UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2010, Número 22, páginas 91-107
ISSN: 1815-0640

Propuesta didáctica para la enseñanza del tema funciones a través de la utilización de estrategias metacognitivas y el uso del Derive

José Ramón Terrero Dominici; Olga Lidia Pérez González

Resumen

El trabajo aborda como a través de la utilización de estrategias metacognitivas y el uso del Derive para en la enseñanza del tema funciones, se puede mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje de los contenidos sobre funciones en los estudiantes del Nivel Medio (Secundaria Básica) de COLAPEC de la Universidad APEC (UNAPEC) de la República Dominicana.

Abstract

The work approaches like through the use of strategies metacognitivas and the use of the Derive stops in the teaching of the topic of Functions it can improve the process of teaching-learning of the topics on Functions in the students, of the Half Level of COLAPEC of the University APEC (UNAPEC) of the Republic Of the Dominican Republic

Resumo

O trabalho aborda como através da utilização de estratégias metacognitivas e o uso do Derive para o ensino do tema funções, se pode melhorar o processo de ensino-aprendizagem dos conteúdos sobre funções nos estudantes do Nível Médio (Secundário Básico) de COLAPEC da Universidade APEC (UNAPEC) da República Dominicana

1. Introducción

Las nuevas exigencias que supone el desarrollo social mundial, hacen que las políticas educativas en el siglo XXI, sean un aspecto que necesite ser atendido especialmente en un país como la República Dominicana, donde el desempleo y el analfabetismo han alcanzado en estos últimos años, los más altos niveles en la población, causa principal del subdesarrollo que nos ha caracterizado y del cual hasta ahora no hemos podido salir.

República Dominicana requiere de un maestro actualizado constantemente, que localice y haga uso de la información que necesita por diferentes vías, que tenga pleno dominio de los contenidos que imparte, así como de los principios pedagógicos, filosóficos, psicológicos, epistemológicos de la educación, y que sepa aplicar la ciencia y la tecnología en su práctica educativa, permitiéndole diseñar estrategias educativas didácticas para lograr el aprendizaje de sus estudiantes.

En el caso particular de la enseñanza de las matemáticas tiene gran importancia el valor cultural del conocimiento de esta asignatura para la comprensión del mundo físico, económico, social y tecnológico, ella es una disciplina de extraordinario valor formativo para el ser humano, su aprendizaje favorece la posibilidad de desarrollar valores, actitudes como la autoestima, flexibilidad del pensamiento, tolerancia hacia la incertidumbre y perseverancia.

A pesar de los muchos esfuerzos, que se hacen por mejorar el aprendizaje de las matemáticas en República Dominicana, los autores de esta investigación, mediante la observación participativa, entrevistas y aplicación de pruebas diagnósticas han detectado que aún existen problemáticas que atentan contra la mejora de los resultados, como son:

- La falta de correspondencia existente en algunos casos, entre la bibliografía utilizada y los contenidos temáticos del grado contemplados en el diseño curricular.
- La inexistencia de orientaciones metodológicas para realizar una evaluación adecuada.
- La poca creatividad desarrollada en los estudiantes, que los hace más reproductivos que productivos.

Además de esto y a pesar de que las actitudes que deben desarrollar y poseer los estudiantes están establecidas en los objetivos, no se contempla en ellos la forma en que cada competencia debe ser evaluada. Como puede observarse para incidir en la mejora del aprendizaje de la enseñanza de la matemática se debe abordar desde diferentes puntos de vistas. El que se asume en esta investigación está relacionado con las estrategias de enseñanza aprendizaje.

En el Colegio APEC “Minetta Roques” (COLAPEC) de la Universidad APEC de la República Dominicana, en tercero de bachillerato del Nivel Medio, se ha podido constatar la problemática de que: existe un alto porcentaje de reprobados cada período, los alumnos no logran apropiarse de los conceptos que involucran el tema de las funciones y por tanto tampoco logran el desarrollo de las habilidades establecidas en la propuesta curricular vigente, además, no son capaces de interpretar el significado las soluciones halladas en un problema específico.

Dentro estas habilidades, la vinculación de las funciones exponenciales y logarítmicas en la modelación de problemas de la vida diaria es la que más se dificulta lograr en los alumnos.

De acuerdo con lo expuesto anteriormente se puede decir que se aprecian deficiencias en la conceptualización, manipulación y resolución de problemas que involucran funciones en tercero de bachillerato del COLAPEC por lo que esta investigación asume como problema científico: las dificultades que tienen los alumnos, del Nivel Medio del COLAPEC, en el aprendizaje del tema de las Funciones y por ende los bajos resultados académicos que se obtienen.

