UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2009, Número 20, páginas153-162
ISSN: 1815-0640

Coordinado por
Martha Iglesias

Ideas para Enseñar

Aportes didácticos para abordar el concepto de función

Graciela Rey; Carolina Boubée; Patricia Sastre Vazquez; Alejandra Cañibano.

Resumen

Las limitaciones de nuestros alumnos están relacionadas, muchas veces, con la ausencia del potencial modelizador de la noción de función, el excesivo hincapié en el registro algebraico, la falta de articulación entre registros, el oscurecimiento de los elementos fundamentales de variabilidad y dependencia, y el trabajo descontextualizado, tan frecuente en matemática.
En este artículo proponemos algunos aportes didácticos simples y viables.

Abstract

The limitations of our students are related, sometimes, with the absence of the potential modeling of the function notion, the excessive anxiety in the algebraic record, the articulation lack among registrations, the dimness of the fundamental elements of variability and dependence, and the work outside of context, so frequent in mathematical.
In this paper we propose some simple and viable didactic contributions.

Resumo

As limitações de nossos alunos estão relacionadas, muitas vezes, com a ausência do potencial modelizador da noção de função, o excessivo hincapié no registo algebraico, a falta de articulación entre registos, o oscurecimiento dos elementos fundamentais de variabilidad e dependência, e o trabalho descontextualizado, tão frequente em matemática.
Neste artigo propomos alguns contribuas didácticos simples e viables.

Introducción

De las múltiples dificultades que presentan los alumnos ingresantes a la Universidad, dentro del área Matemática, creemos que por su generalización y por su importancia en el desarrollo de las carreras, se destaca el tema "funciones". El presente trabajo intenta aportar elementos alternativos para el abordaje didáctico de este tema, y en particular de la función lineal.

El concepto de función, como otros, es abordado en la enseñanza secundaria o polimodal, pero los alumnos ingresantes a la Universidad no demuestran haber adquirido la capacidad de interpretar, definir y graficar funciones que modelicen situaciones problemáticas, tanto del campo de la matemática como de otras áreas del conocimiento.

Desarrollo

Todos los objetos de saber sufren un importante trabajo de preparación didáctica, trabajo de transformación elaborado apuntando al pasaje de estos objetos al seno de la situación de enseñanza. Tanto los libros de texto como los programas oficiales adaptan los objetos matemáticos a ciertas exigencias que precisa todo saber que se desea incluir en el sistema de enseñanza, las que le provocan transformaciones.

Algunas de las exigencias a las que nos referimos son las siguientes (Ruiz Higueras, 1998):

- Dividirlo en campos de saber delimitados, dando lugar a un fraccionamiento y autonomización de los saberes parciales;
- Definir una progresión ordenada en el tiempo, lo que implica una programación de los aprendizajes;
- Verificar la conformidad entre la progresión y los conocimientos de los alumnos, lo que se expresa en objetivos o expectativas de logro y que implica la necesidad de evaluación;
- La explicitación de algunas nociones matemáticas que se emplearán como herramientas para resolver problemas, lo que implica su introducción como objetos de estudio.

En varios libros de texto, el concepto de función aparece como caso particular del concepto de relación y éste es definido a partir de algunos conceptos elementales de la teoría de conjuntos.

En muchos casos, primero se formaliza el conocimiento a enseñar y luego se lo aplica en la resolución de ejercicios que, en general, están construidos exclusivamente para la aplicación directa del concepto aprendido, sin ningún tipo de transformación. Ruiz Higueras expresa:

> *"Nuestros alumnos de secundaria manifiestan en general una concepción de la noción de función como un procedimiento algorítmico de cálculo... Podemos decir que sus definiciones no determinan el objeto función, sino las relaciones que han mantenido con él".*
> *"Tanto se ha descompuesto el objeto función en segmentos para su enseñanza que el alumno no logra unificarlos dándoles una significación global. El alumno ha visto muchos objetos allí donde sólo debía* existir uno".

Encontramos en nuestros alumnos una diversidad de concepciones respecto de la noción de función. Probablemente, el sistema de enseñanza del que provienen no ha promovido el estudio y análisis de la variabilidad de fenómenos sujetos a cambio, donde las funciones encontrarían una especial significación estrechamente ligada a sus orígenes epistemológicos. Las situaciones ligadas a las diferentes concepciones de los alumnos se refieren al uso de rutinas y procedimientos algorítmicos: construir tablas, calcular dominios, representar funciones, etc. Se utilizan fórmulas como “recetas”, sin utilizar su gran poder modelizador. Las fórmulas algebraicas son visualizadas como conjunto de técnicas eficaces para encontrar el valor de las incógnitas, esta concepción elimina el sentido de variabilidad, movilizando incógnitas en lugar de variables.

