UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2010, Número 22, páginas 121-131
ISSN: 1815-0640

Un acercamiento a la idea de continuidad de funciones en estudiantes de Ciencias Económicas

Nora Gatica; Alexander Maz-Machado; Gladys May; Cristina Cosci; Graciela Echevarría; Juan Renaudo

Resumen

En este documento presentamos un estudio exploratorio y descriptivo sobre la dificultad que presentan alumnos universitarios de Ciencias Económicas ante la tarea de determinar la continuidad de una función, cuando ésta está definida a trozos. Para esto se utilizó una prueba escrita con registro algebraico. Se analizaron las respuestas dadas por los estudiantes tomando como referencia los registros de representación semiótica puestos en evidencia. Los resultados revelan que existe un importante porcentaje de alumnos que no tienen en cuenta la representación gráfica realizada al momento de determinar la continuidad de este tipo de función y además presentan contradicciones entre la representación gráfica y las argumentaciones.

Abstract

In this document we present an exploratory and descriptive research about the difficulty of university students of Economics at the task of determining the continuity of a function when it is set to pieces. For this we used a written test with registration algebraic. We analyzed the responses of students by reference to the semiotic representation registers placed in evidence. The results reveal that there is a significant percentage of students who do not take into account the representation made in determining the continuity of this type of function and also inconsistencies between the graphic representation and arguments.

Resumo

Neste documento apresentamos um estudo exploratório e descritivo sobre a dificuldade que apresentam alunos universitários de Ciências Econômicas ante a tarefa de determinar a continuidade de uma função, quando esta está definida em trechos. Para isto se utilizou uma prova escrita com registro algébrico.
Analisaram-se as respostas dadas pelos estudantes tomando como referência os registros de representação semiótica postos em evidência. Os resultados revelam que existe uma importante percentagem de alunos que não têm em conta a representação gráfica realizada ao momento de determinar a continuidade deste tipo de função e ademais apresentam contradições entre a representação gráfica e as argumentações.

Introducción

La experiencia docente indica que el aprendizaje de los temas de Cálculo en primer año de la Universidad, suele ser problemático para los alumnos. Entre estos temas conflictivos se encuentra el concepto de continuidad de una función. En la literatura especializad muchas investigaciones revelan que los estudiantes tienen apuro con el concepto de límite, más si esté esta en el contexto de las funciones y de la continuidad (Artigue, 1992; Breidenbach, Dubinsky, Hawks y Nichols, 1992;

Cornu, 1992; Sierpinska, 1987; Tall y Vinner, 1981). Por otra parte se tiene que, muchas de estas dificultades encontradas en los estudiantes cuando hacen frente a otros conceptos de temas en el aprendizaje del Cálculo (continuidad, diferenciación, integración, etc.) se pueden relacionar con sus dificultades con los límites (Cottrill *et al*., 1996).

Son muchos los recursos que en la actualidad se incorporan a la enseñanza del Cálculo, pero si bien todas ellos son importantes herramientas, es primordial la comprensión que los alumnos hagan de los conceptos relacionados con dicho tema. Por ello cobra importancia conocer cómo interpretan las funciones continuas y discontinuas, entre cosa porque tradicionalmente, a la enseñanza de este concepto, no se le la misma trascendencia que a otros temas (límite, derivadas, integrales, etc.).

El propósito de toda función es mostrar como varia algo (Tall, 1985) y a lo largo de la historia la función se fue convirtiendo en un objeto matemático aceptado, pero la definición de función continua significó importantes esfuerzos a los matemáticos. La sutileza de esta noción requería de una definición extremadamente cuidadosa.