En este trabajo se hace una propuesta didáctica que tenga en cuenta la utilización de estrategias metacognitivas y el uso del Derive para la enseñanza del tema Funciones. Las bases teóricas de la propuesta didáctica se sustentan fundamentalmente en la zona de desarrollo próximo (Vigotsky, L S. 1979), en el aprendizaje desarrollador (Zilberstein, J. 2001) y en la metacognición (Labarrere, A. 1994), (Jiménez, M. 2000).

El trabajo se estructura de la siguiente forma: En la primera sección se hace un estudio gnoseológico contextual del problema, el objeto y campo de acción de la investigación, es decir el proceso enseñanza aprendizaje de la matemática, en el Nivel Medio de COLAPEC y las estrategias metacognitivas en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática sustentadas en el uso del Derive. En la segunda sección se dan los fundamentos teóricos que sustentan la propuesta. En la tercera sección se hace la propuesta didáctica para la enseñanza del tema de las funciones en el Nivel Medio, se ejemplifica en el tema de Funciones Logarítmicas y se caracterizan las exigencias didácticas para la colección de ejercicios, en la cuarta sección se muestran los resultados de la valoración de especialistas y profesores sobre la propuesta didáctica.

2. Problema de Investigación

Actualmente la Universidad APEC (UNAPEC) tiene una constante preocupación por resolver los problemas en el aprendizaje de las Matemáticas, a través del Proyecto de Mejoría de la su enseñanza que ejecuta esta Institución Universitaria.

Prestigiosos investigadores de la Matemática Educativa, apuntan sobre las principales dificultades que se manifiestan en los alumnos, ellas son:

- Tendencia a reproducir contenidos y a no razonar sus respuestas (Zilberstein, J. 2001[a])
- En el tránsito por los grados, tienen limitaciones en la generalización y aplicación de los contenidos (Zilberstein, J. 2004[a]).
- Muy pocos elaboran preguntas, argumentan y valoran; es limitada la búsqueda de procedimientos para aprender y planificar sus acciones (Zilberstein, J. 2001[a]).
- No se percatan de los errores que cometen.
- Poseen pocas posibilidades para la reflexión crítica y autocrítica de lo que aprende, lo que provoca una limitada inclusión consciente en su aprendizaje (Zilberstein, J. 2004[a]).
- No asocian cuáles son los contenidos a utilizar para resolver un problema geométrico determinado, olvidando con rapidez los contenidos que se consideraban vencidos de un grado a otro y más aún de un nivel a otro, hasta llegar a las aulas universitarias (García, R. 2003).

Estas deficiencias están estrechamente ligadas a problemas de *independencia* y a la *solidez de los conocimientos*, así como a un uso limitado *de estrategias para "aprender a aprender*", lo que indica la necesidad de trabajar por favorecerlas.

La Matemática ocupa un lugar de privilegio en los programas escolares, está presente en todos los currículos de la Enseñanza General en República Dominicana, influye en el desarrollo integral de los jóvenes, constituye un medio de comprensión y mejoramiento del mundo científico, industrial y tecnológico de estos momentos.

La preocupación por elevar la calidad de su enseñanza, (la que es considerada una tarea difícil (de Guzmán, M. 1993, Ortega, Tomás y Blázquez, Sonsoles 2003), es una ocupación constante en todas las latitudes (Araya, R, 2002), Díaz, A., y otros, 2002) , (Olivares, D., 2001).

En diagnóstico realizado en el Colegio APEC Minetta Roques de la UNAPEC, los resultados no son nada alentadores, donde en muchos casos los alumnos, a pesar de dominar relativamente diversos contenidos, tienen serias dificultades cuando tratan de integrar los mismos, carecen de la habilidad de buscar recursos para la modelación y/o simplificación esquemática del problema matemático enfrentado, no utilizan estrategias para planificar, organizar, evaluar su propio aprendizaje, lo que repercute en el aprendizaje de temas medulares como el tema de funciones.

Con este diagnóstico se identificó que los alumnos no logran relacionar gráficos con propiedades y funciones, y éstos a la resolución de problemas vinculados al contexto histórico en que se desarrollan los estudiantes, sin embargo la experiencia de este autor y la opinión de más del 70 % de los docentes encuestados coincide en que la gran mayoría de los escolares no dominan los gráficos de las funciones elementales, que no pueden realizar el trazado del gráfico de una función y que justifica el hecho de que en las tareas que se les encomiendan existen dificultades cuando tratan de representarlas o de analizar sus propiedades, a pesar de que estos contenidos son abordados en función del desarrollo de estas habilidades en el Colegio APEC Minetta Roques.

Este análisis se complementa con los resultados que obtienen los estudiantes en los exámenes, donde la acumulación de insuficiencias en el resultado del aprendizaje, se incrementan de grado en grado y se manifiesta en el limitado desempeño de los alumnos en la asimilación y uso de los conocimientos, los que en general no rebasan el plano reproductivo. Por lo que este autor propone utilizar estrategias de enseñanza para solventar esta situación, logrando la aplicación de ellos a la resolución de problemas.