El tratamiento dado por el sistema de enseñanza a la noción de función da lugar a la formación de concepciones muy limitadas, que no generan una concepción más completa de la misma.

Dado que la variable didáctica es la única que depende casi exclusivamente de una elección docente o de un proyecto del sistema educativo, nos detenemos sobre ésta e intentamos plantear algunos aportes vinculados a ella.

Pensar en modificaciones didácticamente posibles de llevar a cabo para optimizar el aprendizaje de los alumnos, nos ha hecho plantear distintos interrogantes.

¿Cuáles son las dificultades más frecuentes de los alumnos referidas a este concepto? ¿Cómo tratar los errores que cometen? ¿A qué aspectos conviene dar más importancia? ¿Cómo encarar la enseñanza, en la Universidad, de un tema visto en niveles anteriores?

Somos conscientes que la formación de un concepto matemático se lleva a cabo a través de un largo proceso. Shlomo Vinner (1983), presenta un modelo de construcción de un concepto, que involucra las representaciones, las propiedades asociadas al concepto y las definiciones del mismo. Dice este autor:

> *“Sea C un concepto y P una persona. La representación mental que P hace de C es el conjunto de todas las representaciones que se han asociado con C en la mente de P. La palabra representación está usada en sentido amplio e incluye cualquier representación visual del concepto, incluyendo símbolos. El gráfico de una función específica, algún diagrama, fórmula y/o tabla, la expresión simbólica y = f (x), etc. pueden estar incluidas en la representación mental del concepto de función de alguna persona.*
>
> *Además de la representación mental de un concepto puede haber un conjunto de propiedades asociadas con el concepto (en la mente de nuestra persona P). Por ejemplo, si alguien piensa que una función siempre se puede expresar por una única fórmula, en su mente se encuentra esta propiedad asociada al concepto de función (existe en su mente esta asociación, independientemente de su veracidad). Se llama imagen de un concepto a su representación mental junto con el conjunto de propiedades asociadas al concepto. Queda claro por su definición, que la imagen de un concepto es propia de cada persona.*

Se entiende por definición de un concepto a una formulación verbal que explica el concepto con precisión, en un sentido no circular Para algunos conceptos tenemos sumada a su imagen mental su definición verbal, para muchos otros sólo tenemos su imagen. Por ejemplo, no tenemos una definición de naranja, casa, etc., pero si muy claras imágenes mentales de los mismos. Ellos fueron adquiridos cuando éramos chicos, probablemente por medio de definiciones ostensivas.

El modelo plantea la existencia, en la estructura cognitiva, de dos celdas diferentes: una para la imagen del concepto y otra para su definición verbal (para evitar confusión aclaramos que no se trata de celdas biológicas). Puede existir interacción entre ambas aunque pueden haberse formado independientemente. La forma de introducir un concepto puede activar una o la otra.

Para manipular un concepto se necesita la imagen del concepto y no su definición. Al pensar o reflexionar casi siempre se evoca la imagen del concepto y no su definición. Esto es así sobre todo en el aprendizaje informal. En el aprendizaje formal la situación puede ser diferente, aquí sí entra en juego la definición verbal. Las definiciones verbales tienen dos orígenes: o bien nos las han enseñado o bien las fabricamos cuando tenemos que explicar otros conceptos. Las que nos han enseñado forman parte de un sistema general (en el caso de conceptos matemáticos y científicos en general) al que no estamos necesariamente familiarizados. A veces nos presentan definiciones antes de que tengamos una imagen del concepto y esperamos aprender más para llenar este vacío. Las definiciones verbales tienen su razón de ser: por un lado ayudan a formar la imagen del concepto y por otro son de utilidad en la ejecución de ciertas tareas cognitivas".

Muchas de las dificultades que tienen los alumnos aparecen cuando utilizan las representaciones del concepto de función, que son muy variadas, a veces limitadas y no siempre veraces.

Las limitaciones están relacionadas, muchas veces, con la ausencia del potencial modelizador de la noción de función. Uno de los conceptos constitutivos de la noción de función entendida como herramienta apta para modelizar fenómenos de cambio es la noción de dependencia. La noción de dependencia implica la existencia de un vínculo entre cantidades y conlleva la idea de que un cambio en una de las cantidades tendrá efectos sobre las otras.

