UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
Septiembre de 2009, Número 19, páginas 22-33
SSN: 1815-0640
firma invitada

Actividades Geométricas en la enseñanza. Análisis desde el punto de vista cognitivo.

Ismenia Guzmán Retamal

La Geometría es una de las ramas de las Matemáticas que ha evolucionado mucho entre el siglo XIX y comienzos del XX, debido entre otros, al nacimiento de las geometrías no euclidianas y a los esfuerzos de axiomatización de Hilbert en busca de la completitud del sistema.

Estas evoluciones como es natural han impactado los sistemas escolares produciendo como consecuencia un cambio de enfoque en la enseñanza de la geometría.

De este modo el enfoque clásico de la geometría euclidiana caracterizada por la rigidez de las figuras cambia a un enfoque dinámico de la enseñanza de geometría centrado en los movimientos en el nivel elemental y en las transformaciones isométricas en la enseñanza secundaria.

Contribuye a este cambio de enfoque el desarrollo de la informática a través de la creación de softwares para la construcción de figuras, como por ejemplo el Cabri geométrico.

En este artículo consideraremos un punto de vista cognitivo para el análisis de la enseñanza de la geometría apoyándonos principalmente en trabajos de R. Duval, en relación con el rol de las figuras y el razonamiento, además analizaremos a modo de ejemplo el tratamiento de la unidad teselando el plano, de un texto chileno frecuente de enseñanza media.

Como *actividades geométricas*, consideraremos aquellas que ofrecen diferentes tipos de tareas tales como: visualización, construcción y demostración; además de las exigencias cognitivas que deben ponerse en juego y en consecuencia las habilidades que permiten desarrollar.

Las investigaciones sobre este tema, en general analizan las figuras en relación a los objetos matemáticos particulares que ellas permiten representar, por ejemplo, triángulos isósceles, triángulos cualesquiera, paralelogramos, cuadriláteros o alguna propiedad matemática.

"La enseñanza de la geometría puede analizarse desde tres puntos de vistas, considerando las nociones y conocimientos geométricos introducidos, las modalidades de su presentación y desde el punto de vista de las actividades que esta enseñanza propone desarrollar" Duval-Guzmán (2006). En consecuencia en la enseñanza de la geometría son esenciales las actividades:

- *Visualización: Ver* con los ojos una figura.
- *Construir* una figura con instrumentos: lápiz, para dibujar a mano alzada, escuadra, regla, compás u otros materiales.

- *Deducir* a partir de informaciones dadas en la figura, nuevas informaciones utilizando propiedades conocidas.

La actividad de Visualización es Cognitiva

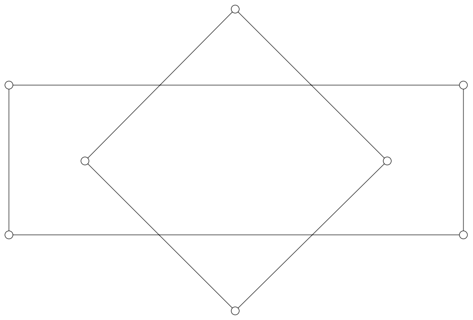
<u>Una figura señala Duval (2003) asocia siempre dos tipos de representación, por una parte, una configuración de formas que constituye todo lo visual (para algunos, imagen o dibujo) y por otra parte, un enunciado que designa las propiedades que la configuración visual representa.</u>

Toda configuración tiene dos características, la primera, distinguir las relaciones entre las formas (sus dimensiones, no sus características) y la posibilidad de construir estas formas mediante algún instrumento.[1]

Matemáticamente, una figura está en sinergia con estos dos tipos de representación, teniendo prioridad las hipótesis dadas en el enunciado por sobre la evidencia visual.

Del punto de vista cognitivo estos dos tipos de representaciones dependen de funcionamientos diferentes e independientes, la asociación entre ellas resulta conflictiva pues, predomina lo visual por sobre las hipótesis codificadas en la configuración.

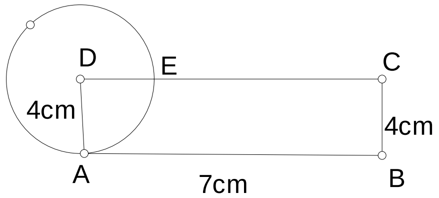
Un ejemplo que ilustra la independencia de estos dos tipos de funcionamiento, y la complejidad de su articulación en una configuración, se puede apreciar en la siguiente pregunta [2]*¿Qué formas ves tu en la configuración siguiente?*



Las respuestas obtenidas son muy diferentes, pero en general se impone lo perceptivo, confrontar resultados en Anexo.