Por otro lado, en República Dominicana, las TIC ayudan al enriquecimiento científico de la sociedad y los docentes tienen entonces, la misión de integrar estos avances al proceso de enseñanza-aprendizaje, pero muchos de los software existentes limitan la búsqueda de procedimientos para aprender y planificar las acciones a realizar por el estudiante, un alto porciento busca la respuesta final, sin precisar los errores y ofrecen pocas posibilidades para la reflexión crítica y autocrítica de lo aprendido, lo cual provoca una limitada inclusión consciente en el aprendizaje, por lo que se exige del maestro utilizar metodologías que tenga en cuenta la utilización de estrategias para el uso del Derive de forma tal que se favorezca el aprendizaje de los contenidos en los estudiantes, del Nivel Medio de COLAPEC.

Así, es tarea de los docentes perfeccionar el aprendizaje de la Matemática para lo que se necesita introducir nuevos cambios a través de mecanismos, instrumentos y estrategias que puedan promoverlos, favorecerlos e inducirlos.

Por lo que se hace necesario introducir estrategias de enseñanza en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática, con la utilización de medios de cómputo, para que el estudiante "aprenda a aprender", favoreciendo su aprendizaje.

3. Fundamentos teóricos que sustentan la propuesta.

El trabajo con las *estrategias de enseñanza* propicia el cambio, pasar del estado actual a otro deseado, permite por tanto al docente valorar las potencialidades de cada uno de sus estudiantes diagnosticando que orientación deberá recibir en cada momento, lo que guarda relación directa con el concepto de Zona de Desarrollo Próximo, con el que Vigotsky critica las posiciones psicológicas tradicionales que se centraban en la medición del nivel alcanzado por el estudiante para enjuiciar la efectividad del aprendizaje, destacando la necesidad de valorar las potencialidades de cada alumno para la actividad cognoscitiva dependiente de la colaboración, más que a lo que ya logra realizar independientemente. (Torres, P. 1999).

En la **teoría de L S. Vigotsky** (1979) el desarrollo mental de cada individuo se manifiesta en dos niveles: el nivel evolutivo real, que se establece como resultado de los ciclos evolutivos llevados a cabo definiendo los productos finales del desarrollo, las funciones que ya han madurado en el individuo; y el nivel de desarrollo potencial, determinado por las acciones que realiza bajo la guía de un adulto o con la ayuda de otro compañero más capaz. La diferencia entre estos dos niveles es lo que denominó zona de desarrollo próximo la cual "no es otra cosa que la distancia entre el nivel real de desarrollo, determinado por la capacidad de resolver independientemente un problema, y el nivel de desarrollo potencial, determinado a través de la resolución de un problema bajo la guía de un adulto o en colaboración con otro compañero más capaz" (Vigotsky. L. 1979). A nuestro juicio el trabajo con las estrategias permitirá guiar al estudiante hasta que llegue a ser capaz de solucionar la tarea por sí solo, intensificando su estudio independiente.

El paso del desarrollo real al potencial se favorece por el intercambio entre el estudiante y el docente u otros alumnos, con la negociación de saberes, con el empleo y solución de contradicciones que generen desarrollo. Este concepto constituye un reto para todos los educadores, los que con la utilización de *estrategias* en correspondencia con las características individuales de los escolares, potenciarán la misma.

Un aprendizaje desarrollador, es personalizado, integrando las funciones instructiva, educativa y desarrolladora. (Zilberstein, J. 2001), promoviendo un continuo ascenso en la calidad de lo que el alumno realiza, vinculado inexorablemente al desarrollo de su personalidad, en el que no puede ser ajeno la atención al grupo y a la individualidad, en un respeto a la diversidad. (Ginoris, O.; 2001), y la propuesta didáctica que se elabora, tiene presente estos supuestos. L. S. Vigotsky, reconocía que una educación desarrolladora es aquella que conduce al desarrollo, que va delante del mismo -guiando, orientando, simulando- que tiene en cuenta el desarrollo actual para ampliar continuamente los límites de la zona de desarrollo próximo o potencial, y por lo tanto, los progresivos niveles de desarrollo del sujeto (Vigotsky. L. 1979).

Un proceso así, incluye la *metacognición* lo que implica el conocimiento sobre el propio funcionamiento psicológico, en este caso, sobre el aprendizaje, ser conscientes de lo que se está haciendo, de tal manera, que se controlen los propios procesos mentales. Labarrere, plantea al referirse a ella que “por común hace alusión a un tipo particular de proceso que tiene lugar en la actividad cognoscitiva que posee como característica principal la de ejercer una función reguladora” (Labarrere, A. 1994). Para Jiménez este tipo de estrategias es necesaria para “desarrollar también la reflexión y autorregulación en los estudiantes” (Jiménez, M. 2000), por lo que deben ser introducidas en la fijación del conocimiento y el desarrollo de las habilidades..