Pero la noción de dependencia es difícilmente identificable sin otra noción que constituye el verdadero punto de partida del concepto de función la variabilidad. En efecto, el único medio de percibir que una cosa depende de otra es hacer variar cada una por vez y constatar el efecto de la variación. Los principales elementos que integran la noción de función son, entonces, la variación, la dependencia, la correspondencia, la simbolización y expresión de la dependencia, y sus distintas formas de representación.
Para que las funciones puedan ser una verdadera herramienta de modelización, es necesario que no se oscurezca su esencial significado de dependencia entre

variables, perdiendo su carácter dinámico para transformarse en algo puramente estático.

El COPREM (Comisión para la Reflexión sobre la Enseñanza de la Matemática) formuló la siguiente recomendación (1978*): "Una función no es ni una estadística de valores ni una representación gráfica ni un conjunto de cálculos ni una fórmula, sino todo ello al mismo tiempo".*

El concepto de función permite modelizar múltiples situaciones del mundo real, relacionando variables diversas. De esta manera, se posibilita el análisis de las situaciones desde un punto de vista dinámico, lo que permite sacar conclusiones y formular generalizaciones.

Caracterizaremos brevemente a la actividad matemática y al proceso de estudio de la matemática, siguiendo a Chevallard, Gascón y Bosch (1997), como el trabajo de modelización encaminado a resolver problemas pertenecientes tanto a objetos o procedimientos propios de la matemática (intramatemáticos) como a objetos o fenómenos ajenos a la matemática (extramatemáticos).

Se debe tener en cuenta en la elección de problemas, que estén formulados dentro de un marco que le resulte familiar a los alumnos, o de fácil apropiación, incluyendo conocimientos con los que el alumno ya esté familiarizado. En la siguiente tabla 1 mostramos distintas formas de abordar un mismo contenido, en éste caso referido a función lineal, con actividades contextualizadas, o no:

Tabla 1

Contenido Matemático	Actividad Contextualizada	Actividad Descontextualizada
Ecuación de la recta que pasa por dos puntos.	Un cultivo de soja produce 2,6 ton/ha aplicando una fertilización con fosfato diamónico (DAP) de 45kg/ha, y produce 3 ton/ha si se fertiliza con 55 kg DAP/ha. a) Expresar la relación entre la producción (P) y la fertilización (f) con DAP en forma de función P(f). b) Otra variedad de soja se comporta diferente frente al mismo fertilizante: produce 2,7 ton/ha si se aplican 40 kg DAP/ha, y 3,3 ton/ha si se agregan 60 kg DAP/ha. Exprese la relación P_2(f). c) Compare el comportamiento de ambas variedades y saque conclusiones. d) ¿Qué información está representada en la pendiente y la ordenada al origen de cada una de las funciones?	Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos P_1(45; 2,6) y P_2 (55;3). Graficar. Identificar pendiente y ordenada al origen.

Ecuación de la recta que pasa por un punto y tiene pendiente u ordenada conocida.	En una experiencia de alimentación de ganado bovino, el lote A es alimentado con forraje natural, iniciando la experiencia con un promedio de 300 kg de peso por animal, y alcanzando los 360 kg promedio a los 90 días. El lote B es suplementado con grano, teniendo un peso promedio de 290 kg por animal a los 15 días de iniciada la experiencia, y aumentando 800 g/día. Si la relación planteada se adapta a una función lineal: a) Hallar las ecuaciones correspondientes para el lote A y para el lote B. b) Grafique las rectas correspondientes en un mismo sistema de ejes. c) Compare ambas ecuaciones y responda: c.1) ¿Qué lote alcanza antes los 350 kg por animal? c.2) ¿Cuál sería el peso promedio del lote luego de 100 días de experiencia? c.3) ¿Qué tipo de alimentación es más eficiente para el engorde del ganado, y como lo reflejan las ecuaciones?	Hallar la ecuación de la recta que pasa por P (360; 90) y corta al eje *y* en 300. Graficar. Hallar la ecuación de la recta cuya pendiente es $m = 800$ y pasa por P (290; 15). Graficar.

Para resolver un problema matemático es necesario identificar a qué conceptos y a qué resultados ya producidos recurrir, es decir, el dominio de la matemática en el que conviene encararlo. Dado que existen muchas maneras de presentar o expresar una información, es necesario encontrar una representación adecuada para cada concepto matemático involucrado.