A principios del siglo XIX se inició la formulación rigurosa de este concepto, así se tiene que Bolzano (1817) la define como:

> *"f(x) es continua en un intervalo, si para todo valor de x en un intervalo, la diferencia $f(x+\Delta x)$ - f(x) llega a ser y permanece menor que cualquier cantidad dada Δx suficientemente pequeña, ya sea positiva o negativo".*

Posteriormente Cauchy dio otra definición que no es esencialmente diferente que la anterior:

> *"La función f(x) permanecerá continua respecto a x entre límites dados, si entre esos límites, un incremento infinitamente pequeño de la variable, produce siempre un incremento infinitamente pequeño de la función misma".*

Con Cauchy se llegó entonces a la formulación definitiva y rigurosa del concepto de continuidad, tal como ahora lo conocemos, por medio de la siguiente definición:

> *"f(x) es continua dentro de un intervalo, si el límite de la variable f(x) cuando x se aproxima a x_0 es $f(x_0)$, para todo x del intervalo".*

A pesar de la larga historia de este concepto, los alumnos la consideran como una noción intuitiva y por lo tanto evidente.

Este concepto no es un tema aislado, ya que se considera que forma parte de un gran tema como es el análisis del comportamiento de una función de variables reales. El análisis de la continuidad de una función en un punto es una propiedad local. Esta propiedad puede ser instruida a partir de las gráficas de funciones en determinados puntos.

La enseñanza habitual de esta noción (como también en otros conceptos básicos de Análisis matemático) se aborda desde dos perspectivas: una constituida por cuerpos teóricos deductivos y otra conformada por una organización de expresiones algebraicas (Aparicio & Cantoral, 2003).

En general, en la docencia, se utilizan y enseñan criterios para decidir la continuidad de una función, comparando el valor del límite de la función para *x* tendiendo hacia *a* con el valor de la función en el punto. De esta manera, se estudia la continuidad puntual para luego seguir con la continuidad global (Spivak, 1998), surgiendo ésta como el resultado de generalizar la continuidad puntual a todos los puntos del intervalo.

Sin embargo, dada la simplicidad de esta noción en la vida cotidiana provoca problemas de aprendizaje de esta noción desde el punto de vista matemático: *"[...] el movimiento libre de la mano que se desplaza de un lado a otro sin cesar, las imaginamos proyectorias continuas describiendo su movimiento...la caída de los graves se piensa que estos pasan por todos los puntos intermedios de su trayectoria* [..]" (Aparicio y Cantoral, 2003; p. 171),

Los procesos de la naturaleza y ciencias en general son continuos a trozos con un número finito de saltos.

Históricamente ya Newton explicó que todas las magnitudes geométricas se generan a través de movimientos continuos. Por ejemplo, la línea es el resultado del movimiento de un punto, un ángulo en el plano como generado por la rotación de una recta sobre un punto (Guttenberg, 1993).

Para determinar las dificultades en la comprensión de este concepto, es necesario analizar que respuestas dan a preguntas relacionadas con la continuidad. Para ello, solicitamos a los alumnos, en una primera instancia, realizar la representación gráfica de una función a trozos y determinar, a partir de este gráfico, si se trata de una función continua. En otro ítem, debían justificar analíticamente esta respuesta.

Diversas investigaciones nos muestran que decidir si un gráfico ha de ser representado en forma continua o discontinua, no es una cuestión trivial (Fabra & Deulofeu, 2000) y el registro grafico aunado a la justificación matemática permite identificar cuál es la comprensión que un individuo hace de un concepto determinado y en este caso, sobre continuidad.

Marco teórico

Algunos autores señalan que los objetos matemáticos no son directamente accesibles a la percepción (Duval, 1998) y por tal razón enfatizan en la importancia de la *representación* en Matemáticas, estableciendo que no es posible estudiar los fenómenos relativos al conocimiento sin recurrir a ella. Sin embargo, que no se deben confundir los objetos matemáticos con su representación. Duval (1998) define los registros de representación como un medio de expresión que se caracterizan por sus signos propios y la forma en que éstos se organizan. De la misma manera, establece que es posible representar un concepto matemático en diversos registros de representación. Por ejemplo, una palabra escrita, una notación, un símbolo o una gráfica representan a un objeto matemático. Asimismo, un *registro* está constituido por signos tales como símbolos, iconos o trazos, es decir, son medios de representación semiótica.

Para la comprensión de un concepto es necesaria la coordinación de los diferentes registros de representación, ya que con la representación en un solo registro (mono-registro) no se obtiene la comprensión integral del concepto. Sin embargo, la conversión entre registros no se realiza en forma espontánea, a menos que se trate de representaciones congruentes entre el registro de partida y el de llegada.

