UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2009, Número 18, páginas 15– 28
ISSN: 1815-0640

Formas de argumentación en el cálculo de la función derivada de la función *f*(*x*)= x^2 sin usar la definición por límites

Vicenç Font Moll

Resumen

En este trabajo se analizan dos secuencias de actividades para calcular la derivada de la función $f(x) = x^2$ en las que no se usa la definición de la función derivada como límite de las tasas medias de variación. El objetivo es analizar las formas de argumentación que se utilizan en cada una de ellas.

Abstract

In this work two sequences of activities are analyzed to calculate derived from function $f(x) = x^2$ in which the definition of the function derived like limit of the average rates of variation is not used. The objective is to analyze the argumentation forms that are used in each one of them.

Resumo

Neste trabalho analisam-se duas seqüências de atividades para calcular a derivada da função $f(x) = x^2$ onde não se usa a definição da função derivada como limite das taxas médias de variação. O objetivo é analisar as formas de argumentação que se utilizam em cada uma delas.

1. Introducción

En este trabajo se analizan dos secuencias de actividades para calcular la derivada de la función $f(x) = x^2$ en las que no se usa la definición de la función derivada como límite de las tasas medias de variación. El objetivo es analizar las formas de argumentación que se utilizan en cada una de ellas. En la primera parte se analiza una secuencia de actividades que se inicia con una inducción, continúa con una abducción y termina con una deducción. En la segunda parte, se analiza una secuencia de actividades en las que se comienza con la abstracción reflexiva facilitada por el uso de software dinámico y se sigue con una deducción. Por último, se comentan las inferencias metafóricas asociadas al uso de software dinámico.

2. La investigación sobre el discurso y la argumentación en el aula de matemáticas

Actualmente ha aumentado considerablemente el interés en investigar el discurso y la argumentación en el aula de matemáticas, ya que, se ha considerado que lo que se dice sobre las tareas matemáticas es tanto o más importante que las propias tareas. En los congresos internacionales hay grupos de trabajo específicos sobre este tópico, por otra parte, prestigiosas revistas han dedicado números monográficos al tema (por ejemplo el volumen 46, números 1-3, del año 2001 de la revista *Educational Studies in Mathematics*) e incluso han aparecido revistas internacionales específicas sobre este tema como es el caso de la *Lettre de la Prueve* especializada en la enseñanza y el aprendizaje de la prueba matemática. Los estudios sobre el discurso y la argumentación en la educación matemática se han abordado desde diversas perspectivas, entre las cuales queremos destacar sólo dos:

- Las que se han centrado en el discurso del docente (y también del alumno) cuando utiliza un razonamiento matemático para la demostración de teoremas en el salón de clase. Lo que ha interesado en este tipo de estudios es cómo se consigue la validez del argumento. Por ejemplo, los trabajos de Bell (1976) y De Villiers (1993) que versan sobre las funciones de la demostración en la actividad matemática (además de verificación, la de explicación y sistematización, entre otras) o los más recientes de Ibáñez (2001) e Ibáñez y Ortega (2002) que profundizan en esta perspectiva.

- Las investigaciones sobre el uso de metáforas en el discurso del profesor y de los alumnos. Recientemente, varios autores, Font y Acevedo (2003); Lakoff y Núñez, (2000); Presmeg, (1997), han puesto de manifiesto el importante rol que juega la metáfora en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

En este trabajo tendremos en cuenta, sobre todo, la primera de las dos perspectivas acabadas de citar. De entrada, nos centraremos en analizar cómo se prueba que la derivada de la función $f(x) = x^2$ es $f\,'(x) = 2.x$ en dos secuencias de actividades, para después ver el papel que juegan los procesos metafóricos en la justificación dada en la segunda de dichas secuencias de actividades.

En la evolución y desarrollo de las teorías matemáticas hay que considerar, como mínimo, tres estadios sucesivos, correspondientes a tres diferentes niveles de precisión y rigor en el concepto de prueba. En el primer estadio, llamado informal o ingenuo, se prueban los enunciados de la teoría, pero no se dice ni de dónde parte la prueba ni cuáles son los procedimientos admisibles para probar. En el segundo estadio, llamado axiomático, se determina el punto de partida de la prueba, eligiendo ciertos enunciados de la teoría como axiomas y exigiendo que todos los demás sean probados a partir de ellos, aunque sigue sin explicitarse cuáles son los procedimientos, reglas o medios de prueba admisibles. En el tercer y último estadio, llamado formalizado, el concepto de prueba está completamente precisado y explicitado, tanto en lo que respecta al punto de partida de la prueba como a los medios de prueba permitidos. El tercer estadio es más propio de los lógicos que de los matemáticos, mientras que los dos primeros estadios son los propiamente matemáticos.