El concepto de función puede admitir representaciones en diferentes registros, con diversos alcances y limitaciones. Un registro no está ligado ni a objetos ni a conceptos particulares; está constituido por los signos, en el sentido más amplio del término: trazos, símbolos, íconos. Los registros son medios de expresión y de representación y se caracterizan precisamente por las posibilidades ligadas a su sistema semiótico. Un registro da la posibilidad de representar un objeto, una idea o un concepto, no necesariamente matemático.

La noción de función puede representarse en diferentes registros:

- Registro verbal: En este registro la función admite como representación una descripción en lenguaje natural. Si se quiere estudiar un fenómeno utilizando una función como modelo, se cuenta generalmente, en principio, con una descripción de este tipo.

- Registro tabla: En este registro, una función se representa con una tabla de valores que pone en juego la relación de correspondencia. Este registro tiene limitaciones ya que en una tabla sólo puede incluirse un número finito de pares de valores.

- Registro gráfico: En este registro, una función se puede representar por medio de una curva (continua o no) en el plano cartesiano. Se pone en juego la noción de grafo de una función. También presenta limitaciones, ya que como en el caso de la tabla, es necesario imaginar que continúa más allá de lo que es posible observar.

- Registro algebraico: En este registro, una función se puede representar por una expresión algebraica o fórmula, que permite calcular la imagen f(x) para toda x perteneciente al dominio de la función, por lo tanto esta representación tiene pocas limitaciones y son aquellas que provienen del cálculo.

- Registro algorítmico: en este registro, la representación de una función es un programa o un procedimiento, como los que utilizan las calculadoras o computadoras. Representa el proceso para calcular la imagen a partir de los valores del dominio.

La articulación entre el registro gráfico y algebraico resulta en general la más dificultosa para los alumnos. La lectura de representaciones gráficas involucra una interpretación global; ya que se trata de discriminar variables visuales y percibir las variaciones correspondientes en los símbolos de la escritura algebraica.

En la enseñanza se suelen proponer actividades de pasaje de la representación algebraica de una función a la representación gráfica construida punto por punto y es poco frecuente que se considere el pasaje inverso.

En algún momento del aprendizaje del concepto de función, el alumno debería poder distinguir la función de sus representaciones. Las actividades de articulación entre registros podrían favorecer dicha diferenciación.

En la mayoría de los libros de texto referidos a función lineal, el alumno encuentra fórmulas para hallar la ecuación de la recta que pasa por un punto, conocida la pendiente, o que pasa por dos puntos, y sus respectivas deducciones.

Esas fórmulas son válidas, pero si el alumno no alcanza a apropiarse de su verdadero significado, pasan a ser simples fórmulas memorizadas, y si falla la memoria, la fórmula carecerá de utilidad. (ver Tabla 2)

Tabla 2

	Con fórmula	Sin fórmula
Ecuación de la recta dados un punto y la pendiente	$y - y_1 = m(x - x_1)$	Si tenemos un punto $P_1 = (x_1 ; y_1)$ que pertenece a una recta con pendiente m, entonces se puede obtener la ecuación de esa recta, dado que: Ecuación explícita de cualquier recta: $f(x) = mx + b$ Para este caso particular, $f(x) = y_1$; y $x = x_1$; entonces $y_1 = m\, x_1 + b$ Despejando $b = y_1 — m\, x_1$ La ecuación de esa recta es: $f(x) = m\, x + (y_1 - m\, x_1)$
Ecuación de la recta dados dos puntos	$\dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$	Si tenemos dos puntos $P_1 = (x_1 ; y_1)$ y $P_2 = (x_2 ; y_2)$ que pertenecen a una recta, entonces se puede obtener la ecuación de esa recta, dado que: La pendiente de la recta, según fue definida, es Para este caso particular, para el punto P_1 : $f(x) = y_1$; y $x = x_1$; y para el punto P_2 : $f(x) = y_2$; y $x = x_2$ Entonces, hallada la pendiente y con uno de los dos puntos P_1 o P_2 , se puede utilizar la técnica desarrollada en el ítem anterior, resultando: $b = y_1 - m\, x_1$ o bien $b = y_2 - m\, x_2$ Entonces: $f(x) = m\, x + (y_1 - m\, x_1)$ o bien $f(x) = m\, x + (y_2 - m\, x_2)$

En cambio, utilizando el significado geométrico de la pendiente y de la ordenada al origen, puede hallarse la ecuación de una función lineal y graficarla sin la realización de una tabla de valores (x,y).