Se puede observar que la mayoría de los alumnos no reconocen el mismo objeto a través de representaciones que son dadas en sistemas semióticos diferentes.

En esta teoría se considera que la *comprensión integral de un concepto* está basada en la coordinación de al menos dos registros de representación y esta coordinación se pone de manifiesto por medio del uso rápido y la espontaneidad de la conversión cognitiva, logrando articulaciones entre diferentes registros de representación semiótica. Algunos ejemplos de estos registros pueden ser el lenguaje natural, las escrituras algebraicas o los gráficos cartesianos.

Los alumnos deben aprender a realizar conversiones en distintos registros como una actividad necesaria, por lo que la coordinación entre dichos registros es de vital importancia para el desarrollo del pensamiento. Dado que, entre las habilidades matemáticas necesarias para resolver un problema, se combinan generalmente, tratamientos y conversiones, la diferenciación de registros de representación y la coordinación entre ellos son los puntos más importantes para el desarrollo del aprendizaje. Sin embargo, el traslado entre registros no se realiza en forma espontánea, a menos que se trate de representaciones congruentes entre el registro de partida y el de llegada, por lo tanto, este traslado da lugar a fenómenos de congruencia y no congruencia semántica.

Metodología

Este es un estudio exploratorio descriptivo, que explora las ideas que los estudiantes universitarios ponen de manifiesto cuando se enfrentan a tareas de continuidad matemática en un punto dado, a través del análisis de los distintos registros escritos que utilizan en su solución.

El instrumento utilizado fue un cuestionario escrito ad-hoc compuesto de varias preguntas relacionadas con los conceptos de límite, continuidad y derivada de una función. En el presente trabajo analizamos solamente las preguntas relacionadas con continuidad.

Para la elaboración del cuestionario se analizaron algunos libros de texto de primer año de universidad con el fin de determinar el nivel de grado de comprensión del concepto y categorizar los distintos niveles de respuesta de los alumnos.

Como método de validación del cuestionario se utilizó la triangulación con pares y un estudio piloto. Se elaboraron las preguntas relacionadas con el tema objeto de nuestro estudio, las cuales fueron pasadas a un grupo de cinco alumnos de primer año universitario y a varios profesores de matemáticas, para estimar el tiempo de resolución y probar su claridad. Luego de algunas leves modificaciones se aplicó en forma definitiva.

Este instrumento fue aplicado el último día de clase del curso de Análisis Matemático I, a 76 estudiantes de las carreras de Ciencias Económicas de la Universidad Nacional de San Luis.

Objetivos

Los objetivos específicos de nuestro estudio fueron:

- Analizar si el alumno identifica la continuidad de una función a partir de distintos registros de representación.
- Analizar los errores que comente al realizar conversiones entre los registros.

Se elaboraron distintas preguntas con la finalidad de que los alumnos realizaran conversiones a diferentes registros. En este artículo sólo presentaremos los resultados relacionados con la segunda pregunta (Fig. 1), porque fue una de las que aportó mayor información.

Dada la función: $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si x} \leq 3 \\ 2x+1 & si\ x > 3 \end{cases}$

A. Realizar la representación gráfica de la función.
B. Indique si la función es continua en x = 3.
C. En caso de no ser continua, indique el tipo de discontinuidad que presenta. Justifique su respuesta.
D. De ser posible redefina la función para que sea continua.

Fig. 1. Tarea propuesta

Conversión del registro algebraico al gráfico

Para analizar como realizan la conversión entre estos registros, se definió el *contenido* de la tarea de la siguiente forma: En la primera parte de la tarea, se les solicita que realicen la representación gráfica de una función definida a trozos. Diversas investigaciones nos muestran que los alumnos tienen dificultades al realizar las conversiones entre los registros gráfico y simbólico (Tall y Vinner, 1981; Villalobos y Farfán, 2001). Con mas razón en este caso, al tratarse de una función definida a trozos. De otra parte, es conocido que los alumnos tienen la tendencia a unir todos los puntos de una función (Gatica, Tauber y Ruiz, 2002).

