UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2009, Número 20, páginas 79-87
ISSN: 1815-0640

Infinito, a debater no ensino secundário!

Patrícia Sampaio

Resumo

Apresenta-se um estudo sobre as concepções de infinito numa turma do 12º ano de escolaridade, tendo-se verificado que este conceito não é abordado com rigor no percurso de um aluno que estude matemática. Aplicou-se uma webquest como forma de extensão e refinamento do conhecimento e verificou-se que esta ferramenta cognitiva se mostrou eficaz. Durante a experiência realizaram-se dois testes de resposta aberta constituidos por três questões. No primeiro teste, os alunos demonstraram dificuldades de aceitação do infinito e apenas consideraram a existência do infinito potencial. Já no segundo teste, os alunos demonstraram aceitar a existência de vários infinitos e a comparação entre os mesmos, em termos de cardinalidade de conjuntos.

Abstract

We present a study about the concepts of infinity in a 12th grade class, having verified that this concept is not talked with rigor in the mathematics curricula of a student. It was implemented a webquest as a way of extending and refining knowledge and it was verified that this mindtool was efficient. During the experience we applied two tests with three open questions each. In the first test, students demonstrated some difficulties in accepting infinity, having just considered potential infinite. In the second test, students demonstrated that they accepted different infinites and the comparison between them, in terms of cardinality.

Resumen

Se presenta un estudio sobre las concepciones de infinito en un grupo de 12º año de escolaridad, habiéndose verificado que este concepto no ha sido abordado con rigor previamente. Se aplicó una webquest como forma de extensión y refinamiento del conocimiento y se verificó que esta herramienta cognitiva se mostró eficaz. Durante la experiencia se realizaron dos pruebas de respuesta abierta constituidas por tres cuestiones. En la primera prueba, los alumnos demostraron dificultades de aceptación del infinito y sólo consideraron la existencia del infinito potencial. Ya en la segunda prueba, los alumnos demostraron aceptar la existencia de varios infinitos y la comparación entre los mismos, en términos de cardinalidad de conjuntos.

Introdução

Aparentemente, o Infinito não é um tema tabu na Matemática do ensino português, no entanto, este é frequentemente esquecido. Trata-se de um conceito abordado, ainda que tenuemente, ao longo do percurso escolar de um aluno do ensino português. No 3º ciclo (7º, 8º e 9º anos de escolaridade, dos 12 aos 15 anos de idade) estudam-se os conjuntos dos números naturais, inteiros, racionais e reais, há uma familiarização com a noção de número irracional e é introduzida a noção de função. Segundo Abrantes (2001, p. 67), no final do 3º ciclo do ensino básico os alunos deverão adquirir a “compreensão do conceito de função e das facetas que pode apresentar, como correspondência entre conjuntos”. Na passagem para o ensino secundário (10º, 11º e 12º anos de escolaridade, dos 15 aos 18 anos de idade) estamos em condições de adquirir contornos muito mais formais. Nestes três anos, o conceito de função é aprofundado, tentando desenvolver-se com algum rigor. No 10º ano é trabalhada a noção de função, no 11º é introduzido o uso informal das noções de limite, continuidade e sucessão e no 12º ano estudam-se estes conceitos de uma forma mais rigorosa. Segundo Silva (2002a, p. 9), os alunos devem “chegar aos conceitos de infinitamente grande, de infinitamente pequeno e de limite de uma sucessão”.

A noção de infinito potencial é intuitiva e deste modo facilmente compreendida pelos alunos, fazendo parte do currículo nacional do ensino básico, no entanto as noções de infinito actual e cardinalidade de um conjunto podem não ser abordadas no ensino secundário. A introdução de conceitos tão complexos como o infinito deve ser suportada por processos didácticos que tenham em conta os obstáculos dos estudantes, assim como as suas concepções prévias (Igliori e Silva, 1998; Singer e Voica, 2003; Waldegg, 1996). Tendo em conta que a história da Matemática nos mostra que o conceito de infinito gerou muitas polémicas durante séculos, torna-se um ponto de partida para entender as dificuldades do conceito em causa e permitir aos alunos compreender os paradoxos do passado que se instalam facilmente nos seus pensamentos.