El concepto de metacognición fue desarrollado por J. H. Flavell a partir de una serie de trabajos sobre diferentes aspectos de la memoria, como fruto de una investigación realizada en 1970 (Flavell, J. 1976). En 1976, este autor trabaja sobre los aspectos metacognitivos en la resolución de problemas, y la definición dada fue tomada como punto de partida por muchos investigadores, considerando que en la *metacognición* se hace referencia, al monitoreo activo y la consecuente regulación y orquestación de los procesos cognitivos en función de una meta concreta u objetivo. A nuestro juicio se ponen de manifiesto dos momentos: el nivel del conocimiento acerca del propio conocimiento, el conocimiento y conciencia que el sujeto tiene de las estrategias utilizadas, de los lados fuertes y débiles de su ejecución, preferencias o tendencias a un determinado estilo o modalidad de procesamiento, y de sus posibilidades intelectuales, así como el grado de conciencia acerca de la tarea que realiza, sus condiciones, prerrequisitos, exigencias y los obstáculos involucrados, es decir se reflexiona sobre los propios procesos o se desarrollan metaconocimientos y el proceso de chequeo, monitoreo y control, lo que implica, según (Castellanos, D. 1999) el desarrollo de las habilidades y estrategias para regular el proceso de aprendizaje y de solución de tareas.

Para Ortiz la metacognición está vinculada a la autorregulación de la persona y la regulación ejercida por otros en el propio acto de aprender (Ortiz, E. 2001). Esta posición hace que aún cuando en la literatura se reconoce como *estrategias de aprendizaje: las metacognitivas,* que se asuma que el docente debe utilizarlas dentro de las estrategias de enseñanza, para potenciar la metacognición, al utilizar recursos de aprendizaje para los procesos de chequeo, monitoreo y control, que conduzcan al alumno a saber qué es lo que sabe sobre sus propios procesos cognitivos, en función de las metas o fines que se proponga, por lo que proponer ejercicios para estos fines debe constituir un requerimiento a tener en cuenta en el trabajo con las estrategias y en el propio proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática.

De esta forma el docente al hacer a los estudiantes reflexionar sobre la propia estrategia utilizada por él, incidirá en el aprendizaje de la misma por el alumno, el que después podrá aplicarla por si solo.

Por tanto el alumnado deberá tener un cierto conocimiento sobre sus propios procesos de aprendizaje. La vía fundamental para la adquisición de ese metaconocimiento será la reflexión sobre su propia práctica escolar, qué recursos y procedimientos de la actividad intelectual ejecuta, qué condiciones y exigencias cumple o debe cumplir para lograrlo, lo cual debe ser enseñado por el docente al utilizar sus estrategias. “La condición metacognitiva de un aprendizaje desarrollador implica el dominio del objetivo perseguido, la determinación de estrategias para alcanzarlo, las fortalezas y las debilidades que a cada uno acompañan.”(Ginoris, O., 2002), por lo que este autor coincide con Hernández Hechavarría en que las estrategias de enseñanza, desde el Enfoque Histórico Cultural, posición teórica que matiza la propuesta didáctica, son mediadores externos que se modelan en el decursar de las interacciones entre los que aprenden y los que enseñan (Hernández, D. 2001).

De acuerdo a lo planteado por en la metodología para la utilización de estrategias de enseñanza en la Matemática I de las carreras de Ciencias Técnicas (Tarifa, L. 2005), el docente al hacer uso de las estrategias de enseñanza, de forma reiterativa, con una ejercitación variada de las mismas, al emplear la modelación de cada una de ellas, facilitando al estudiante el conjunto de acciones para cada una de ellas, reflexionando sobre su importancia en el trabajo futuro, evaluando los efectos que ella produjo en la resolución de determinado problema, en el aprendizaje de los contenidos, estará incidiendo en que las estrategias utilizadas para la enseñanza se conviertan en estrategias de aprendizaje.

Para el autor de esta investigación este proceso debe ser **desarrollador**, asumiendo el mismo como: “aquel que constituye un sistema donde tanto la enseñanza como el aprendizaje, como subsistemas, se basan en una educación desarrolladora, lo que implica una comunicación y actividad intencionales, cuyo accionar didáctico genera estrategias de aprendizajes para el desarrollo de una personalidad integral y autodeterminada del educando, en los marcos de la escuela como institución social transmisora de la cultura” (González, A, Recarey, S., Addine, F. 2002), “constituye la vía mediatizadora esencial para la apropiación de conocimientos, habilidades, hábitos, normas de relación, de comportamiento y valores, legados por la humanidad, que se expresan en el contenido de enseñanza, en estrecho vínculo con el resto de las actividades docentes y extradocentes que realizan los estudiantes” (Silvestre, M., Zilberstein, J. 2002).