En este trabajo se consideran dos secuencias de actividades, pensadas para alumnos del bachillerato español (17 años), en las que se justifica que la derivada de la función $f(x)=x^2$ es $f´(x)=2.x$, sin usar para ello la definición de la función derivada como límite de las tasas medias de variación. De entrada, nos situamos en la primera de las perspectivas comentadas sobre la investigación del discurso y la argumentación del aula, es decir nos interesamos en cómo se consigue la validez del argumento. Con relación a los tres estadios de desarrollo de la prueba, nos situamos en el primer estadio (informal o ingenuo). En dicho estadio caben muchos tipos de pruebas y de combinaciones de estos tipos (por ejemplo: ausencia de prueba ya que se considera evidente, razonamiento mediante un ejemplo, razonamiento mediante un ejemplo cuidadosamente seleccionado, razonamiento mediante un ejemplo genérico, razonamiento lógico a partir de proposiciones conocidas, inducción, inducción completa, abducción, deducción, etc.). En los apartados siguientes argumentaremos que la validez del argumento en la primera secuencia analizada se consigue por medio de una combinación de inducción abducción y deducción, mientras que en la segunda se observa una combinación de una evidencia empírica, resultado de una abstracción reflexiva, y una deducción.

3. Inducción, abducción y deducción en el cálculo de la derivada de la función *f*(x)= x^2

Antes de trabajar el texto del apartado 3.1 los alumnos saben que la derivada de la función en un punto es la pendiente de la recta tangente y la han calculado geométricamente en algunos puntos con actividades como la siguiente (Bujosa et al., 2003, p. 85), pero aún no se ha definido como $f´(a)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Act. 26: Dada la función $f(x)=x^2$ y las rectas tangentes a la función en $x=-1$, $x=0$, $x=2$.
a) Calcula $f´(-1)$, $f´(0)$, $f´(2)$.
b) Halla la ecuación de la recta tangente en $x=2$.

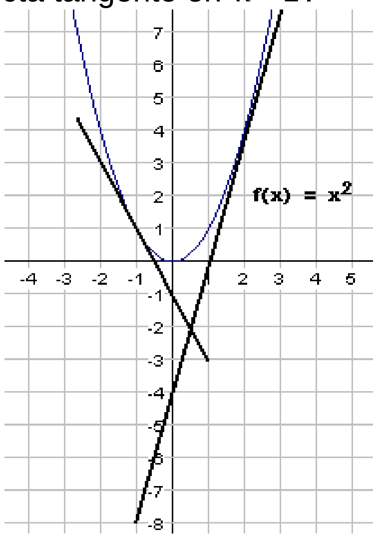

Figura 1

3.1. Inducción

A continuación siguen unos párrafos de un libro de texto de Bachillerato (Bujosa el al., 2003, pp. 91-92)

Si ahora quisiéramos hallar la recta tangente a la función $f(x)=x^2$ en los puntos de abscisa: $x=-7$, $x=-12$, $x=-15$, $x=10$, $x=21$, $x=40$, deberíamos calcular:

$$f'(-7),\ f'(-12),\ f'(-15),\ f'(10),\ f'(21),\ f'(40).$$

Pero antes de hacerlo, completaremos la tabla siguiente con los valores de las derivadas de la función $f(x)=x^2$ para los diferentes valores de la abscisa que ya se han calculado en las actividades 15 y 26:

Abscisa	-1	0	1	2	3	4
Derivada	-2	0	2	4	6	8

Act. 34.

a) A partir de la tabla halla una fórmula que, sabiendo el valor de la abscisa, nos permita calcular la derivada de la función $f(x)=x^2$ para dicho valor de la abscisa.

b) Utilizando esta fórmula halla $f'(-7)$, $f'(-12)$ y $f'(40)$.

En la actividad anterior se pudo observar que para la función $f(x)=x^2$, la función $y=2.x$ es una función que asocia cada abscisa x con la derivada de la función en este punto. Esta función se llama función derivada de $f(x)$ y normalmente se representa por $f'(x)$

Función	Función derivada
$f(x)=x^2$	$f'(x)=2.x$

Conocer la función derivada es un método indirecto muy útil cuando se ha de calcular la derivada de la función en un punto determinado. En efecto, para calcular $f'(a)$ basta seguir el proceso siguiente:

1) Calcular la función derivada $f'(x)$.
2) Sustituir la x por a en la fórmula de la función derivada.

La función derivada también se puede utilizar para hallar un punto de la función $f(x)$ en el cual la derivada tenga un valor determinado.

Ejemplo:

Si queremos saber en qué punto la función $f(x)=x^2$ tiene una recta tangente que forme un ángulo de 45º con el eje de abscisas, basta buscar el valor de la abscisa tal que la derivada en este punto sea 1:

$$f\,'(x) = 2.x$$

$$2.x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$f\,'(1/2) = 1$$

Act. 35. Dada la función $f(x) = x^2$

a) Para qué valor de la abscisa la derivada vale 16?

b) Para qué valor de la abscisa la recta tangente tiene pendiente 3?

c) Para qué valor de la abscisa la recta tangente es paralela a la recta $y = 6.x + 54$ y.

d) Halla la ecuación de la recta tangente a la función en $x = 5$.