Apresenta-se uma experiência numa turma do 12º ano de escolaridade composta por 16 alunos, numa escola do Norte de Portugal, cujas idades se situam nos 17 (6 alunos), 18 (8 alunos), 19 (1 aluno) e 25 (1 aluno) anos, com 75% de indivíduos do sexo feminino. Neste estudo implementou-se uma estratégia de ensino, uma webquest, pretendendo-se saber se a sua aplicação poderia contribuir para uma melhor compreensão quer do infinito potencial quer do actual, contribuindo para a extensão e refinamento do conhecimento, tendo para tal sido elaborados dois questionários, um pré e um pós a utilização desta ferramenta cognitiva, tendo por base a investigação realizada, em Portugal, por Martinho (1996) sobre uma análise das concepções de Infinito numa turma do 10º ano e as investigações realizadas, no estrangeiro, por Tall (1980) e Tall e Tirosh (2001) sobre as concepções de Infinito, limites e números reais. Ambos os questionários são compostos por três questões, de resposta aberta, abordando diversos temas relacionados com o infinito.

Questão 1 do Q1

Relativamente à primeira questão do primeiro questionário exigia-se a interpretação de um excerto do texto “Parliamo tanto di me” (cap. XVI) de César Zavattini sobre uma competição Matemática, à qual quem ganha é quem pronunciar o número mais elevado. 50% dos alunos responderam que “ninguém” ganharia, 25% responderam “quem disser infinito”, 12,5% afirmaram que ganhava “quem disser o número mais elevado” e 6,25% responderam que o “pai” (um concorrente) ganharia. É necessário referir a ausência de resposta por parte de 1 aluno.

Para quem respondeu que ninguém poderia ganhar o concurso, ocorreram vários tipos de respostas, podendo ser categorizadas pela sua justificação:

- os números são infinitos;

Sujeito 13 - "O pai não tem razão porque os números são infinitos, por isso poderia estar eternamente a repetir *mais um*, *mais dois*, … *mais biliões*, que haveria sempre alguém a dizer *mais dois*, *mais três*, … *mais biliões mais um*, isto é, ninguém poderá ganhar o concurso, é impossível."

- a competição está relacionada com o tempo;

Sujeito 4 - "A questão é complexa e ninguém tem razão. Tudo isto porque este jogo e a sua vitória estão relacionados com o tempo. A verdade é que como o tempo é contínuo, muitos outros assuntos associados ficam indeterminados."

- o infinito remete para um processo inacabado.

Sujeito 9 - "Qualquer um poderia ganhar o concurso, teriam apenas que acrescentar sempre números ao resultado anterior até que houvesse desistências. Caso contrário, ninguém ganharia, pois o infinito remete para um número inacabado."

Quanto aos estudantes que responderam "quem disser infinito" houve dois tipos de respostas:

- a que invocava simplesmente o "infinito";

Sujeito 7 - "Não ganha quem disser mais dois porque alguém poderia dizer infinito e ganhava essa pessoa."

- a que assume o "infinito".

Sujeito 15 - "Este pai não tem razão porque existe o infinito e o infinito não tem fim."

Questão 3 do Q1

Na terceira questão os alunos apenas tinham de responder quantos elementos possuía cada conjunto, sendo constituída por quatro alíneas, salientando-se que este assunto já foi abordado no ensino básico. A percentagem de respostas correctas é muito elevada nas três primeiras questões. Já relativamente à questão 3.4 nota-se uma enorme lacuna na compreensão do conceito de intervalo de números reais.

A primeira destas quatro alíneas referia-se ao cardinal do conjunto vazio tendo os alunos respondido zero elementos na totalidade dos casos. Desta forma, a percentagem de respostas correctas é 100%. Na segunda alínea, 93,75% dos estudantes responderam correctamente que o conjunto $\{-1,2,5,8\}$ é formado por quatro elementos e 1 aluno considera que o conjunto é infinito. Na terceira, a maioria considerou que um conjunto com reticências é infinito (87,5%). No entanto, é de salientar que 2 alunos afirmaram que o conjunto $\{1,2,3,4,5,...\}$ possui cinco elementos, não o considerando, deste modo, infinito.