La construcción de gráficas a partir de un enunciado simbólico implica para los alumnos, acciones de cambio de registros. Al analizar las respuestas, es posible identificar sus concepciones y este caso particular sobre la continuidad de funciones.

De acuerdo a Leinhart, Zaslavsky y Stein (1990) la graficación comprende acciones de interpretación y construcción. La interpretación se refiere a la habilidad de los estudiantes para leer y darle significado a una gráfica, mientras que la construcción se refiere a crear algo nuevo, elaborando una gráfica a partir de una regla funcional o tabla.

En la segunda parte de la tarea se les solicita que determinen si la función es continua habiendo realizado la representación gráfica. En este caso la visualización juega un papel importante para encontrar la respuesta correcta. Leinhard *et al.* (1990) señalan la importancia y la variedad de aspectos en que es posible centrar la atención, en particular en tareas dentro del lenguaje gráfico.

Al solicitarles en la última parte de la tarea, que justifiquen la repuesta, se hace necesario que interpreten y se apoyen en el registro algebraico para poder definir este concepto.

Resultados

A pesar que el dominio y recorrido de una función, es un tema que ya ha sido estudiado por ellos en unidades anteriores, no lo tienen en cuenta al realizar el gráfico de una función definida a trozos. La tabla 1 muestra las categorías y las respuestas dadas por los estudiantes.

Tabla 1. Resultados de la representación gráfica

Categorías de las respuestas	Nº alumnos	%
Grafica correctamente la función	24	31,6
Dibuja las funciones como si fueran dos, sin tener en cuenta el dominio de definición.	5	6,5
Grafica una sola función (parábola)	11	14,6
En el punto de corte unen como si fueran continuas	10	13,2
Dibuja dos rectas	9	11,8
Grafica la función a partir de cuatro, cuando la condición es $x > 3$	8	10,5
No contesta	9	11,8
Total	**76**	**100**

Si bien en ésta primera parte de la tarea se les solicita que realicen la representación gráfica con la intención que se apoyen en el registro gráfico para determinar la continuidad de la función, solo el 32,6% responden correctamente. Solamente el 49,9% tomaron en cuenta la discontinuidad de la función, si bien no todos la graficaron correctamente.

En cuanto al análisis de la continuidad, la tabla 2 revela que el 35% de los alumnos persistía en la continuidad de la función, aceptando como suficientemente válida la representación gráfica que habían realizado en el apartado A de la pregunta.

Tabla 2. Análisis de la continuidad en x = 3

Categorías de las respuestas	Nº de alumnos	%
Contesta en forma correcta	6	7,9
Considera nada más que el valor de la función en el punto	11	14,6
Considera nada más que el límite de la función	9	11,8
Analiza el valor de la función en el punto y calculando el límite, sacan mal la conclusión	5	6,6
Verifica en una sola parte de la función	9	11,8
Afirma que la función es continua y no efectúa ningún análisis	27	35,5
No contesta	9	11,8

Muy pocos alumnos contestaron correctamente (7,9%) esto contradice los resultados de la tabla 1, porque un gran porcentaje de los que graficaron correctamente la función, afirman que dicha función es continua, estableciéndose una incoherencia entre la representación gráfica y la interpretación analítica.

