UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2010, Número 22, páginas 147-150
ISSN: 1815-0640

Dinamización matemática

# Los postes y los gorriones.
# Un problema de divisibilidad de números enteros.

**Patricia Detzel.**

El tema Divisibilidad de enteros representa una excelente opción para mejorar la enseñanza de la Matemática. Su fuerza radica en la facilidad de plantear problemas de distinta complejidad. El resolverlos es un ejercicio específico de aprendizaje.

La idea de este trabajo es compartir un problema que fue propuesto en un curso de maestría por un docente que cursaba un Seminario de Didáctica de la Matemática. El objetivo era presentar situaciones o actividades que provocaran un desafío y en los que la resolución exigiera una verdadera actividad matemática. Sin lugar a dudas el problema de los postes y gorriones cumplía con esos requisitos.

## Problema de los gorriones y los postes:

"*Varios gorriones se posan en ciertos postes. Si sobre cada poste hay un gorrión quedan $n$ gorriones volando. Si en algunos postes se posan $n$ gorriones por postes, quedan $n$ postes libres. Hallar el número de gorriones y de postes*"*.* (Se pide solución numérica).

Como se puede observar, éste aparenta ser un problema simple, de fácil comprensión que invita ingenuamente buscar rápidamente alguna posible solución. Digo ingenuamente porque veremos que cuando uno se involucra en su resolución se encuentra con una inagotable fuente de relaciones aritméticas.

En primer lugar es necesario elegir las variables: con $g$ se indica el número de gorriones y con $p$ se indica el número de postes.

Además tenemos: (1) $g_p + g_v = g$ (gorriones posados y gorriones volando)

(2) $p_l + p_o = p$ (postes libres y postes ocupados)

*"Si sobre cada poste hay un gorrión quedan $n$ gorriones volando",* esto se puede traducir en $g_p = p$ y $g_v = n$, luego queda (1) $g = p + n$.

*"Si en algunos postes se posan $n$ gorriones por postes, quedan $n$ postes libres",* es decir, $p_o = \frac{g}{n}$ y $p_l = n$, luego queda (2) $p = \frac{g}{n} + n$.

Usando (1) y (2) se pueden hallar diferentes expresiones con dos variables. A continuación se muestran algunas de ellas.

Si se busca la relación entre *g* y *n*

$$\frac{g}{n}+n=g-n \quad \Rightarrow \frac{g}{n}+2n-g=0 \Rightarrow \quad \frac{g+2n^2-ng}{n}=0 \Rightarrow g+2n^2-gn=0$$

Se obtienen la siguiente ecuación entera:

(I) $g+2n^2-gn=0$.

Si se busca la relación entre *p* y *n*:

$$p=\frac{n+p}{n}+n \Rightarrow \frac{n+p+n^2}{n}=p \Rightarrow n+p+n^2=np \Rightarrow n^2-np+p+n=0$$

Se obtiene la siguiente ecuación entera:

(II) $n^2-np+p+n=0$

Y por último, si se busca la relación entre *p* y *g,* queda la siguiente ecuación entera:

(III) $2p^2-3pg+g^2+g=0$

Depende de las elecciones nos encontraremos con cualquiera de estas tres ecuaciones enteras para resolver. Las dos primeras tienen características similares en cuanto que tienen una incógnita al cuadrado y la otra lineal, en cambio la tercera tiene ambas incógnitas al cuadrado.

Se analizaran las resoluciones considerando las dos primeras.

## Buscando soluciones enteras…

Luego de obtener cualquiera de las dos ecuaciones:

(I) $g+2n^2-gn=0$.

(II) $n^2-np+p+n=0$

La cuestión es ahora encontrar la solución, pero interesa que *g* y *n* sean números naturales, pues están representando a la cantidad de postes y a la cantidad de gorriones.

A medida que se avanza en la búsqueda va cambiando la cuestión inmediata a resolver.

Es necesario comenzar a transformar las ecuaciones en expresiones equivalentes, en ambos casos podemos dejar una variable en función de la otra:

(I) $g+2n^2-gn=0 \Rightarrow 2n^2=gn-g \quad \Rightarrow 2n^2=g(n-1) \quad \Rightarrow \frac{2n^2}{n-1}=g$

(II) $n^2-np+p+n=0 \Rightarrow \; n^2+n=np-p \Rightarrow n^2+n=(n-1)p \; \Rightarrow \frac{n^2+n}{n-1}=p$

En la resolución del problema es importante considerar la equivalencia de los siguientes conceptos:

Si la fracción $\frac{a}{b} \in \mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \epsilon \mathbb{Z} \;/\; a=kb \quad \Leftrightarrow \quad b|a$

Entonces siguiendo con la resolución, ahora la cuestión a disipar es:

"*¿Cuándo la expresión* $\frac{2n^2}{n-1}$ *resultará ser un número natural? , ó lo que es equivalente, hallar los* $n \epsilon \mathbb{N}$ *que hacen que* $\frac{2n^2}{n-1}$ $\epsilon\, \mathbb{N}$ *ó ¿Qué valores de n verifican que* $(n-1)|2n^2$*?*"

Aquí es donde diferentes nociones de divisibilidad serán de utilidad. Es importante recordar las siguientes propiedades:

Propiedad 1: Si $d|a \; y \; d|(a+b) \Rightarrow d|b$

Si $d|a \Rightarrow a = td \quad con\; t \in \mathbb{Z}$ (1)

Si $d|(a+b) \Rightarrow a+b = hd \quad h \in \mathbb{Z}$ (2)

Por (2) y (1) $b = hd - td = (h-t)d \Rightarrow b = kd \Rightarrow \quad d|b \quad cqd.$

Propiedad 2: $(a, a+1) = 1.$ Es decir, dos números consecutivos son coprimos. Pues $si\; d = (a, a+1)$ entonces $d|a$ y $d|a+1$ (Prop1) $\Rightarrow d|1 \Rightarrow d = 1$

Propiedad 3: Si $a|bc \wedge (a,b) = 1 \Rightarrow a|c$

Si $(a,b) = 1,\; \exists x, y \in \mathbb{Z} / \; ax + by = 1$ (1)

Si $a|bc \Rightarrow bc = ka$ (2)

Multiplicando por $c$ en (1) $c = cax + cby$

por (2) tenemos $c = cax + kay \;\Rightarrow c = a(cx + ky) \Rightarrow a|c$ cqd.

Avanzando en la resolución, se trata de hallar los $n \epsilon \mathbb{N} /\; (n-1)|2n^2$.

Si $(n-1)|2n^2 \Rightarrow (n-1)|2nn$

Como $n-1$ y $n$ son dos números consecutivos $(n-1, n) = 1$ [por Prop. 2].

Si $(n-1)|2nn \;$ y $(n-1, n) = 1 \Rightarrow (n-1)|2n$ [por Prop. 3]

Si $(n-1)|2n$ y $(n-1, n) = 1 \;\Rightarrow (n-1)|2$ [por Prop. 3]

Si $(n-1)|2 \;\Rightarrow\; n-1 = 1 \;\; ó\; n-1 = 2$ [los divisores de 2 son $\pm 1, \pm 2$]

Luego $n = 2 \;\; ó \;\; n = 3$

Ahora conociendo los valores posibles de *n*, podemos hallar la cantidad de postes y gorriones:

Si $n = 2 \;\Rightarrow\; g = 8 \;\; y \;\; p = 6$

Si $n = 3 \;\Rightarrow\; g = 9 \;\; y \;\; p = 6$

De modo similar se puede plantear:

*Hallar los n naturales tales que la expresión* $\frac{(1+n).n}{n-1}$ $\in \mathbb{N}$ *ó preguntar por los n naturales tales que* $(n-1)|n.(n+1)$

Se parte de $(n-1)|n.(n+1)$ y además vale $(n-1,n)=1$ por ser consecutivos,

Si $(n-1)|n.(n+1)$ y $(n-1,n)=1 \Rightarrow \ (n-1)|(n+1)$.

Si $(n-1)|(n+1)$ esto es equivalente a pensar que $\frac{n+1}{n-1}$ es un número natural

$$\frac{n+1}{n-1}=\frac{n-1+2}{n-1}=1+\frac{2}{n-1}$$

La cuestión entonces ahora es plantear para que $n\epsilon\mathbb{N}$ $\frac{2}{n-1}$ es un natural.

Si se piensa en las condiciones del denominador, quedan las siguientes posibilidades:

$n-1=2 \ \Rightarrow n=3$

$n-1=1 \ \ \Rightarrow n=2$

Si $n=2 \ \Rightarrow p=6 \ \ y \ \ g=8$

Si $n=3 \Rightarrow p=6 \ \ y \ \ g=9$

Es decir la cantidad de postes es 6 y la cantidad de gorriones puede ser 8 ó 9.

## A modo de cierre

La resolución de este problema implica un trabajo matemático en el que es necesario introducirse en la teoría de números de un modo simple pero profundo. La meta no es específicamente es estudio de esta teoría, sino compartir la *actividad matemática* involucrada, ejercitar la imaginación, buscar relaciones, evaluar hipótesis, generalizar, etc.

**Patricia Detzel.** Magíster en Educación en Ciencias, Orientación Matemática, Universidad Nacional del Comahue (U.N.Co). Docente del Área Álgebra del Dpto. de Matemática, Facultad de Economía y Administración. U.N.Co. Argentina. pdetzel@gmail.com