A 3.4 foi a questão deste grupo que maior número de respostas erradas obteve. Apenas 9 dos 16 alunos afirmaram que o intervalo $[1,3]$ é infinito, isto é, 56,25% responderam correctamente. Os outros 7 (43,75%) consideraram os números 1 e 3 e responderam dois elementos, ou seja, não pensaram nos infinitos números reais que existem entre o 1 e o 3, enfatizando a incompreensão do conceito de intervalo de números reais aprendida no 9º ano de escolaridade e desenvolvida ao longo do ensino secundário.

Comparação da questão 2 do Q1 com a questão 1 do Q2

No primeiro questionário era pedido aos alunos para indicarem algumas palavras que associassem ao infinito e no segundo questionário era-lhes solicitado para indicarem como explicariam a alguém o que é o infinito. Ambas as questões pretendem analisar as concepções dos alunos relativas ao infinito (quadro 1).

O leque de ideias que estes alunos associam ao infinito é muito variado, tendo sido contabilizadas 14 expressões diferentes com o primeiro questionário e 10 expressões com o segundo. A expressão mais comum é “sem fim” e representa 68,75% e 87,5% do total dos alunos nos primeiro e segundo questionários, respectivamente. De realçar a diferença existente entre o número de alunos que associaram o infinito a um processo contínuo antes de realizarem a webquest (1) e depois de a realizarem (7).

Q_1 - Indica algumas palavras que associes ao INFINITO. **Q_2** - Como poderias explicar a alguém o que é o infinito?

	Nº de respostas Q_1	**Nº de respostas Q_2**
Sem fim	11	14
Contínuo	1	7
Ilimitado	3	3
Números	3	2
Incontável		2
Universo	2	
Muito grande	2	
Recta	1	1
Transcendente		1
Céu		1
Indeterminado		1
Inatingível	1	
Sem princípio	1	
Desconhecido	1	
Além	1	
Mar	1	
Inexistente	1	
Muito pequeno	1	

Quadro 1: Ideias que os alunos associam ao infinito.

Dos 16 estudantes que realizaram a webquest:

- 4 mantiveram a mesma ideia;

Sujeito 3

Q_1	Q_2
"Ilimitado, algo sem fim."	"O infinito é algo ilimitado, que não tem fim."

- 7 ampliaram a ideia inicial;

Sujeito 14

Q_1	Q_2
"Algo que nunca tem fim"	"Algo que nunca tem fim, que envolve um processo contínuo."

- 5 mudaram de opinião.

Sujeito 1

Q_1	Q_2
"Espaço, números."	"É algo que nunca acaba, que não tem fim, que envolve um processo contínuo."

Questão 2 do Q2

Tendo em conta um excerto da conferência dada por David Hilbert, em 1925, intitulada "Hotel de Hilbert", proferida no encontro da Sociedade de Matemática de Westphalie em memória a Weierstrass, era pedido aos alunos que comparassem o número de elementos do conjunto $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,...\}$ com o do conjunto $\{2,3,4,5,6,7,8,9,10,...\}$. A maioria dos estudantes (87,5%) disse que o matemático tinha razão, isto é, concordaram que era possível estabelecer uma correspondência entre estes dois conjuntos, como se evidencia na figura 1, associada ao texto. Considerava-se um hotel hipotético com infinitos quartos, todos ocupados, mas como o hotel possui um número infinito de quartos, o hóspede do quarto número 1 mudava-se para o 2, o do quarto 2 para o 3 e assim sucessivamente, ficando o quarto número 1 vago para hospedar o senhor que havia chegado. Apenas 1 aluno não concordou com o matemático e 1 aluno não respondeu à questão.

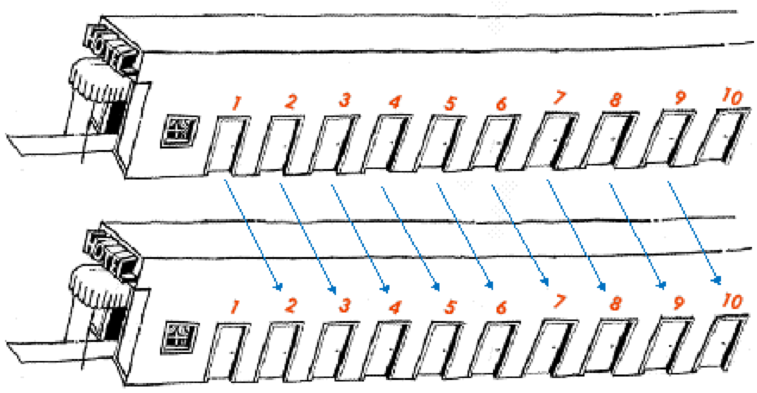

Figura 1: Correspondência entre dois conjuntos.