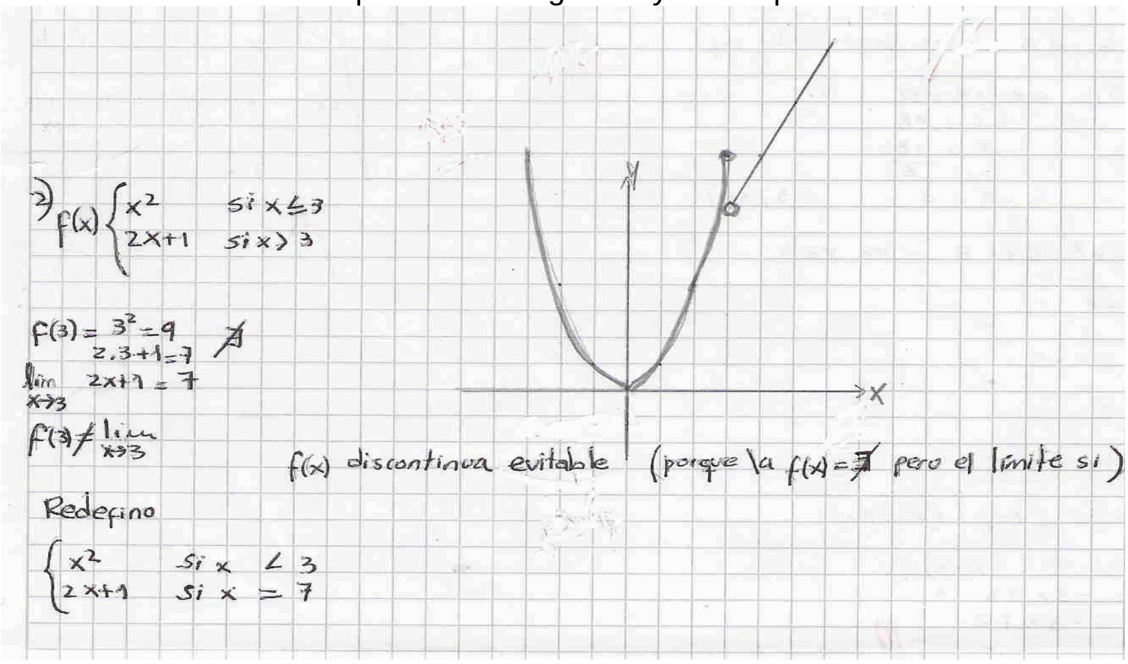

Fig. 2. Incoherencia entre representación gráfica y

La figura 2 presenta una situación donde el alumno realiza correctamente la gráfica de la función dada, pero responde incorrectamente respecto al tipo de discontinuidad. Los alumnos ponen de manifiesto que no dominan las condiciones de continuidad de una función en un punto dado, puesto que en unos consideraban solamente o el valor de la función o dicho punto o la existencia del límite. Algunos graficaron cada trozo de la funciones como si fuesen dos funciones distintas e independientes (Figura 3).

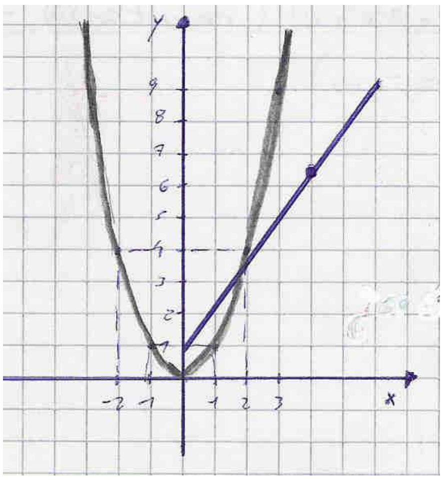

Fig. 3. Representación cada trozo de función como

La mayoría de los alumnos responden mal o no indican cuál es el tipo de discontinuidad (Tabla 3). El 47% se equivocaron en el tipo de discontinuidad y sumado con los que no respondieron se tiene que el 79% es incapaz de reconocer la clase de discontinuidad, lo cual es un valor demasiado alto para estudiantes universitarios que recién han terminado de cursar una asignatura de análisis matemático.

Tabla 3. Justificación del tipo de discontinuidad

Categorías de las respuestas	Nº de alumnos	%
Justificaron en forma correcta	8	10,5
Contestan bien pero sin justificar	5	6,6
Contestan bien pero lo justifican mal	3	3,9
Contestan mal	36	47,4
No contestan	24	31,6

El 21% de los alumnos indicaron correctamente el tipo de discontinuidad, aunque sólo el 10,5% realizó la justificación correcta.

Si bien en las clases prácticas, los estudiantes han realizado ejercicios en los que para determinar la continuidad de una función en un punto, deben verificar las tres condiciones, no las tienen en cuenta al justificar la respuesta.