Antes de esta secuencia de actividades, los alumnos sabían que la derivada en un punto era la pendiente de la recta tangente a la función en el punto. Después de que el alumnado haya utilizado la función derivada de la función $f(x) = x^2$ en la actividad 34, y no antes, se define la función derivada como la función que a cada valor le hace corresponder la pendiente de la recta tangente.

A continuación se remarca la idea de que la derivada de una función en un punto es un *número* que nos da la pendiente de la recta tangente a la función en ese punto, mientras que la función derivada es una *función* que nos da, para cada valor de la abscisa, la pendiente de la recta tangente. Y que, muchas veces, se habla de la derivada sin precisar si es la derivada de la función en un punto o es la función derivada, en estos casos el contexto es el que nos indicará cual es el significado que se le da.

En la actividad 34a el alumno ha de realizar una generalización por inducción (empírica/incompleta). Se halla un resultado, $f\,'(x) = 2.x$, que parece que es cierto, pero no sabemos por qué lo es. De todas maneras, nos permite formular la conjetura de que $f\,'(x) = 2.x$. Se trata de un proceso de inducción clásica que permite formular hipótesis.

3.2. Abducción

La abducción es un razonamiento que tiene la siguiente forma:

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \underline{q \qquad\;} \\ p \end{array}$$

Si se supone que $f\,'(x) = 2.x$ (p) es cierta, tenemos un procedimiento para hallar la recta tangente $y = m_a + n_a$ en cualquier punto de abscisa $x = a$. Es decir, la recta tangente en el punto de abscisa $x = a$ será $y = 2.a.x - a^2$ (q). Por tanto, con un graficador que permita dibujar funciones con un parámetro, representamos en la misma pantalla la función $f(x) = x^2$ y la familia de funciones $y = 2.a.x - a^2$, al variar el valor de a, hemos de observar que siempre se tiene la tangente en $x = a$.

"Funcions i gràfics" (http://www.xtec.es/%7Esmanriqu/funcgraf/index.htm) es un programa gratuito de muy fácil manejo que permite representar funciones con parámetros.

En las gráficas que siguen se observa la función $f(x) = x^2$ y la recta tangente en $x = 1{,}6$ y en $x = -1{,}2$. El alumno puede variar el valor del parámetro y observa un invariante: "*siempre se obtiene la recta tangente*".

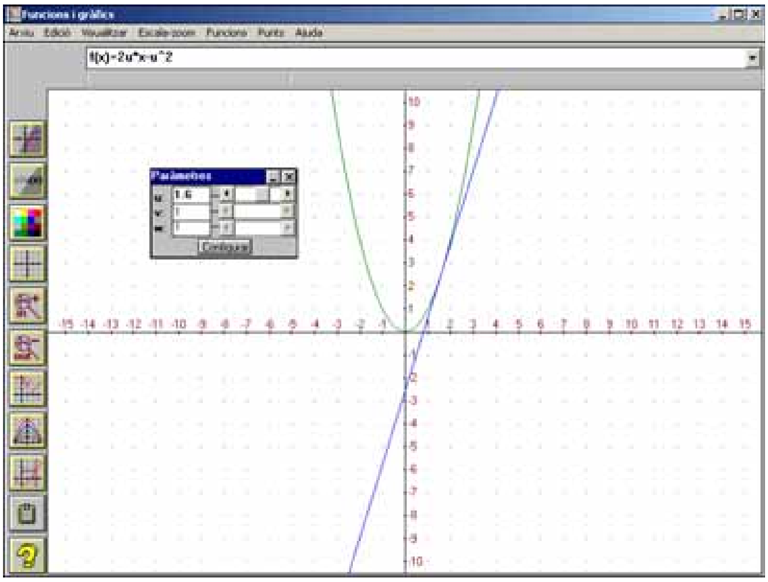

Figura 2

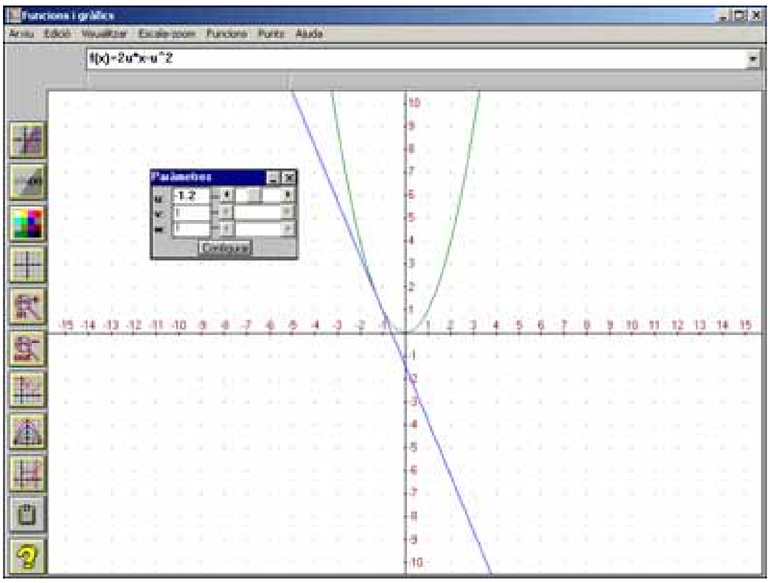

Figura 3

El razonamiento por abducción no es un modo de razonamiento válido desde el punto de vista de la lógica formal, pero es importante para la producción de conocimiento. Ahora la conjetura conseguida por inducción nos parece más sólida ya que ha resistido la posible falsación de sus consecuencias inferenciales. De todas maneras, seguimos sin poder dar una demostración de que la derivada de la función $f(x) = x^2$ es $f\,'(x) = 2.x$.