Para alcanzar los objetivos de la asignatura Matemática en los diferentes planes de estudio se exige que se aumente progresivamente *la independencia de los estudiantes* en la realización de las tareas y que se desarrollen sus capacidades creadoras, (Almeida, B, J. 2001[a]), es necesario entonces, la selección de procedimientos que propicien un nivel de asimilación productivo y la adecuada dirección de la actividad de los estudiantes en la adquisición de los conocimientos, así como las acciones que han de realizar, lo que está en correspondencia directa con el proceso de enseñanza-aprendizaje desarrollador que se defiende. Cada alumno tiene un ritmo de aprendizaje y esto requiere una atención del docente para ofrecer una orientación especial a los que lo requieran (Ortega, T., Blázquez, S. 2003).

4. Propuesta didáctica para la enseñanza del tema funciones en el Nivel Medio

Las etapas que componen la propuesta son:

Etapa 1

Análisis y determinación de las formas de introducción y conceptualización del contenido para mantener la atención y motivación de los estudiantes, mediante la utilización de estrategias de enseñanza. Las estrategias serían: utilizar las TIC´s como medidores del proceso de enseñanza (Derive, Encarta, Internet) y precisar el sistema de acciones para resolver ejercicios y problemas que se modelan mediante ecuaciones logarítmicas y exponenciales.

Etapa 2

Utilización de estrategias que desarrollen la metacognición.

Etapa 3

Elaboración de una colección de ejercicios sobre los contenidos matemáticos, que propicien la ejercitación, modelación, lenguaje matemático adecuado, reflexión y la argumentación.

A continuación se presenta la ejemplificación de las etapas de la propuesta didáctica en el tema de Funciones Logarítmicas.

Etapa 1

Se parte de precisar las habilidades que se deben lograr en los temas donde se aborda este contenido, ellas son: explicar las propiedades de la función exponencial mediante un análisis de su gráfica, relacionar las propiedades algebraicas de la función exponencial, explicar el proceso infinito que conduce al número *e*, graficar funciones que contienen exponenciales a partir de las operaciones básicas con las gráficas de funciones, interpretar y aplicar el concepto de función logarítmica como inversa de la exponencial, trazar la gráfica de una función logarítmica con base mayor o menor que 1 y, a partir de ella, enunciar las características de la función, describir las propiedades de los logaritmos, expresar los conceptos de logaritmos comunes y logaritmos naturales y su relación con las exponenciales correspondientes y resolver ecuaciones exponenciales y logarítmicas.

Para la introducción y conceptualización del contenido se debe explicar que las funciones exponenciales se evalúan muy fácilmente para valores enteros de *x,* para valores racionales, utilizando algunos artificios algebraicos, para valores irracionales, hallar su valor es muy difícil y se necesita recurrir a tablas, calculadoras y asistentes matemáticos. Se propone, además, que a partir de la definición se realice conjuntamente con los estudiantes los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1

Consideremos la función exponencial de base 2 siguiente: $f(x)=2^x$. Hallemos: $f(5); f(-3); f(2/3)$

Solución:

$$f(5)=(2)^5=(2).(2).(2).(2).(2)=32$$

$$f(-3)=2^{-3}\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}=0{,}125$$

$$f(2/3)=2^{2/3}=(2^2)^{1/3}=4^{1/3}=\sqrt[3]{4}=1{,}587401051$$

Construir una tabla de la función anterior para valores enteros de x entre –5 y 5, graficar el resultado obtenido.

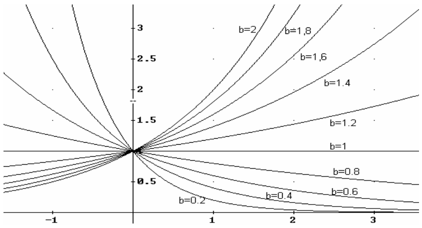
Solución:

Utilizando Derive basta con la instrucción VECTOR([x, 2^x], x, -5 ,5, 1), la cual forma pares del tipo [x, 2x] para valores de x entre –5 y 5 con incrementos de 1. A continuación se muestra una tabla construida para valores enteros de x entre –5 y 5 y se muestran en una gráfica los puntos correspondientes:

Ejemplo 2

Para la exponencial $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ mostrar su tabla y su gráfica y hacer notar que, cuando la base es mayor que 1, la función exponencial es creciente, y si es menor que 1 la función es decreciente.
Se debe mostrar, a través de la siguiente gráfica, el comportamiento de la función exponencial cuando se toman diferentes bases.