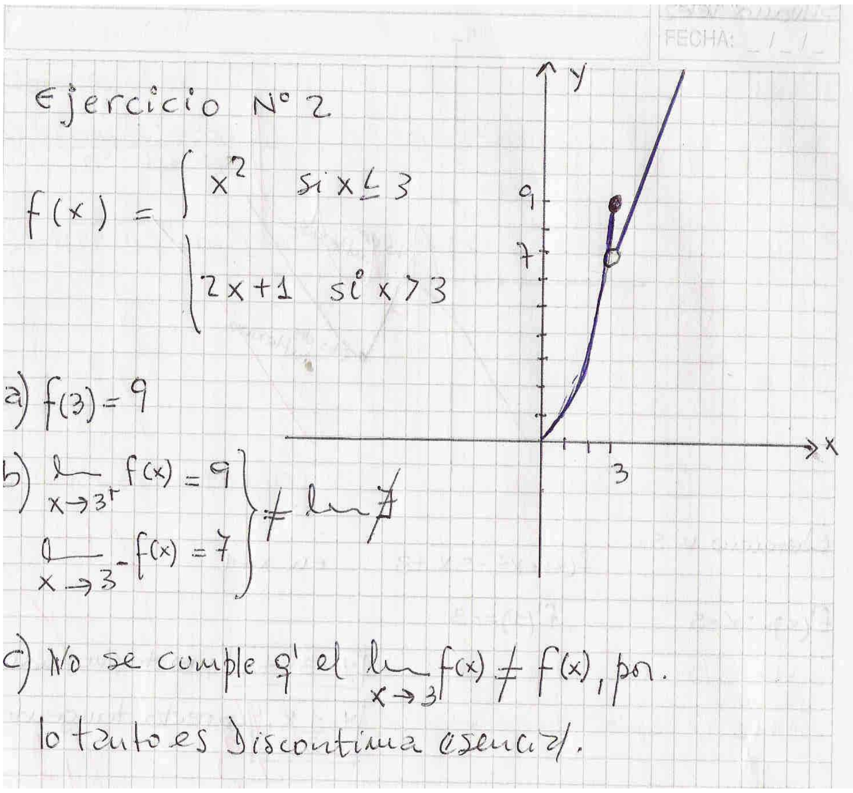

Fig. 4. Error de argumentación sobre el tipo

En la figura 4 se observa como el alumno grafica correctamente la función pero cuando intenta argumentar formalmente para justificar el tipo de discontinuidad, comete un error conceptual y lo que intenta es señalar de forma mecánica. las condiciones para la existencia de la continuidad, pero no toma en consideración cuáles son las que indican el tipo de discontinuidad. Por otra parte la notación utilizada es sumamente confusa.

En la tabla 4 se recogen los datos relacionados con la redefinición de la función. Se observa incapacidad en los alumnos para redefinir la función de forma que ésta pase a ser continua. Es llamativo que el 76,3% de los alumnos no contesten, ni hagan ningún intento por responder la preguntar, si bien debe recordarse que el 35,5% ya había asumido la continuidad y por tanto no les era necesaria redefinir la función.

Tabla 4. Redefinición la función para que sea continua

Categorías de las respuestas	**Nº de alumnos**	**%**
Contestan en forma correcta	8	
Redefinen la función a pesar de que se trata de una discontinuidad esencial	10	
No contestan	58	76,3

Conclusiones

Aunque se trata de una función con una discontinuidad esencial, el 7,6 % de los alumnos la redefinen como si se tratara de una función con una discontinuidad evitable, esto es una clara evidencia de que los estudiantes no han comprendido el concepto.

No obstante que la visualización gráfica ayuda a determinar la continuidad de una función, una eficiente comprensión (lectora) de la definición debería ser suficiente para responder correctamente a esta cuestión, capacidad que sería importante ejercitarla en los cursos universitarios.

Las respuestas de los estudiantes ponen en evidencian la existencia de dificultades en la comprensión de este concepto. El análisis de las respuestas señala que posiblemente esto sucede porque en dicho concepto se encuentran involucrados otras nociones importantes como son: funciones y límites de funciones.