Esta questão visava entender como eles estabeleciam as correspondências entre dois conjuntos e de acordo com as suas justificações as respostas foram agrupadas em cinco categorias:

- 9 alunos responderam que existe uma correspondência entre os dois conjuntos;

Sujeito 10 – "O matemático tem razão porque se se pode estabelecer uma correspondência entre estes dois conjuntos então eles têm o mesmo número de elementos."

- 3 alunos disseram que existe uma correspondência um a um entre os dois conjuntos;

Sujeito 16 – "O matemático tem razão porque se há uma correspondência um a um entre os elementos dos conjuntos, estes têm o mesmo número de elementos."

- 1 aluno respondeu que os conjuntos têm o mesmo cardinal;

Sujeito 1 – "Quando há uma correspondência entre dois conjuntos, eles têm o mesmo cardinal, logo se $1 \to 2, 2 \to 3, 3 \to 4, \ldots$ então a cada elemento do primeiro conjunto posso corresponder um elemento do outro conjunto. Logo, o matemático tem razão."

- 1 estudante referiu que os conjuntos são infinitos;

Sujeito 9 – "Sim. Ambos os conjuntos remetem para o infinito."

- 1 estudante fez uma associação a conjuntos finitos.

Sujeito 15 – "Acho que não. Por exemplo, os quartos eram de 1 a 20. O senhor do quarto 20 teria de se mudar para o quarto nº 1."

Questão 3 do Q2

A última questão deste questionário era mais filosófica. A sua interpretação prendia-se com o facto de vários conjuntos serem infinitos e terem o mesmo cardinal apesar de serem distintos ou de existirem diversos conjuntos infinitos com cardinais diferentes. Deste modo, pedia-se aos alunos para comentarem a figura 2.

Figura 2: Imagem da questão 3 do Q_2.

As ideias salientes nas respostas dadas foram sintetizadas no quadro 2. Metade deles associou a figura à ideia de que existem vários conjuntos infinitos, podendo ter cardinais diferentes (2) ou iguais (1) e que nem todos os conjuntos infinitos têm o mesmo número de elementos (3), dando alguns exemplos.

	Nº de respostas
Vários conjuntos infinitos	8
Cardinais diferentes	2
Cardinais iguais	1
$\#\mathbb{R}>\#\mathbb{N}$	3
$\#\mathbb{N}=\#2\mathbb{N}$	1
$\#\mathbb{Q}<\#\mathbb{R}$	2
$\#\mathbb{R}>\#\mathbb{Z}$	1
Nem todos os conjuntos infinitos têm o mesmo número de elementos	3
$\frac{1}{6}=0{,}1(6)$ **é infinito**	1
Há dois infinitos: $+\infty$ **e** $-\infty$	1
Problema da identificação do infinito	1
O infinito é indeterminado	1
O infinito não tem fim	2
O infinito é transcendente à normalidade humana	1
A vida é infinita	1
Não sabe	1

Quadro 2: Respostas obtidas à questão 3 do Q_2.

Discussão dos resultados

Pela análise da questão 2 do primeiro questionário verificamos que 68,75% dos estudantes associaram a expressão “sem fim” ao infinito, revelando uma concepção de infinito limitada apenas ao *potencial*. Foram obtidas 14 ideias diferentes de infinito, demonstrando a falta de precisão do termo. Já na questão 1 do segundo questionário que visava o mesmo, 25% dos alunos mantiveram a mesma ideia, 43,75% ampliaram a ideia inicial e 31,25% mudaram de opinião. Sendo de salientar que agora 87,5% consideram que o infinito é "algo sem fim".

Na questão 2 do segundo questionário, 87,5% dos estudantes consideraram que era possível estabelecer uma correspondência entre os conjuntos $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,...\}$ e $\{2,3,4,5,6,7,8,9,10,...\}$, mas destes apenas 3 referiram uma "correspondência um a um" e 1 usou a expressão "mesmo cardinal".