Entendido el proceso de abducción de esta manera, se puede entender que dicho proceso incorpora un tipo de inducción probatoria, en el sentido de que los diferentes casos particulares de (q) que hemos observado nos llevan a considerar probado que (q) será cierto en general y de aquí se abduce que (p) también es cierto.

3.3. Más abducción

Podemos intentar una nueva falsación de la conjetura. Para ello partimos de la conexión que hay entre los máximos, los mínimos y la recta tangente (Rondero, Karelin y Tarasenko, 2004; Karelin, Rondero y Tarasenko, 2007).

La idea básica es la siguiente: para las funciones tales que en cada punto de su gráfica pasa sólo una recta L, respecto de la cual la gráfica misma está por encima o por debajo de ella y no tiene otros puntos de intersección, si se resta de la función, la ecuación de la recta L, que corresponde a un punto x_0 se tiene una nueva función cuyo mínimo o máximo esta precisamente en x_0. Este método nos ayuda a relacionar la derivada de una función en un punto dado con los puntos mínimos y máximos. Consideremos las funciones para las cuales en cada punto de su gráfica existe una y sólo una recta que pasa por el punto y no tiene otros puntos comunes con la grafica y, además, está ubicada arriba o abajo con respecto de la recta. A la clase formada por estas funciones le llamamos *D* y, para cada función f de *D* llamaremos $T(f)$ a la clase de tales rectas para esta función.

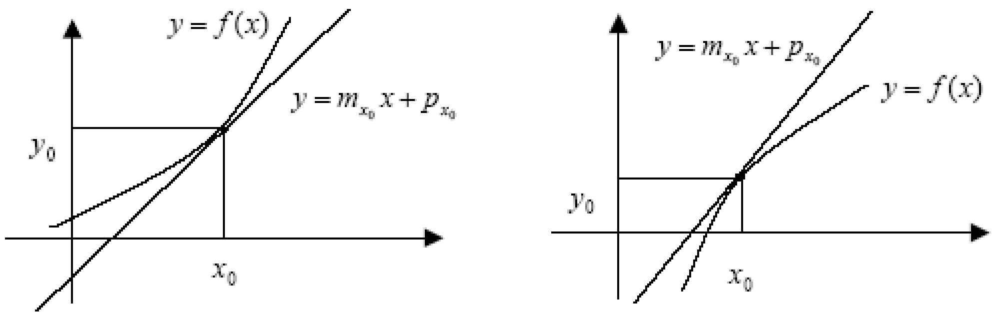

Figura 4

Consideremos una función $y = f(x)$ de este tipo y un punto $(x_0, f(x_0))$. Una recta $R(x_0, f(x_0)) = m_{x_0}.x + p_{x_0}$ es la recta de la clase $T(f)$ en el punto $(x_0, f(x_0))$ para la función $y = f(x)$ si y sólo si la función $y = F(x)$,

$F(x)=f(x)-[m_{x_0}x+p_{x_0}]$ tiene un punto mínimo o un punto máximo en $x=x_0$.

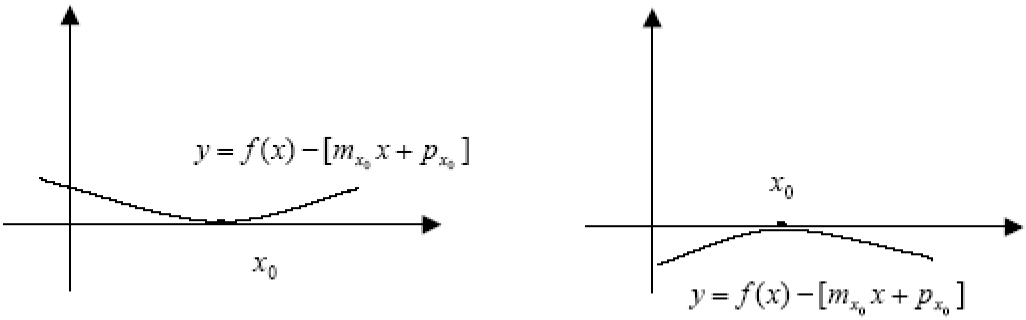

Figura 5

Si suponemos que $f\,'(x)=2.x$ es cierta (p), tenemos un procedimiento para hallar la recta tangente $y=m_{x_0}x+p_{x_0}$ en cualquier punto de abscisa $x=x_0$. Es decir, la recta tangente en el punto de abscisa $x=x_0$ será $y=2.x_0.x-x_0{}^2$. Por tanto, la función $F(x)=f(x)-[m_{x_0}x+p_{x_0}]$ en este caso será $F(x)=x^2-(2.x_0.x-x_0{}^2)$ y debería presentar un mínimo en $x=x_0(q)$.