Otro ejemplo,[3] es el siguiente problema:

"La configuración está dibujada a mano alzada y las medidas reales están anotadas en ella. Se ha dibujado una circunferencia y un rectángulo. Se pide encontrar la medida del segmento EC".



---

[1] El uso de una plantilla o patrón no permite trazar líneas ni segmentos, sino solamente bordes.
[2] Pregunta de una encuesta francesa de evaluación nacional en 6eme citada en Duval (2003):
[3] Dado por Duval en Conferencia en PUCV 2000.

Para resolver este problema, sin medir, no hay que ver el rectángulo, sino fijarse que los segmentos AD y DE son radios de la circunferencia.

Estos ejemplos, como señala Duval, dejan en evidencia dos grandes dificultades asociadas a la complejidad del concepto de figura, a saber:

- La complejidad del acto de ver o percepción visual de las figuras. (Existen diferentes maneras de ver).
- La articulación entre lo que se distingue visualmente de la configuración y las propiedades u objetos geométricos mencionados en el enunciado o en las explicaciones verbales;en otras palabras, el pasaje entre lo que se ve y lo que se dice y cuál de estas operaciones comanda a la otra.

En general, en las propuestas de enseñanza de la geometría, a nivel de escuela, se ignoran estos dos problemas y por el contrario cuando estas propuestas se refieren a “concepto imagen”, “concepto figural” o “figura se opone a dibujo” las consideran como representaciones mentales y entonces ellas no abordan lo que podría ser la mayor dificultad del aprendizaje de la geometría.

Actividad geométrica de Construcción de una figura con instrumentos

El procedimiento de construcción exige la elaboración de un programa de construcción, es decir escribir una secuencia de instrucciones que permitan a otra persona reproducirla. Esto requiere de un análisis de la figura en función de los instrumentos que se utilizarán. Para describir el programa de construcción es necesario tener en cuenta dos cosas:

1) Un orden en la ejecución de los trazados según las propiedades y las características del instrumento.
2) Una designación clara de las unidades figurales, para lo cual se necesita emplear los términos que describen las características del objeto a construir.

Las unidades figurales designan las formas y de acuerdo a sus dimensiones se designan D1, (segmentos de rectas, rectas especiales o no), por D2 (triángulos, cuadriláteros especiales o no, ángulos…) por D3 (cubos, paralelepípedos). Y por D0 los puntos.

Las actividades de construcciones geométricas son fundamentales en el aprendizaje de la geometría, pero en general la enseñanza de la geometría en Chile no le ha dado el énfasis suficiente, privilegiando actividades no necesariamente geométricas como las mediciones con instrumentos o mediante cálculos numéricos.

En lugar de enfatizar este tipo de actividades que además del problema de la construcción exige la descripción del proceso, claro está teniendo en cuenta los niveles de exigencia de acuerdo a la edad de los alumnos. De este modo se pierde la ocasión de favorecer la precisión del vocabulario, el cuidado con la secuencia de los pasos de construcción y el proceso de verificación posterior.

Actividad geométrica de deducción a partir de una figura

La tarea de deducir propiedades a partir de una figura es una actividad esencial para favorecer la toma de conciencia de lo que significa justificar lo que se afirma, expresar por qué se afirma aquello, y ello lleva consigo también el tomar conciencia de la necesidad de no aceptar afirmaciones sin comprender la razón, o realizar o aceptar declaraciones sin control.

Deducir una conclusión es establecer una veracidad (o una falsedad) de un enunciado (falsedad en el sentido matemático, no necesariamente un error), o plantear una conjetura. El no demostrar la veracidad o validez de ese enunciado impide obtener un teorema.

En la enseñanza de la geometría es necesario considerar diferentes niveles de exigencia en relación con la validación de conjeturas o de propiedades a partir de una figura. Las figuras han tenido un rol esencial en el desarrollo de la geometría. A través del tiempo se han distinguido las pruebas no formales apoyadas en las propiedades de la figuras (por visualización o construcción con instrumentos) y las pruebas formales que se apoyan en una axiomática formal (Hilbert). La geometría de Euclides ha utilizado estos dos tipos de demostraciones, las no formales por ejemplo en las demostraciones de los teoremas de congruencia (mediante la traslación paralela).