Tomaremos las bases 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1; 1,2; 1,4; 1,6; 1,8 y 2 y graficaremos utilizando Derive todas las funciones. Para generar las expresiones utilizamos el comando:
VECTOR(b^x,b,0.2,2,0.2): b varía de 0.2 hasta 2 con incremento 0.2



Del análisis realizado con los ejemplos se concluye con las propiedades de la función exponencial, de manera que los estudiantes puedan describirlas.

Se sugiere utilizar un póster con las propiedades algebraicas de la función exponencial, las cuales ya han sido objeto de estudio en cursos anteriores y se deben incluir aquí a modo de recuerdo. Se supone siempre que las bases *a* y *b* son ambas positivas y diferentes de 1.

Se sugiere tratar las aplicaciones de la función exponencial, pues ellas aparecen ligada a múltiples e importantes problemas. Algunos de ellos son:

- El crecimiento de una población de animales (incluso, hombres) cuando los recursos de subsistencia son ilimitados.
- La desintegración de materiales radiactivos.
- El enfriamiento o calentamiento de un cuerpo debido a su medio ambiente.

La razón de por qué esto sucede se verá en cursos posteriores, sobre todo en la Universidad cuando se estudien las ecuaciones diferenciales. Por el momento, es importante que el alumno pueda operar con estos modelos de manera adecuada.

El número e

Se sugiere que el maestro comente que este importante número está asociado a tantos problemas teóricos y aplicados que, después de la constante $\pi = 3{,}1415926...$, es el número más importante de toda la Matemática.

Debe quedar bien explicado que esta constante fue descubierta por el matemático alemán Leibniz en 1690 (que la llamó b) y fue llamada *e* por Euler 37 años más tarde. Euler descubrió interesantes propiedades de este número y por eso muchos lo llaman, erróneamente, constante de Euler. La constante de Euler es otro número importante que se verá en la Universidad.

El número *e* esta vinculado a la función $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ cuando *m* toma valores muy grandes. Hacer notar que cuando *m* es muy grande, la base de la potencia se hace muy próxima a 1 pero a su vez el exponente crece, de modo que es difícil predecir qué sucede.

Esto debe verse experimentalmente construyendo una tabla de dicha función para valores de *m*, cada vez más grandes, a través del Derive para ahorrar los cálculos.

Usar el comando: VECTOR([m,(1+1/m)^m],m,10,100,10)

Hacer notar a los estudiantes que en la tabla de dicha función se observa que la función se acerca cada vez más a un valor fijo. Desde el siglo XVII se probó que este valor fijo es, con 15 cifras exactas: 2,718281828459045..., y a ese número se le designó con la letra *e* inicial de la palabra "exponencial".

Se debe explicar que: el número *e* aparece en múltiples cuestiones teóricas y prácticas, pero que se va a emplear, en particular, como base de una función exponencial, la función: $f(x) = e^x$.

De todas las funciones exponenciales, la de base *e* es la más importante. Las razones se comprenderán en Cálculo Infinitesimal en la Universidad. Por esta razón, cuando las personas se refieren a la función exponencial, sin indicar la base, se sobreentiende que es la exponencial de base *e*. Como *e* es mayor que 1, su gráfica es creciente y presenta todas las características ya vistas para las funciones exponenciales. A continuación se deberá mostrar la grafica construida en Derive.

Debatir conjuntamente con los alumnos que, como se observa, es una función que crece con gran rapidez cuando *x* toma valores positivos y también decrece con gran rapidez a medida que *x* va tomando valores negativos alejados del origen.

Esta función aparece en todas las calculadoras científicas y en todos los lenguajes de programación, casi siempre designada como $exp(x)$ y también está tabulada desde hace siglos con gran precisión. Por esa causa, es usual que las demás exponenciales se expresen en términos de e^x lo cual, veremos ahora, siempre es posible.

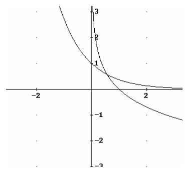
A continuación se sugiere la discusión de cómo expresar b^x en términos de e^x. Observando la grafica de e^x se debe hacer notar que esta función toma todos los valores reales positivos y que como hemos supuesto que *b* > 0, siempre existirá un número, llamado *k* tal que $e^x = b$.

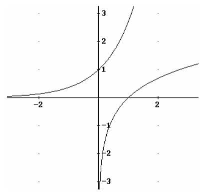
Hacer notar que: si *b* > 1, entonces *k* es positivo y si b < 1, entonces k es negativo, entonces la función b^x la podemos escribir: $b^x = (e^k)^x = e^{k.x}$, precisando que en la práctica raras veces se emplean otras exponenciales que no sea la de base *e*. Para la conceptualización de la función logarítmica se debe partir de su definición

Definición: Sea b un número positivo y diferente de 1. La función $\log_b x$ se define como la función inversa de b^x, es decir: $y = \log_b x$ equivale a $x = b^y$.