Con el mismo graficador se representa la función $F(x)=x^2-(2.x_0.x-x_0{}^2)$ y se varia el valor de x_0. Se observa que la función siempre presenta un mínimo en $x=x_0$. En las gráficas que siguen se observa que la función $F(x)$ presenta un mínimo para $x_0=2{,}4$ y en $x_0=-3{,}4$. El alumno puede variar el valor del parámetro y observa un invariante: la función siempre presenta un mínimo cuando la abscisa es el parámetro.

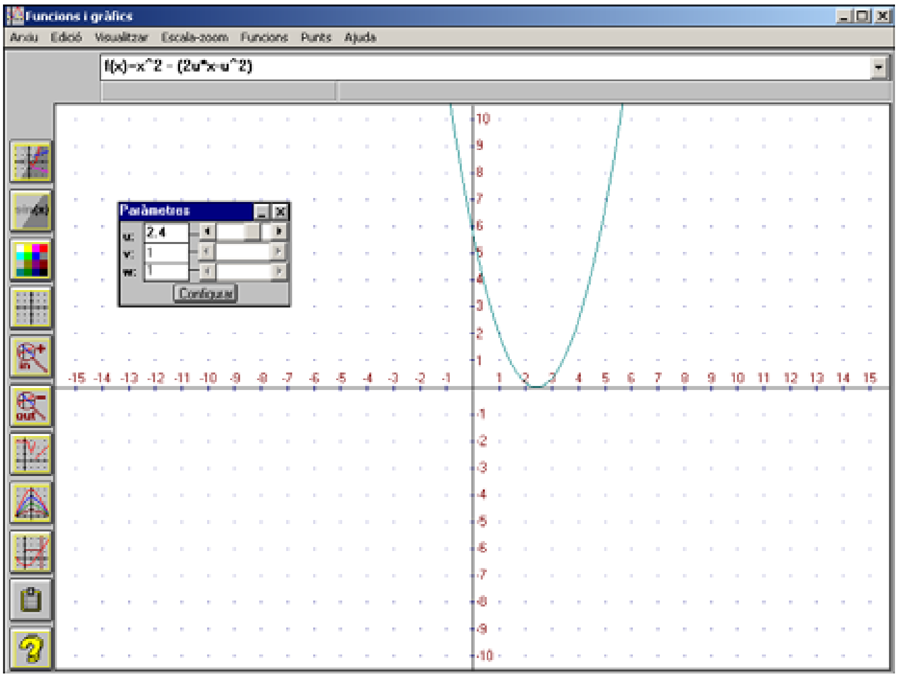

Figura 6

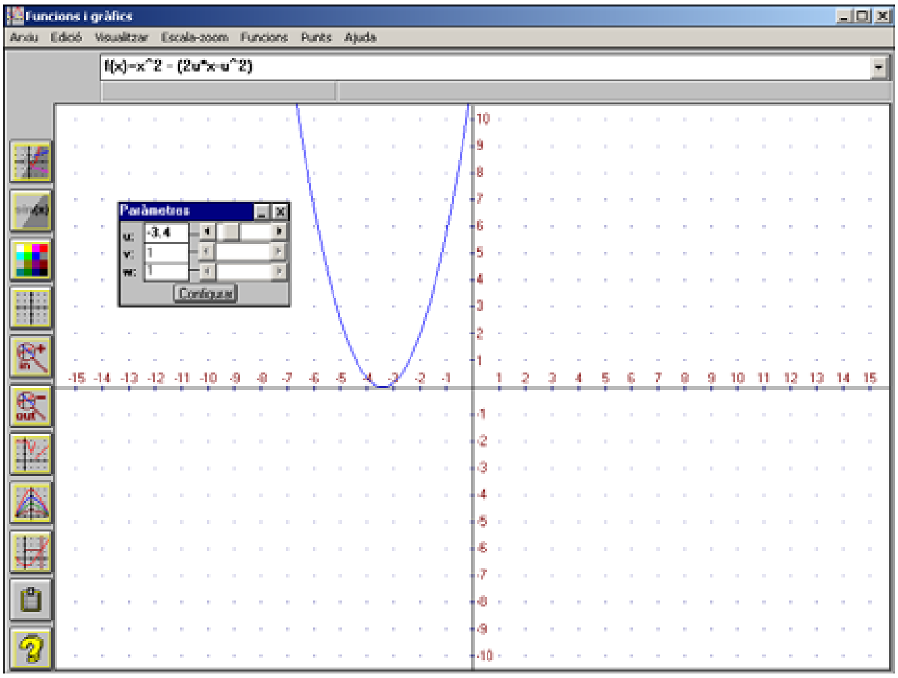

Figura 7

3.4. Deducción

La abducción anterior es más potente que la primera ya que nos da un camino para una demostración deductiva. Basta hacer un razonamiento deductivo que permita demostrar que la función $F(x) = x^2 - (2.x_0.x - x_0{}^2)$ efectivamente presenta un mínimo en $x = x_0$. La recta $y = 2.x_0.x - x_0{}^2$ es la recta tangente a la función $f(x) = x^2$ en $x = x_0$.