Esta metodología de trabajo evita la utilización de fórmulas de memoria, y ayuda a consolidar los conceptos y la interpretación de la función lineal y sus parámetros. Se trabaja conceptualmente y no memorísticamente, a lo cual nuestros alumnos no se hallan habituados y plantea un verdadero e importante desafío a los docentes.

Conclusiones

La alternativa de enseñanza del tema función (y en particular función lineal) que pretendemos superadora de la clásica, se sostiene sobre los siguientes pilares:

- reconocimiento de las representaciones mentales de los alumnos adquiridas previamente al ingreso a la Universidad;

- poder modelizador del concepto de función, basado en sus elementos constitutivos de dependencia y variabilidad que le otorgan su carácter dinámico;

- diferenciación del concepto de función de sus representaciones en los distintos registros;

- resolución de situaciones problemáticas contextualizadas, que promuevan la articulación entre los diferentes registros.

Cada docente, como constructor de su propia metodología de enseñanza, reformula constantemente su práctica docente. Es fundamental reflexionar sobre la propia práctica, analizarla, evaluarla, con vistas a aumentar su saber didáctico, en pos de tomar decisiones que mejoren la enseñanza y promuevan el aprendizaje.

El docente necesita libertad y creatividad en su acción, pero debe hacer uso responsable de las mismas. Lo que está en juego es demasiado importante como para experimentar sin fundamentación.

Bibliografía

Camuyrano, M. y otros. (1997) *Matemática. Temas de su Didáctica. Algunos aspectos de la enseñanza de las funciones.* Prociencia. Conicet.

Chevallard, Y. Bosch, M. Gascón J. (1997). *Estudiar Matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje.* I.C.E. Universitat Barcelona.

Ruiz Higueras, L. (1998) *La noción de función: análisis epistemológico y didáctico.* Universidad de Jaén. España.

Vinner, S. (1983) *Definición e imagen de un concepto y la noción de función.* Universidad de Jerusalem. Israel.

U.N.C.P.B.A. (2000)Facultad de Ciencias. Exactas. Fac. de Ciencias. Humanas. *Aportes para la Enseñanza de la Matemática en el Tercer Ciclo de la EGB*. Tandil.

U.N.C.P.B.A. (2004) Facultad de Agronomía. *Introducción a la Matemática. Cuadernillo.* Azul.

Patricia Sastre Vázquez, Agrimensora. Doctora en Matemática Aplicada, por la Universidad de Alicante (España). Profesora Titular del Área de Matemática de la Facultad de Agronomía de Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, UNCPBA, (Argentina). Directora del Proyecto: "La enseñanza de la Matemática en una Facultad de Agronomía: Una perspectiva desde la Teoría de los Obstáculos Epistemológicos. Dictó cursos de postgrado en el país y en el extranjero.
e-mail: pasava2001@yahoo.com.ar

Graciela Rey, Ingeniero Agrónomo.Diplomatura Superior en Ciencias Sociales con Mención en Constructivismo y Educación. Post Título de Formación Docente con Especialización en EGB 3 y Polimodal. Instituto Superior de Formación Docente Nº 22 de Olavarría, (Argentina). Jefe de Trabajos Prácticos del Área Físico/Matemática de la Facultad de Agronomía de UNCPBA, Integrante del Proyecto: “La enseñanza de la Matemática en una Facultad de Agronomía: Una perspectiva desde la Teoría de los Obstáculos Epistemológicos”.
e-mail: grey@faa.unicen.edu.ar

Carolina Boubée, Profesora de Matemática, Física y Cosmografía, Licenciada en Educación. Orientación: Enseñanza de la Matemática Cursando estudios en la Especialización / Maestría en Docencia Universitaria. Profesora de: “Historia de la Matemática”, “Perspectiva Pedagógico Didáctica II (Didáctica Especial)” y “Educación, Ciencia y Tecnología”. integrante del Proyecto: “La enseñanza de la Matemática en una Facultad de Agronomía: Una perspectiva desde la Teoría de los Obstáculos Epistemológicos”.
e-mail: cboubee@faa.unicen.edu.ar

Alejandra Cañibano, Agrimensora Maestría en Metodología de la Investigación Biológica Aplicada a las Ciencias Agropecuarias. Integrante del Proyecto: “La enseñanza de la Matemática en una Facultad de Agronomía: Una perspectiva desde la Teoría de los Obstáculos Epistemológicos”. Secretaria de Ciencia y Técnica de la UNCPBA.
e-mail: acanibano@speedy.com.ar