Las pruebas no formales y las formales requieren dos formas de razonamiento diferentes y para dejarlas en evidencia el matemático suizo Gonseth, según Kuzniak&Houdement (2000), ha distinguido diferentes marcos geométricos, Geometría Natural, la Geometría Axiomática Natural y la Geometría Axiomática formal.

La Geometría Natural, se fundamenta en objetos físicos, concretos existentes en la realidad se representan por dibujos o figuras concretas. La validación de las relaciones que se pueden obtener se validan mediante acciones y manipulación de instrumentos, tales como escuadra, reglas graduadas, compás, transportador u otros materiales. La medición es una estrategia usual, así como el uso de plantillas, pliegues entre otros. De modo que el razonamiento ligado a este tipo de actividades es el pragmático.

En la geometría axiomática natural, por ejemplo la geometría euclidiana, sus objetos son ideales, pero hacen referencia a la realidad, entonces ellos son representaciones de objetos reales y concretos, por ejemplo una circunferencia es el modelo de ruedas. La validación de las relaciones obtenidas entre ellos, se realiza utilizando definiciones y teoremas, es decir se recurre a instrumentos que pertenecen a un marco teórico. El razonamiento en juego aquí es la deducción lógico matemática.

La geometría axiomática formal contiene objetos ideales sin ninguna referencia a la realidad y su sistema de validación es absolutamente formal. Evidentemente esta geometría no se adapta a la enseñanza en el sistema escolar.

Las distintas estrategias geométricas en relación a las figuras Duval las resumen en el siguiente cuadro.

El funcionamiento de una Figura en las diversas estrategias geométricas

Diferentes relaciones en la figura	Tratamientos cognitivos correspondientes	Función epistemológica
Aprehensión discursiva Propiedades matemáticas que se pueden ver son las dadas en las hipótesis solamente y aquellas que se pueden deducir Aprehensión secuencial Las propiedades imponen un orden de construcción que depende de las propiedades del instrumento elegido; y a veces se puede constatar la imposibilidad de algunas construcciones.	Razonamiento Deductivo Para explicitar otras propiedades se utiliza la estructura bipartita: definiciones y teoremas Planificación según el instrumento Impone trazados auxiliares que no pertenecen a la figura que se pide construir. Impone una selección consciente: es necesario concentrarse únicamente en las propiedades del instrumento (como los ladrillos para las construcciones).	Demostración Modelo Acciones sobre el representante y los resultados constatados corresponden a la situación matemática o lo que puede ser observado a una escala de tamaño mucho más grande
Aprehensión Operatoria Toda figura dada por un enunciado o posible de construir a partir de ese enunciado, puede ser modificada materialmente o mentalmente de diferentes maneras, (se puede ver otra cosa) Aprehensión perceptiva Son las formas que se imponen al primer golpe de vista, con frecuencia de manera aparentemente no modificable (nada más que ver)	Modificación Figural Hay diferentes tipos de operaciones para modificar una figura, por ejemplo, Dividirla en "pedazos" para reconfigurarla. O agrandarla o deformarla con espejos, introducirle o quitarle profundidad. Integración inconsciente En función de leyes gestálticas visuales de trazados, leyes que dan lugar a la representación de objetos imposibles (Escher)	Heurística Una de las operaciones de modificación visual de la figura de partida muestra la idea de una solución o la justificación de una conjetura. Reconocimiento e identificación Se reconoce una forma en plano o en el espacio y a través de este reconocimiento se identifica un objeto.

La construcción de una figura implica una aprehensión secuencial de trazados auxiliares, por ejemplo prolongaciones que después pueden borrarse, cuando la figura pedida queda construida. Construir no solamente es trazar sino también borrar.

La aprehensión secuencial (de propiedades a movilizar para construir), cambia según los instrumentos utilizados. Así el número de operaciones de trazado (equivale al número de instrucciones) y los trazos (definitivos y auxiliares) depende del instrumento utilizado. Lo que significa que privilegiar un instrumento puede llevar a un equívoco y entonces cambiar el instrumento puede ser una variable didáctica.