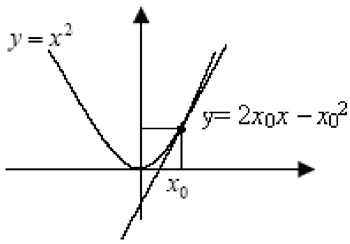

Figura 8

Pues en caso de no serlo cortaría a la gráfica además en otro punto y entonces el mínimo de la función $F(x) = x^2 - (2.x_0.x - x_0{}^2)$ sería un valor que estaría en el intervalo formado por las abscisas de los dos puntos de corte:

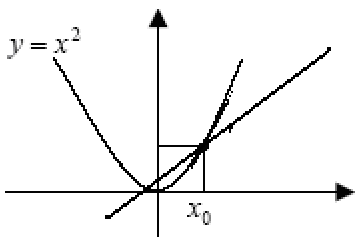

Figura 9

Por lo tanto, si $y = 2.x_0.x - x_0^{\ 2}$ no es la recta tangente
(*) la $F(x) = x^2 - (2.x_0.x - x_0^{\ 2})$ no presentaría un mínimo en $x = x_0$.
Ahora bien,
(**) la función $F(x) = x^2 - (2.x_0.x - x_0^{\ 2})$ presenta un mínimo en $x = x_0$.

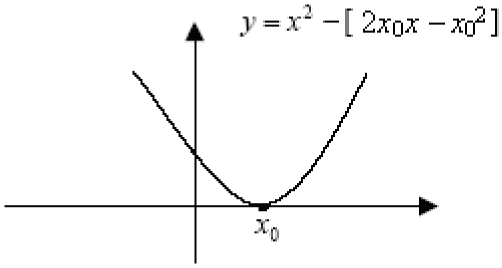

Figura 10

En efecto, por la definición del punto mínimo local en x_0 debe cumplirse la siguiente desigualdad: $x^2 - (2.x_0.x - x_0^{\ 2}) \geq 0$ cuando $|x - x_0| < \varepsilon$;
(***) $x^2 - 2.x_0.x + x_0^{\ 2} \geq 0$ cuando $|x - x_0| < \varepsilon$.

Si $x = x_0$ la expresión (***) es igual a 0.

Si $x < x_0$, $x + z = x_0$, entonces
$x^2 - 2.x_0.x + x_0^{\ 2} = (x_0 - z)^2 - 2.x_0.(x_0 - z) + x_0^{\ 2} = x_0^{\ 2} - 2.z.x_0 + z^2 - 2.x_0.x_0 + 2.x_0.z + x_0^{\ 2} = z^2$
, y $z^2 \geq 0$.

Si $x > x_0$, $x - z = x_0$, entonces
$x^2 - 2.x_0.x + x_0^{\ 2} = (x_0 + z)^2 - 2.x_0.(x_0 + z) + x_0^{\ 2} = x_0^{\ 2} + 2.z.x_0 + z^2 - 2.x_0.x_0 - 2.x_0.z + x_0^{\ 2} = z^2$
, y $z^2 \geq 0$.

Por tanto, $y = 2.x_0.x - x_0^{\ 2}$ es la recta tangente a la función $f(x) = x^2$ en $x = x_0$ y $f\,'(x) = 2.x$ es la función derivada.

4. Abstracción reflexiva y deducción en el cálculo de la derivada de la función *f*(*x*)= *x*^2^ sin usar la definición por límites

Antes de trabajar la secuencia de actividades descrita en el apartado 3.1, los alumnos saben que la derivada de la función en un punto es la pendiente de la recta tangente y la han calculado geométricamente en algunos puntos con actividades como la actividad 26 comentada anteriormente (Bujosa et al., 2003, p. 85), pero aún no se ha definido como $f\,'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$. También se ha definido la función derivada como la función que a cada valor le hace corresponder la pendiente de la recta tangente.

4.1. Abstracción reflexiva

Se propone a los alumnos la exploración de la construcción que sigue, realizada con el Cabri (Font, Godino y Contreras, 2008). Como resultado de sus acciones los alumnos han de llegar a descubrir que la traza es la parábola $f(x) = x^2$ y el siguiente invariante: en la parábola $f(x) = x^2$ la recta tangente en el punto *P* corta al eje de ordenadas en un punto *C* tal que la longitud del segmento *OC* es igual la ordenada de *P*.

