....Parece que es cierto, si escribo 6723 otro con las mismas cifras puede ser 3672, hago 6723 – 3672 = 3051 y como 3051:9 = 339 quiere decir que 3051 es múltiplo de 9.

<u>Profesor</u>: Y si escriben 7632 ó 2367?

<u>Juan</u>: A ver, hagamos las cuentas. Sí da, obtenemos 909, 4356, que son todos múltiplos de 9.

<u>Ana</u>: Pero ¿no será que ocurre justo para los números de 4 cifras? No logro darme cuenta. ¿Será así para cualquier otro número? ¿por qué funciona esto?

<u>Profesor</u>: ¿Por qué no prueban con números de dos cifras?

Juan prueba con los siguientes números:

57, 75	75-57 = 18 y 18 = 9·2
17, 71	71-17 = 54 y 54 = 9·6
85, 58	85-58 = 63 y 27 = 9·3

<u>Juan</u>: ¡En estos casos también da! Hasta para 99-99 = 0

<u>Ana</u>: ¡Es increíble!, yo hice algunos para 3 cifras y también me da, pero ¿por qué?

<u>Profesor</u>: Les sugiero que primero observen los números de dos cifras, que en general tiene la forma $a.b$.

<u>Juan</u>: Entonces el otro que puedo escribir será $b.a$, donde a y b pueden tomar valores entre 1 y 9. Pero, ¿qué pasará si hacemos $a.b - b.a$? ¿Cómo lo hacemos con letras?

<u>Ana</u>: Recuerda que podemos escribir a $a.b$ de la forma $a.10 + b$ y podemos escribir a $b.a$ como $b.10 + a$ entonces tendremos que:

$a.10+b-(b.10+a)=(a.10+a)+(b-10.b)=9.a-9.b=9.(a-b)$ y este número es siempre un múltiplo de 9! Pero, me quedó una duda: ¿por qué dices que a y b tienen que tomar valores entre 1 y 9? ¿no puede ser 0 alguno de ellos?

Juan: Sí, claro, no lo incluí porque en ese caso uno de los números sería de una cifra, por ejemplo 50 y 05, y yo estaba hablando de números de dos cifras. De todos modos $50-5=45$ es múltiplo de 9, o sea que también vale.

Profesor: Bueno, pero con esto probaron que el enunciado es válido para *todos los números de dos cifras, ¿cómo seguirían?*

Juan: Hagamos lo mismo para los de tres cifras, ahora tendremos, números del tipo $a.b.c$, o sea: $a.10^2+b.10+c-(c.10^2+a.10+b)=90.a-90.b-90.c=9.(10.a-b-c)$, que claramente es múltiplo de 9!

Ana: Sí, pero $(c.10^2+a.10+b)$ no es el único que podríamos escribir, tendremos también el $a.c.b$, $b.a.c$, $b.c.a$ y $c.b.a$. Hagamos dos cada uno y veamos qué pasa:

$$a.10^2+b.10+c-(a.10^2+c.10+b)=.................=9.(b-c)$$
$$a.10^2+b.10+c-(b.10^2+a.10+c)=.................=9.10.(a-b)$$
$$a.10^2+b.10+c-(b.10^2+c.10+a)=.................=9.(11.a-10b-c)$$
$$a.10^2+b.10+c-(c.10^2+b.10+a)=.........................=9.11.(a-c)$$

Profesor: Van bien, podemos decir que con todos los números de tres cifras también es cierto, ya que de este modo han cubierto todos los casos posibles.

Juan: Seguro que pasará lo mismo con los de 4 cifras, y los de 5…

Ana: No pensarás hacer todos los casos.

Juan: ¡Podríamos armar un programa con la computadora!

Ana: Sí, eso te daría muchos números pero nunca todos, algo debe haber que no vemos.

Profesor: Les doy una ayuda: observen qué les quedó dentro del paréntesis en todos los casos en que sacaron factor común $a.b$ ó c.

Juan: Quedó una diferencia que parece ser siempre múltiplo de 9.

Ana: Tienes razón, siempre tendremos a cada una de las cifras multiplicada por números de la forma 10-1, 10-10, 100-10, …., 10-1000,…… , siempre es una diferencia entre potencias de 10.

Profesor: Bien, en general pueden escribirlas como 10^m-10^n

Juan: Es verdad, bastaría con que probemos que los números del tipo 10^m-10^n son siempre múltiplos de 9. Veamos cómo probarlo.

Ana: ¿Qué casos tenemos?, podría ser $m=n,\quad m>n \quad ó \quad m<n$

$$Si\ \ m=n \qquad 10^m-10^n=0$$

$$Si \;\; m > n \qquad 10^m - 10^n = 10^n\left(10^{m-n} - 1\right)$$

$$Si \;\; m < n \qquad 10^m - 10^n = 10^m\left(1 - 10^{n-m}\right)$$

En el primer caso, el resultado es 0 que es múltiplo de 9, pero en los otros dos casos deberíamos probar que toda potencia de 10 disminuida en una unidad lo es, es decir $10^k - 1$ es múltiplo de 9 cualquiera sea el número natural k. ¿Cómo lo probamos?

Juan: Empecemos por darle valores a k para ver qué pasa:

$$Si \;\; k=1 \qquad 10^1 - 1 = 9 = 9 \cdot 1 \quad es\ cierto$$

$$Si \;\; k=2 \qquad 10^2 - 1 = 99 = 9 \cdot 11 \quad es\ cierto$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$Si \; k = n \qquad 10^n - 1 = 1\underbrace{000.....0}_{n} = \underbrace{999.....9}_{n} = 9.\underbrace{111....1}_{n} \quad también\ es\ verdad$$

Profesor: Muy bien, los felicito, están transitando el camino que en un futuro los conducirá a abordar el *Principio de Inducción Completa* de gran importancia en la demostración de propiedades relativas a los números naturales.