Duval precisa que existen dos ideas claves para todo análisis cognitivo del aprendizaje de la geometría:

1) La comprensión e iniciativa en geometría aparecen solamente cuando comienza una SINERGIA entre los tres tipos de actividades ya mencionadas. La actividad geométrica más que cualquier otra actividad matemática requiere de una COORDINACIÓN DE REGISTROS.
2) La geometría moviliza al menos los dos registros multifuncionales comunes y familiares; el lenguaje natural para expresar las propiedades, designar objetos y el figural donde ocurre el reconocimientos de formas (gestálticas). Por ejemplo se puede distinguir entre una visualización geométrica y una icónica.

Desde el punto de vista didáctico surgen preguntas:

(1) ¿Se debe distinguir entre las nociones de *Dibujo y Figura*? *¿Forma y Figura?* y entre las actividades *¿Construir y Dibujar?*

(2) ¿Qué relación existe entre un *trabajo sobre los objetos reales* (plantillas o patrones, maquetas y sólidos) y e*l desarrollo de competencias para llegar a analizar las figuras* cuando se enfrenta un problema?

(3) ¿Cómo *"analizar", "leer", "mirar" una Figura en geometría* de modo de utilizarla en una estrategia de prueba, en el marco de la resolución de un problema?

(4) Una pregunta que no se ha planteado antes es la siguiente ¿Cómo situar una figura geométrica con respecto a otros tipos de visualización por ejemplo son las figuras geométricas representaciones analógicas, es decir permiten realizar pasos de razonamientos?

Algunas consideraciones respecto a estas preguntas y palabras utilizadas con frecuencia (sin preocupación de sus significados).

El término razonamiento es un término suficientemente amplio que cubre todas las formas de discurso geométrico: definiciones, propiedades, enunciados de conjeturas, argumentaciones, deducciones, justificaciones, demostraciones.

Respecto a la pregunta (1)

En general los sustantivos, dibujo, figura y forma se confunden y así mismo los verbos construir y dibujar. Pero estrictamente preciso Duval deberían distinguirse:

Un *dibujo* es un trazado concreto, en cambio una Figura es objeto ideal que representa conocimientos geométricos asociados mentalmente.

Forma es lo que visualmente es reconocido y en este sentido una Figura es una forma reconocida como representando un objeto teniendo en cuenta sus dimensiones y sus características importantes.

Dibujar es una actividad que se realiza a mano alzada, en cambio la actividad de C*onstruir* necesita el uso de instrumentos y se distinguen diferentes tipos de construcciones, según los instrumentos.

Respecto a la pregunta (2).

Esta pregunta se refiere a la representación de un espacio que implica considerar tanto los gestos del cuerpo como la orientación respecto a la ubicación y además la representación de un espacio que implica cambios de dimensión en la manera de mirar los objetos.

La pregunta (3) hace referencia al rol heurístico de las figuras y la pregunta (4) hace referencia al razonamiento como otro tipo de visualización en cuánto representación analógica.

De aquí parecen necesarias otras precisiones ¿Qué es VER? ¿Cómo se aprende a mirar una figura? ¿Qué hay que ver en una figura geométrica?

Una figura en estado inicial o en estado modificado da lugar a muchas miradas posibles; algunas identifican la figura global o una subfigura o una super figura.

Las figuras geométricas si bien son un registro de representación multifuncional no son un lenguaje, de modo que no tienen sintaxis como los enunciados, por lo que no hay reglas para aprehenderlas ni para descomponerlas.

“El tratamiento que permite ver que una figura de partida es suficiente o que necesita modificaciones mediante una construcción complementaria, puede hacerse por dos vías, 1) la doble aprehensión perceptiva / operatoria y 2) la aprehensión discursiva. La aprehensión perceptiva/operatoria se sitúa en el registro propiamente visual con sus leyes de organización y de identificación de formas, identificables por dimensiones D1, D2 o D3. La aprehensión discursiva, es todo lo que se pueda decir, partiendo de las propiedades dadas”. Duval (2003)

a) La utilización heurística de las figuras (independiente del modo de construcción), ayuda al desarrollo de las capacidades de aprehensión operatoria y no solamente de las perceptivas o discursivas de las figuras. Lo que implica tareas específicas centradas por ejemplo en la variación de las figuras de partida según un problema dado.

La identificación visual de las unidades figurales D2, predominantes como también las configuraciones visuales D1-D0, necesitan tareas de restauración de figuras y no solamente tareas de construcción y reproducción.