Después han de simbolizar este invariante de la manera siguiente:

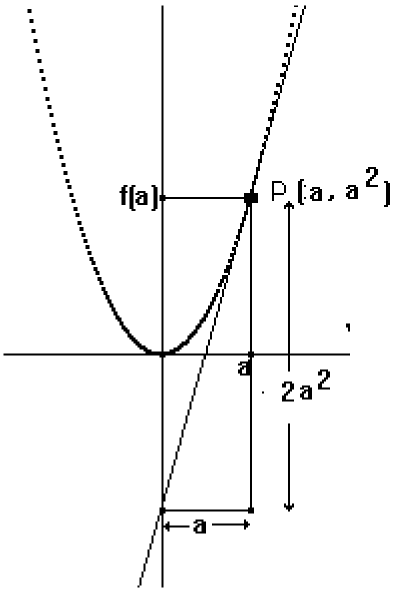

Figura 11

Por último, han de demostrar que la función derivada de $f(x) = x^2$ es $f'(x) = 2.x$. La emergencia de la propiedad "en la parábola $f(x) = x^2$ la recta tangente en *P* corta al eje de ordenadas en un punto *C* tal que la longitud del segmento *OC* es la ordenada de *P* " es el resultado de una abstracción diferente a la empírica, a saber, de una abstracción "reflexiva" (en términos de Piaget). Se trata de un proceso que, a partir de la reflexión sobre el sistema de acciones y su simbolización, llega a encontrar relaciones invariantes y las describe simbólicamente. Esto quiere decir que, en este proceso, determinadas propiedades y relaciones son señaladas y la atención se focaliza sobre ellas, lo cual pone de manifiesto que ganan un cierto grado de independencia respecto de los objetos y situaciones con los que inicialmente están asociados.

Este tipo de abstracción produce un resultado que aparece a partir de la acción y que gana sentido y "existencia" a partir de ella. Hay que destacar que se llega a una generalización intensiva (lo que no varía) a partir de (1) ignorar aspectos de lo concreto (lo que varía) y (2) de considerar que lo que es válido para un objeto (variable en esta caso, puesto que estamos trabajando con un programa dinámico) es válido para todos, es decir se razona con elementos genéricos (dinámicos en este caso).

4.2. Deducción

Esta secuencia de actividades está a mitad de camino entre el problema de la tangente y su inverso. No es exactamente el problema de la tangente, puesto que aquí ya la tenemos construida, ni es el problema inverso ya que sabemos la expresión simbólica de $f(x)$. Esta construcción con ordenador permite las acciones de los alumnos y les facilita encontrar una condición que cumplen todas las tangentes (utilizando el triángulo formado por la ordenada, la tangente y la subtangente, o bien otro semejante).

Construcciones de este tipo permiten que los alumnos calculen funciones derivadas sin necesidad de utilizar límites, siempre que se haya trabajado previamente la interpretación geométrica de la derivada en un punto. En efecto, la simbolización de esta condición en el caso de la parábola lleva a establecer una especie de casi-ecuación diferencial (entendidas en sentido amplio) que permite calcular $f'(x)$ sin necesidad de utilizar el cálculo integral.

$$f'(x) = \frac{2.f(x)}{x} \qquad\qquad 6.f'(x) = \frac{2.x^2}{x}.6 \qquad\qquad f'(x) = 2.x$$

A continuación (figura 12) sigue la respuesta de una alumna en la que se puede observar dicho proceso deductivo. En esta producción podemos observar que el invariante observado como resultado de la abstracción reflexiva es el inicio de un proceso deductivo.

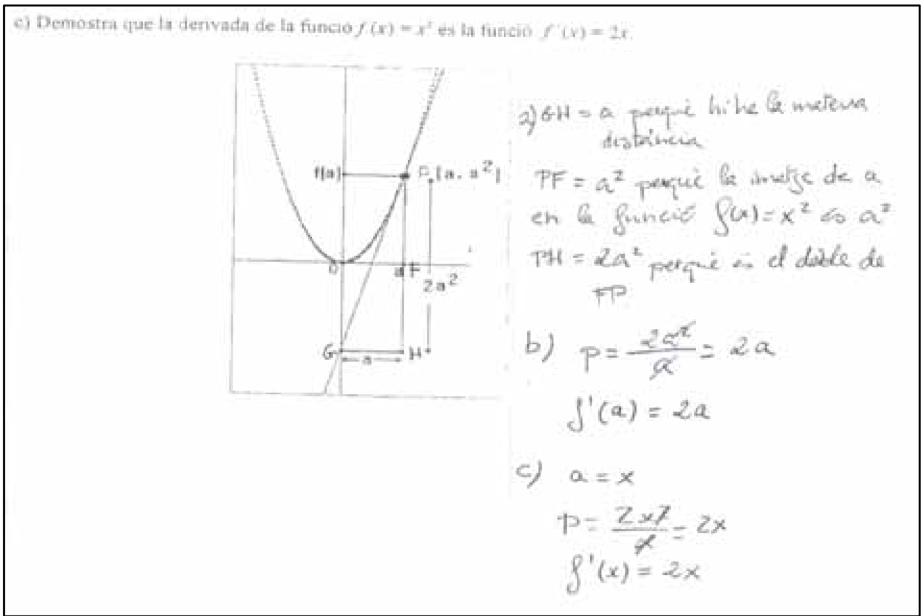

Figura 12

5. Procesos metafóricos

En la secuencia de actividades anterior se usa un software dinámico para facilitar la generalización que se pretende. Ahora bien, el uso de dicho software dinámico produce otros efectos, uno de los más importantes es que estructura implícitamente las gráficas funcionales en términos de la metáfora siguiente:

"La gráfica de una función se puede considerar como la traza que deja un punto que se mueve sobre un camino (la gráfica)" (Font y Acevedo, 2003).