Consideraciones finales

Desde hace algún tiempo, se ha comenzado a pensar el aula como un tipo de contexto social específico y al diálogo como uno de los mediadores del proceso que allí ocurre. Las estrategias dialógicas contribuyen a construir conocimientos y códigos compartidos y ayudan a establecer un "universo discursivo" que favorece la comprensión de los temas que se enseñan. A esta perspectiva socio-lingüística, debe sumársele la psicológica, ya que el lenguaje es una manifestación de algo más profundo, del contexto mental al que se integran las concepciones, los significados y los marcos de referencia. (Amos, 2002).

Si como docentes concebimos la educación como una ayuda para que el que aprende adquiera herramientas de creación de significados y reconstruya la realidad, la utilización del diálogo permite, no sólo la apropiación de la cultura sino su participación en ella, la ampliación de la comprensión del contenido, de las personas y del conocimiento, ya que cuando los saberes de uno se enfrentan con los de otros es cuando la estructura que sostiene las certidumbres comienza a desmoronarse. Lleva también a cuestionar las jerarquías y las concepciones tradicionales de la autoridad en la escuela, a tolerar y apoyar la diversidad, a no descansar en supuestos sobre respuestas correctas y verdades últimas, a no apoyarse en esfuerzos aislados sino en relaciones comunicativas mutuas y recíprocas (Burbules, 1999).

Generar el espacio del diálogo y adentrarse en él, conduce al docente a transitar por un terreno a veces difícil e inseguro, que implica una modificación en su metodología de trabajo, una concepción distinta del conocimiento, del aprendizaje, del que enseña y del que aprende, situación que para algunas personas puede resultar amenazante.

Este trabajo ha intentado mostrar, a partir de los ejemplos anteriores, que a pesar de las dificultades que puede acarrear su utilización, el diálogo es un recurso potente, que permite reflexionar, exponer, analizar y criticar ideas, en muchos casos, de gran profundidad. Sus ilimitadas posibilidades de utilización en el aula, lo convierten en una herramienta didáctica fundamental en la enseñanza y el aprendizaje del quehacer matemático.

Bibliografía

Amos, S. (2002). *Teachers' questions in the science classroom*. En Amos, S. & Booham, R. (eds.). *Aspects of teaching secondary science. Perspectives on practice*. Routledge. London.

Bachelard, G. (1985). *La formación del espíritu científico*. Siglo XXI, México.

Boyer, C.B. (1986). *Historia de la matemática*. Alianza Universidad. Madrid.

Brehier, É. (1956). *Historia de la Filosofía.* Sudamericana. Buenos Aires.

Burbules, N. (1999). *El diálogo en la enseñanza. Teoría y práctica*. Amorrortu, Buenos Aires.

Edwards, D Y Mercer, H. (1988). *El conocimiento compartido: El desarrollo de la comprensión en el aula*. Paidós-MEC, Buenos Aires

Ferrater Mora, J. (1969). *Diccionario de filosofía.* Sudamericana. Buenos Aires.

Kline, M. (1976). *¿Por qué Juanito no sabe sumar? El fracaso de la matemática moderna*. Siglo XXI. Madrid.

Mason, J-Burton, l-Stacey(1989). *Pensar Matemáticamente*. Labor. Buenos Aires.

Platón (2004). *Menon*. Editorial Universitaria, Bogotá.

Polya. G. (1979). *Cómo plantear y resolver problemas*. Editorial Trillas. México.

Renyi, A. (1989). *Dialogo socrático sobre la matemática*. Revista de Educación Matemática, 4 (3) Unión Matemática Argentina. Córdoba. Argentina.

Renyi, A. (1990) *Diálogo sobre las aplicaciones de la matemática.* Revista de Educación Matemática, 5 (1) Unión Matemática Argentina. Córdoba. Argentina.

Rocerau, María Cristina. Profesora de Matemática y Especialista Investigación Educativa. Es profesora responsable de Didáctica de la Matemática del Profesorado en Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Mar del Plata, Argentina. Co-directora del Grupo Investigación Educativa y Secretaria Regional de la Olimpíada Matemática Argentina. rocerau@mdp.edu.ar

Vilanova, Silvia Lucía. Licenciada en Educación y Magister en Psicología Social Profesora responsable de Didáctica General y Especial de los Profesorados en Ciencias de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, directora del Grupo Investigación Educativa y co-responsable del Área Pedagógica de la Facultad. svilano@mdp.edu.ar

Oliver María Isabel. Profesora de Matemática. Es docente en el nivel secundario, jefe de trabajos prácticos de la Asignatura Algebra en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales e integrante del Grupo Investigación Educativa. moliver@mdp.edu.ar

Vecino, María Susana. Profesora de Matemática, Especialista en Investigación Educativa y Magister en Informática Educativa. Es profesora de Algebra Lineal I, Jefa del Centro de Cómputos de la UNMDP e Integrante del grupo Investigación Educativa de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. susana@mdp.edu.ar

Valdez, Guillermo. Profesor de Matemática y Especialista en Investigación Educativa. Docente en el nivel secundario, responsable de las asignaturas Prácticas Docentes I y II del Profesorado en Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, integrante del grupo Investigación Educativa y Secretario regional Olimpíada Matemática Ñandú. gvaldez@mdp.edu.ar