Habría también un trabajo análogo para el pasaje de D3 a D2, por ejemplo descomponer un cubo en cuadrados, implica un trabajo de descubrimiento de la variación de la sección determinada por planos

También un trabajo con la construcción de figuras imposibles, por ejemplo la de un cuadrilátero con tres ángulos rectos, permitiría ayudar a la toma de conciencia sobre las propiedades geométricas y las condiciones internas de una configuración.

Por otra parte desde el punto de vista cognitivo la enseñanza de la geometría reposa sobre la articulación de dos registros multifuncionales como ya mencionamos, y el funcionamiento cognitivo que permite esta articulación exige la movilización simultánea o en alternancia de conversiones directas o inversas como también tratamientos específicos en cada registro (Duval 2005) Esta exigencia no tiene nada de natural, sin embargo es propia de la matemática y por lo tanto requiere de situaciones apropiadas que favorezcan este aprendizaje y en consecuencia se favorezca el desarrollo del razonamiento.

El razonamiento, se presenta en general en dos formas, una ligada a la exploración mediante acciones y otra ligada al lenguaje; es decir existe un razonamiento de carácter pragmático y otro de carácter intelectual. Dentro de este último todavía hay que distinguir aquellos ligados al contenido y al sentido común, como las argumentaciones y aquellos ligados a un marco teórico como las demostraciones matemáticas, estos tipos de razonamientos se desarrollan muy bien en relación con los marcos geométricos mencionados, de la geometría natural que se adapta bien a la enseñanza elemental y de la geometría axiomática natural mejor adaptada para la enseñanza secundaria o de liceo.

En relación a textos escolares en Chile

Analizaremos el texto de la editorial Marenostrum 2001, Matemática Activa Primer año medio, por ser de uso frecuente. Nos referiremos al capítulo 6.

En este texto al parecer los autores han tomado dos decisiones didácticas.

En primer lugar la geometría es introducida como un estudio de la realidad, es decir por actividades artesanales o artísticas. Los objetos estudiados no son contenidos matemáticos (relaciones, propiedades, conceptos,..) sino formas tales que se reconocen, se les ensambla o se las particiona como se hace en ciertas prácticas profesionales o en prácticas ornamentales: mosaicos, baldosas, motivos,… Y las secuencias de actividades van a intentar quedarse el mayor tiempo posible en este marco.

En seguida, la presentación de las actividades se hace bajo el modo de una explicación descriptiva la más próxima posible al discurso ordinario. Los capítulos no se presentan como una secuencia de fichas de actividades, Ellas se presentan como un texto se que lee como siguiendo una pauta, aún si el texto es en parte una descripción de un desarrollo de las actividades. Los ejercicios están al final del capitulo. Una característica estilística importante merece ser destacada. El texto privilegia el planteo de preguntas que no son ni problemas ni instrucciones para realizar actividades sino preguntas para controlar u orientar las estrategias de observación o de reflexión en curso. Estas preguntas exteriorizan un poco el “lenguaje interior” en el curso de la estrategia.

Se trabaja con unidades visuales 2D, para ensamblarlas, superponerlas o descomponerlas solamente en otras unidades visuales 2D. Esto quiere decir que la descomposición dimensional en una unidad visual 1D necesaria en la introducción de la geometría para introducir las propiedades geométricas fundamentales o definir las propiedades de las unidades visuales 2D, es decir las figuras de base, son evitadas al máximo. Notemos por otra parte que las actividades de manipulación sólo se pueden hacer con unidades visuales 2D y no con unidades visuales 1D.

El lenguaje matemático es reducido al mínimo. Esto concierne tanto al recurso de un vocabulario matemático técnico como el recurso a las notaciones simbólicas y aún al cálculo.

La actividad de aprendizaje solicita una observación y descubrimiento. Su objetivo no es la formulación de conjeturas en vista de actividades de validación. Cada secuencia de actividades se termina por un enunciado, al cual se le da el estatus de teorema. Pero estos enunciados aparecen como la formulación de diferentes observaciones o verificaciones (solicitadas en la secuencia de actividades) y ninguna justificación se solicita.

Nos podemos preguntar hasta qué punto la decisión de mantener en prioridad a las unidades visuales 2D, a las manipulaciones y operaciones que ellas permiten, así como una descripción no teórica de lo que ellas permiten descubrir. Hay un contraste impresionante entre el capítulo 5 sobre el reconocimiento de formas congruentes y el capítulo 6 sobre pavimentar el plano.