A última questão do segundo questionário que apresentava duas figuras a afirmarem que ambas eram o infinito, era aberta e de carácter mais filosófico. Metade dos alunos respondeu que existem vários conjuntos infinitos, tendo 18,75% mencionado que há conjuntos com cardinais diferentes/iguais, 18,75% dito que nem todos os conjuntos têm o mesmo número de elementos e 43,75% dado exemplos concretos de comparação de conjuntos. Demonstrando uma aprendizagem efectiva sobre a cardinalidade de um conjunto.

Conclusão

O infinito actual não é intuitivo! É necessário abordar o tema com cuidado, salientando os paradoxos da história da matemática. Neste caso, analisou-se as concepções de infinito de uma turma do 12º ano de escolaridade e verificou-se que a maioria destes alunos aceita o infinito potencial, mas não considera o infinito actual. Aplicou-se uma webquest sobre o tema de forma a ampliar e refinar o conhecimento e verificou-se que a noção de infinito realmente sofreu alterações. No fim da experiência alguns alunos já conseguiram comparar conjuntos com o mesmo cardinal e entender que existem diferentes infinitos, embora ainda com algumas limitações. Trata-se de um conceito que necessita de ser abordado com mais rigor na escolaridade básica e secundária em Portugal.

Bibliografia

Abrantes, P. (2001). Currículo nacional do ensino básico – competências essenciais de Matemática. Lisboa: Departamento do ensino básico, Ministério da educação. p. 57-71.

Hilbert, D. (1926). Sobre o infinito. Mathematische Annalen, vol. XCV. In HILBERT, David (2003 [1898-99]). Fundamentos da geometria. Lisboa: Gradiva. p. 234-255.

Igliori, S.; Silva, B. (1998). Conhecimento de concepções prévias dos estudantes sobre números reais: um suporte para a melhoria do ensino – aprendizagem. CD, 21ª ANPEd.

Marthinho, M. (1996). O infinito através da obra de M. C. Escher – Uma experiência sobre as concepções acerca do infinito numa turma de Métodos Quantitativos. Tese de mestrado não publicada. Universidade do Minho.

Silva, J.; Fonseca, M., Fonseca, C.; Lopes, I.; Martins, A. (2001). Programa do 10º ano - Matemática A. Lisboa: Departamento do ensino secundário, Ministério da educação.

Silva, J.; Fonseca, M.; Fonseca, C.; Lopes, I.; Martins, A. (2002a). Programa do 11º ano - Matemática A. Lisboa: Departamento do ensino secundário, Ministério da educação.

Silva, J.; Fonseca, M.; Fonseca, C.; Lopes, I.; Martins, A. (2002b). Programa do 12º ano - Matemática A. Lisboa: Departamento do ensino secundário, Ministério da educação.

Singer, M.; Voica, C. (2003). Perception of infinity: does it really help in problem solving?. In Proceedings of the International Conference: The decidable and the undecidable in Mathematics education. Brno, Czech Republic. (URL: http://math.unipa.it/~grim/21_project/21_brno03_Singer.pdf acessível em 25/03/2009).

Tall, D. (1980). The notion of infinite measuring number and its relevance in the intuition of infinity. In Educational Studies in Mathematics. vol. XI. p. 271– 284.

Tall, D.; Tirosh, D. (2001). Infinity – the never-ending struggle. In Educational studies in Mathematics. nº 48. p. 199-238.

Waldegg, G. (1996). Identificación de obstáculos didácticos en el estudio del infinito actual. In Revista mexicana de investigación educativa. vol. I. nº 1. p. 107-122.

Zavattini, C. (1943). *Parliamo tanto di me*. Milano: Bompiani Editore.

Patrícia Sampaio, professora de Matemática do ensino secundário, licenciada em Matemática pela Universidade do Minho (Portugal) e mestre em Tecnologia Educativa pela mesma universidade. Formadora reconhecida pelo Conselho Científico-Pedagógico da Formação Contínua e pelo Instituto do Emprego e Formação Profissional. Ganhou os prémios de “Melhor aluna da 4ª classe” em 1987 pela Sociedade Martins Sarmento; a “Menção Honrosa do 6º ano” pela Escola Preparatória de Creixomil em 1990**.** **patsampaio@gmail.com**