El estudio revela el poco nivel de comprensión conceptual de la continuidad de funciones, las dificultades para la graficación de tales funciones y la incapacidad para identificar el tipo de discontinuidad. Esto es de suma importancia por cuanto los estudiantes de Ciencias Económicas, más adelante deberán manejar en economía funciones de coste de naturaleza discontinua y debería investigarse su desempeño ante tales temas.

Por otra parte el estudio amerita una reflexión por parte del propio profesorado universitario acerca de las estrategias utilizadas en la enseñanza y trabajo en ese tema.

Bibliografía

Aparicio, E. y Cantoral, R. (2003). Sobre la noción de continuidad puntual: un estudio de las formas discursivas utilizadas por estudiantes universitarios en contextos de geometría dinámica. *Epsilon* (56), 169-198.

Artigue, M. (1992). Analysis. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 167-198). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic.

Bolzano, B. (1817/1981). Rein Analytische Beweis des Lehrsartz". En Novy, L. (ed.): *B. Bolzano, early mathematical works, 1781-1848.* Prague: Institute of Slovak and General History.

Breidenbach, D., Dubinsky, E., Hawks, J. y Nichols, D. (1992). Development of the process conception of function. *Educational Studies in Mathematics*(23), 247-285.

Cornu, B. (1992). Limits. En D. Tall (ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 153-166). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K. y Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning with coordinated process. *Journal of Mathematical Behaviour*(15), 167-192.

Duval, R. (1998). Registros de Representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa* (Vol. II, pp. 173-201). México: Departamento de Matemática Educativa. Cinvestav.

Fabra, M. y Deulofeu, J. (2000). Construcción de gráficos de funciones: Continuidad y prototipos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa RELIME, 3*(2), 207-230.

Gatica, N., Tauber, L. y Ruiz, F. (2002). Registros de representación puestos en juego en el concepto de función: un estudio en estudiantes ingresantes a la carrera de ingeniería. En M. Penalva, G. Torregrosa y J. Valls (eds.), *Aportaciones de la didáctica de la matemática a diferentes perfiles profesionales* (pp. 417-430). Alicante: Universidad de Alicante.

Guttenberg, E. (1993). Introducción de los conceptos fundamentales del Cálculo Diferencial e Integral. Una propuesta didáctica. *Revista Educación Matemática, 5*(3), 93-123.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O. y Stein, M. (1990). Functions, graphs and graphing: tasks. Learning and teaching. *Review of Educational Research, 60*(1), 1-64.

Sierpinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics*(18), 371-397.

Tall, D. (1985). Understanding the calculus. *Mathematics Teaching* (110), 49-53.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics* (12), 151-169.

Villalobos, A. y Farfán, R. (2001). Identificación de obstáculos en la construcción de gráfica de funciones. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (14), 396-399.

Nora Gatica. Doctora por la Universidad de Valladolid. Departamento de Análisis y Didáctica de la Matemática. Profesora de Análisis Matemático en carreras de Ingeniería. Facultad de Ingeniería y Ciencias Económico Sociales. Universidad Nacional de San Luis, Argentina.

Alexander Maz-Machado. Doctor por la Universidad de Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática. Profesor del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Córdoba, España. ma1mamaa@uco.es

Gladys May. Profesora Universitaria en Matemáticas. Profesora de Análisis Matemático en carreras de Ciencias Económicas. Facultad de Ingeniería y Ciencias Económico Sociales. Universidad Nacional de San Luis. Argentina.

Cristina Cosci. Especialista en docencia universitaria. Profesora de Matemáticas. Profesora de Análisis Matemático en carreras de Ingeniería. Facultad de Ingeniería y Ciencias Económico Sociales. Universidad Nacional de San Luis. Argentina.

Graciela Echevarria. Especialista en docencia universitaria. Técnica en Laboratorio Industrial. Profesora de Análisis Matemático en carreras de Ingeniería. Facultad de Ingeniería y Ciencias Económico Sociales. Universidad Nacional de San Luis, Argentina.

Juan Renaudo. Especialista en docencia Universitaria. Ingeniero Civil. Profesor de Análisis Matemático en carreras de Ciencias Económicas. Facultad de Ingeniería y Ciencias Económico Sociales. Universidad Nacional de San Luis, Argentina.