Comenzaremos por el capítulo 6 que presenta una perfecta realización de este programa. Al contrario en el capítulo 5 se ve aparecer para describir los resultados, actividades para la introducción de notaciones simbólicas formales sin preparación, y también se recurre a codificaciones de puntos para describir la traslación de formas 2D. Todos los problemas que surgen en la enseñanza de la geometría en la escuela básica pueden estar en este tipo de decisiones didácticas.

Teselando el plano (pp. 160-182) (Unidad 6)

Este capítulo, de una veintena de páginas, trata de la pavimentación o embaldosado del plano a través de la fabricación de mosaicos. Los pavimentos con paralelogramos, con triángulos, luego con polígonos regulares son introducidos primero bajo la forma de actividades de fabricación de mosaicos (161-166). Enseguida se aborda la cuestión más general de pavimentos con cuadriláteros de cualquier forma, polígonos no convexos y polígonos curvilíneos. (167-171).

Finalmente, la cuestión de pavimentos con diversas formas se presenta a través de un estudio de mosaicos de Escher (172-177). Dos páginas de ejercicios y tres páginas de problemas de ingenio completan el capítulo.

Cada parte está organizada en torno de una actividad de fabricación de baldosas en cartón sobre un modelo de un polígono particular, de manera de poder enseguida con ellas cubrir el plano. El trabajo en grupo está organizado de manera de poder confrontar diferentes posibilidades eventuales de ensamblajes y entonces obtener una convicción. Luego se desprende un resultado con el estatus de teorema. El más notable, es aquél cuya introducción da lugar a un trabajo de experimentación, es el de los polígonos regulares, se afirma que solamente tres permiten pavimentar el plano (165-166). Se tiene entonces un esquema de actividades: manipulación, observación, resultado o conjetura.

Esta organización compromete una decisión importante concerniente a la naturaleza cognitiva de las actividades geométricas que se van a pedir a los alumnos. Todas las actividades están enteramente centradas en el reconocimiento únicamente de unidades visuales 2D, puesto que en ellas se trata de ensamblajes de formas poligonales. Esta decisión implica tres consecuencias sobre el tipo de actividad cognitiva que es solicitada por las tareas y entonces sobre las competencias que pueden ser desarrolladas.

(1) Las únicas descomposiciones de formas requeridas son recortes de formas 2D (polígonos convexos o no convexos) en otras formas 2D (triángulos) que se consideran como unidades de ensamblajes para pavimentar el plano*. Esto quiere decir que ninguna descomposición dimensional de formas 2D en unidades visuales 1D (rectas, segmentos, lados…) es requerida*.

(2) Las descomposiciones de formas 2D en otras formes 2D pueden realizarse materialmente. Ellas permiten manipulaciones físicas. Este tipo de manipulaciones físicas son sistemáticamente solicitadas, ya sea para actividades de acercamiento, ya sea para establecer una conjetura, o bien para sacar una convicción.

Las actividades geométricas resultan ser entonces análogas a un trabajo artesanal de fabricación de mosaicos.

(3) Para hacer estas actividades geométricas *no es necesario recurrir a propiedades matemáticas*, como el paralelismo o la perpendicularidad, que exigen una descomposición dimensional de formas porque ellas portan sobre la relación entre dos unidades visuales 1D. Basta poder discriminar formas poligonales, es decir pequeños ladrillos o baldosas.

Esta presentación de las actividades geométricas a través de actividades artesanales de fabricación de mosaicos se acompaña de otra decisión en la manera de presentar estas actividades. Es un texto abundantemente ilustrado que se propone a leer y no una ficha que descompone una tarea en varias subtareas y tablas a llenar. Este manual presenta dos características.

(1) El texto es una narración descriptiva que acompaña la actividad de fabricación que se supone que el alumno hará. Ella está dirigida por preguntas que marcan una nueva etapa en la tarea y cuya función es orientar la atención. Por otra parte, el no hace un llamado a ningún término técnico salvo los nombres de diferentes tipos de polígonos. También los teoremas se refieren a una formulación descriptiva.

(2) La parte correspondiente a las «figuras» que son tanto imágenes como “figuras geométricas” representa en promedio casi la mitad de la presentación. Ahora bien, esta ilustración consiste esencialmente en imágenes que se refieren a baldosas que se manipulan en la fabricación de mosaicos y no en figuras geométricas en el sentido clásico: un ensamblaje de trazados 1D con un código de propiedades o de de valores numéricos. La única excepción es el trabajo de experimentación sobre pavimentación con polígonos regulares (p. 165).