Debatir que esto quiere decir que: "El logaritmo en base *b* del número *x* es el exponente al que hay que elevar a *b* para obtener *x*".

De la definición debe deducirse que *x* solo podrá tomar valores positivos ya que b^y siempre es mayor que cero, el rango se verá más fácilmente al analizar la gráfica de la función y que como las funciones exponencial y logaritmo de base *b* son inversas, sus gráficas deben ser simétricas una a otra respecto a la bisectriz del primer cuadrante. La gráfica va a depender de si la base b es menor o mayor que 1. Discutir ambos casos:





Debe resumirse que la función logarítmica con base $b > 1$ posee las siguientes propiedades:

- Está definida para $x > 0$, es decir, su dominio es R^{+},
- Toma el valor 0 para $x = 1$,
- Es una función creciente que toma valores negativos para $0 < x < 1$ y positivos para $x > 1$,
- Crece rápidamente para las $x < 1$ y muy lentamente para $x > 1$,
- Su rango son todos los números reales,
- La función es continua en todo su dominio.

Para las propiedades algebraicas de los logaritmos, debe explicarse y obtener conjuntamente con los estudiantes como consecuencia inmediata de propiedades análogas de las exponenciales y demostrarse de esa forma.

Se debe comentar a los estudiantes someramente las razones de estas propiedades sin entrar en una demostración detallada.

A partir de una gráfica hacer que los alumnos detecten que:

- Debido a que tanto 10 como e son números mayores que 1, el comportamiento de ambas funciones es similar.
- La gráfica de $\log x$ crece más lentamente que la de $\ln x$ porque $10 > e$.
- Destacar que la gráfica de $\log x$ pasa por (10, 1) y la de $\ln x$ pasa por (e, 1)

Ejemplos:

Construya la gráfica de las siguientes funciones tomando en cuenta las operaciones básicas que se han realizado sobre la función original $y = \ln x$

1. $y = 2.\ln x + 2$ 2. $y = 4.\ln(x-3)$

Solución:

Se han realizado en la primera función las siguientes operaciones:

- Multiplicar la función original por 2: Lo cual duplica cada ordenada y equivale a estirar la gráfica al doble de su tamaño en el sentido vertical.
- Sumar 2: Que equivale a elevar la gráfica 2 unidades en el sentido vertical.

Utilizando el derive, mostrar a los estudiantes lo que sucede con la función original y las que resultan después de cada transformación. Sobre las aplicaciones del logaritmo, se debe destacar que en algunas situaciones reales, existen magnitudes que varían dentro de una escala tan grande que resulta muy difícil medirlas con una escala normal. Un par de ejemplos son la intensidad de los sonidos y la energía que desarrolla un sismo.

Por último se sugiere hacer las siguientes preguntas de comprobación:

- ¿Es cierto que $b^x + a^x = (a+b)^x$?,
- ¿Es cierto que $(a.b)^x = a^x.b^x$?,
- ¿Es cierto que $b^x + b^y = b^{x.y}$?,
- ¿Cómo se define el número e?,
- ¿Por qué los lenguajes de programación solo contienen la función exponencial de base e?,
- ¿Cómo se define la función logaritmo de base b?,
- Teniendo en cuenta su gráfica, mencione cuatro características importantes de la función logarítmica,
- ¿Cuáles son los dos sistemas logaritmos más importantes?

Etapa 2

Utilización de estrategias que desarrollen la metacognición. La fijación juega un papel importante para el logro de la solidez por lo que se propone la utilización de una colección de ejercicios y problemas en los que el estudiante necesite reflexionar sobre lo aprendido, con su profesor, con otros estudiantes o consigo mismo, y regular su forma de proceder. La utilización entonces, de estrategias que involucren estos procesos está relacionada con la metacognición y para ello se asume en esta investigación la diseñada por Jiménez, M (2000). Estas estrategias están dirigidas a:

- Elaborar preguntas acerca del contenido de estudio.
- Identificar, caracterizar y definir lo que se estudia.
- Comparar, estableciendo semejanzas y diferencias.
- Clasificar objetos, fenómenos o procesos.
- Plantear ejemplos.
- Valorar lo que se estudia.
- Interpretar el contenido de una ilustración, un esquema, o un modelo presentado.
- Evaluar.