Los graficadores dinámicos y el discurso que se hace cuando se utilizan facilitan, aunque sea de manera inconsciente, estructurar las gráficas como trazas de puntos. El uso, explícito o implícito, de las metáforas dinámicas del tipo la "gráfica es un camino" tiene sus ventajas, pero también sus inconvenientes como se muestra en la investigación explicada en Font (1999). En dicha investigación se describe una situación de enseñanza-aprendizaje en la que alumnos de 17 años utilizan software dinámico con el objetivo de ayudarles a entender que la recta tangente es la recta a la cual se aproximan las rectas secantes. En este contexto, (Font, 1999, p. 122) se observó que el hecho de que el profesor utilizara de manera inconsciente un discurso dinámico producía la siguiente dificultad en los alumnos:

> *(...) observamos que había alumnos que, cuando movían el punto A, pensaban que el nuevo punto continuaba siendo el punto A y que la nueva recta tangente era la misma que antes pero con diferente inclinación. De hecho, es como si estructurasen la situación en términos de una persona que se mueve (punto A) con un saco en la espalda (recta tangente) por una carretera que primero sube y después baja (gráfica) y considerasen que la persona y el saco siempre son los mismos a pesar de estar en diferentes lugares y tener diferente inclinación"*

Este fenómeno también está documentado en otras investigaciones, por ejemplo en Bolite Frant et al. (2004).

Bibliografía

Bell, A. W. (1976). *A study of pupils' proof-explanations in mathematical situations*. Educational Studies in Mathematics 7, 23-40.

Bolite Frant, J. et al. (2004). *Reclaiming visualization: when seeing does not imply looking*. TSG 28, ICME 10, Denmark.
[http://www.icme-organisers.dk/tsg28/].

Bujosa, J. M, Cañadilla, J. L., Fargas, M. y Font, V. (2003). *Matemàtiques 2*. Castellnou. Barcelona.

De Villiers, M. (1993). *El papel y la función de la demostración en Matemáticas*. Epsilon. 26, 15-30.

Font, V. (1999). *Procediments per obtenir expressions simbòliques a partir de gràfiques. Aplicacions a les derivades*. Tesis doctoral. Universitat de Barcelona.

Font, V. y Acevedo, J. I. (2003). *Fenómenos relacionados con el uso de metáforas en el discurso del profesor. El caso de las gráficas de funciones*. Enseñanza de las Ciencias 21(3), 405-418.

Font, V., Godino, J. D. y Contreras, A. (2008). *From representations to onto-semiotic configurations in analysing the mathematics teaching and learning processes*. En: Radford, L., Schubring, G. y Seeger, F. (eds.), *Semiotics in*

Mathematics Education: Epistemology, Historicity, Clasroom, and Culture, 157-173. The Netherlands: Sense Publishers.

Ibáñez, M. J. (2001). *Un ejemplo de demostración en Geometría como medio de descubrimiento*. Suma 37, 95-98.

Ibáñez, M. J. y Ortega, T. (2002). *La demostración en el currículo: una perspectiva histórica*. Suma 39, 53-61.

Karelin, O., Rondero, C. y Tarasenko, A. (2007). *Propuesta didáctica sobre la construcción de la recta tangente sin el uso de la derivada*. En: Martínez, G. (ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 19, 386-391. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C: México.

Lakoff, G. y Núñez, R. (2000). *Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being.* Basic Books: New York.

Presmeg, N. C. (1997). *Reasoning with metaphors and metonymies in mathematics learning*. En: English, L. D. (ed.) *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors, and images*, 267-279. Lawrence Erlbaum Associates: Mahwah, New Jersey.

Rondero, C., Karelin, O. y Tarasenko A. (2004). *Métodos alternativos en la búsqueda de los puntos críticos y derivadas de algunas funciones.* En: Díaz Moreno L. (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 17, 821-827. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.: México.

Vicenç Font Moll (vfont@ub.edu) . Universitat de Barcelona.Facultat de Formació del Professorat.
Es Profesor de Didáctica de la Matemática de la Universitat de Barcelona Ha sido director de la revista de profesores Biaix editada por la Federació d'Entitats per a l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya (FEEMCAT) Ha publicado varios libros de texto de matemáticas de Secundaria y varios artículos en torno a la Educación Matemática. Sus líneas de trabajo son el análisis didáctico de procesos de enseñanza-aprendizaje, la epistemología de la didáctica de las matemáticas, la didáctica del análisis y la formación de profesores de matemáticas.