La presentación de este capítulo considera la práctica ordinaria de dos registros multifuncionales, que son el lenguaje común y las imágenes. Parece más cercano a la redacción de un artículo de revista que a una página de un manual de estudio.

Hay sin embargo una excepción cuando se trata de determinar cuáles son los polígonos regulares que permiten una pavimentación del plano. La estrategia propuesta sigue una estrategia experimental, identificar datos que, aquí, son las medidas de los ángulos de diferentes polígonos regulares se transforman las medidas en valores con la ayuda de una fórmula simple se organizan los valores numéricos así obtenidos en una tabla de variación, en el cual la variable independiente es el número de lados de un polígono.

Para interpretar la tabla de variación se limita a dos tipos de observaciones. Por una parte, se nota que esos valores numéricos son números enteros para tres polígonos solamente y que para los otros ellos decrecen sino que son más grandes que 2.

Se menciona en dos líneas que la justificación matemática exige un mínimo de "técnica algebraica y también analítica" (p.166.). La originalidad de las decisiones tomadas en este capítulo está en la presentación de las relaciones entre la geometría y la realidad. Ella no aparece como una actividad independiente en la cual se aplicarían resultados a situaciones reales. Ella es una actividad implicada en un trabajo de fabricación artesanal o de creación artística. Esto da lugar entonces a actividades a la vez concretas e imaginativas. Pero esto plantea también una pregunta respecto a la explicitación matemática de las propiedades y de su justificación.

Porque esto supone por una parte que se pasa de una descomposición/ ensamblajes de formas 2D a 2D a una desconstrucción dimensional 2D a 1D y por otra parte que no se limita a la utilización corriente del lenguaje a imágenes. Esto representa un doble salto cognitivo importante. Los autores parecen haber elegido de quedar en desmedro de esta doble exigencia para la construcción de conocimientos geométricos (p. 166).

Conclusión

Las ideas que hemos tratado en este artículo en base a las referencias teóricas mencionadas y especialmente aquellas planteadas por Duval (2003) sobre la enseñanza de la geometría y luego el análisis que hemos realizado de la unidad 6 del texto elegido para ejemplificar lo que sucede en la realidad de las propuestas de los textos escolares, deja en evidencia que las decisiones de los autores no se centran en las actividades geométricas esenciales. El texto que hemos tomado como ejemplo es considerado muy bueno en el ámbito de la enseñanza chilena, los autores son profesionales de prestigio.

Desde nuestro punto de vista el problema que se plantea radica en una falta de una seria reflexión sobre la geometría que debe ser aprendida y el para qué. Las actividades verdaderamente geométricas que hemos dejado en evidencia, visualización, construcción y deducción merecen un lugar central en la enseñanza de la geometría, pues son ellas las que permiten poner en juego actividades cognitivas que favorecen el razonamiento matemático.

Bibliografía

Duval, R. Cours Chipre 2003.
Duval, R. y Guzmán, I. RECHIEM 2006.
Duval R. Sémiosis et Pensée Humaine 1995. P.Lang.

Duval R (2003a) *Décrire, visualiser, raisonner: quels «apprentissages premiers» de l'activité mathématique?* Annales de Didactique et de Sciences cognitives, 8, 13-62.

Houdement.& Kuzniak (2000). Formation des maîtres et paradigmes géométriques. *Recherche en didactiques des mathématiques 20-1.* 89-116.

Matemática Activa Primero Medio. Editorial Marenostrum 2001.

Anexo

Resultados encuesta Duval (2003):

Les résultats à l'échelle nationale sont impressionnants. Le fonctionnement visuel l'emporte sur les hypothèses, pourtant reportées sur la configuration.

Septembre 1997	2604 élèves	Septembre 1998	2590 élèves
Réponses mathématiques (AE vu comme un rayon de 4cm)	9%	Réponses mathématiques (AE vu comme un rayon de 4cm)	22, 2%
Réponses par mesure du tracé *(environ 2cm sur le tracé présenté*	*16%*	*Réponses par mesure du tracé* *(environ 3,5 sur le tracé présenté)*	*39,6%*
Réponses par estimation perceptive *(E presque au milieu de AB : environ 3,5)*	*26%*		
Autres réponses	30%	Autres réponses	24,4%
Absence de réponses	16%		