Etapa 3

Elaboración de una colección de ejercicios sobre los contenidos matemáticos, que propicien la ejercitación, modelación, lenguaje matemático adecuado, reflexión y la argumentación

La colección está dirigida a lograr que el alumno pueda: definir el concepto de función exponencial, deducir la forma de la gráfica de las funciones exponenciales mediante su evaluación para valores enteros de la variable, explicar las propiedades de la función exponencial mediante un análisis de su gráfica, relacionar las propiedades algebraicas de la función exponencial, aplicar las leyes de los exponentes al trabajo con funciones exponenciales, modelar problemas sencillos de crecimiento y decrecimiento exponencial, explicar el proceso infinito que conduce al número *e,* graficar funciones que contienen exponenciales a partir de las operaciones básicas con las gráficas de funciones, explicar por qué todas las exponenciales se pueden escribir mediante la exponencial de base *e*, definir el concepto de función logarítmica como inversa de la exponencial, trazar la gráfica de una función logarítmica con base mayor o menor que 1 y, a partir de ella, enunciar las características de la función, escribir expresiones que contienen logaritmos en términos de exponenciales y viceversa, describir las propiedades de los logaritmos, utilizar las propiedades de los logaritmos para la transformación de expresiones.

Definir los conceptos de logaritmos comunes y logaritmos naturales y su relación con las exponenciales correspondientes, Trazar gráficas de funciones que contienen logaritmos a través de las transformaciones básicas con las gráficas de las funciones, Utilizar los logaritmos en la modelación de problemas.

Se debe partir de la discusión de las siguientes preguntas:

- ¿Cómo es una función exponencial?
- ¿Qué características posee la gráfica de una función exponencial en dependencia del valor de la base?
- ¿Por qué los lenguajes de programación solo contienen la función exponencial de base *e*?
- ¿Cómo se define la función logaritmo de base b?
- Es cierto que el logaritmo de una suma es el producto de los logaritmos?
- ¿A qué es igual el logaritmo de una potencia?
- Si el logaritmo en base b de 3 es 1 ¿Cuánto vale b?
- ¿Cómo es la gráfica de la función $y = \ln|x|$? ¿y la de $y = |\ln x|$?

Exigencias didácticas de colección de ejercicios:

Los ejercicios propuestos deben ser concebido de forma que propicien la ejercitación, modelación, lenguaje matemático adecuado, reflexión y la argumentación.

- **La Ejercitación:** Como una de las formas de consolidación o fijación, su objetivo fundamental en la matemática, es contribuir al desarrollo de habilidades y hábitos en los estudiantes y en el centro de su estructuración se encuentran los ejercicios (Bernaveu, M y Quintana, A., 2004), los cuales deben ser variados, sin una repetición mecánica, pero con una ejercitación suficiente para cada una de ellas, téngase en cuenta que a partir de la utilización consciente de los pasos para enfrentar con éxito las tareas y del algoritmo de solución, que se utilice, depende que la estrategia de enseñanza permita al estudiante “aprender a aprender”, ahora pasarán éstas a ser **estrategias para su aprendizaje** y las volverá a necesitar en la realización de otras actividades, las generalizará a otros contextos, por lo que se pone de manifiesto el **carácter activo** de los procesos psíquicos; el alumno no sólo **reflexiona** sobre su proceder o domina los contenidos que debe aplicar, sino que realiza actividades para lo que recurre a determinadas estrategias.
- **La Modelación:** En la solución a cada ejercicio, por parte del profesor y que podrá ser consultada por el estudiante si lo necesita para resolverlo o para **reflexionar** sobre la práctica de su proceder por lo que se deberán explicitar todos los pasos para la realización con éxito de la misma, de forma tal que sirva de modelo al estudiante al enfrentar otras situaciones, y esta se convierta entonces en una **estrategia de aprendizaje** para él; así el procedimiento de solución ofrecido por el

docente actúa como un **mediador** entre las estrategias de enseñanza y las de aprendizaje, al hacerlos conscientes de cómo deben ser utilizadas.

- **La utilización del lenguaje matemático adecuado:** La matemática es un medio de comunicación. Permite resolver los más disímiles problemas de la realidad a través de la abstracción a determinados modelos. La utilización del lenguaje adecuado en cada caso posibilita al estudiante, interactuar con determinados objetos o fenómenos de la realidad. En la comunicación matemática, se determinan situaciones claras, unívocas, que para todos y en todas las circunstancias significan lo mismo, con conexiones lógicas precisas. En las estrategias que se diseñen se deberá habituar al alumno a expresar correctamente en el lenguaje de la matemática, la realidad presente en los problemas planteados, y una vez solucionado el mismo **interpretar** el significado de los resultados obtenidos en la realidad.
- **La reflexión:** Tener en cuenta que no debe utilizarse solo una práctica repetitiva con una ejercitación variada, sino que además el estudiante debe tener la oportunidad de reflexionar sobre sus metas, por qué realiza determinada actividad, qué propósitos persigue y que por tanto el estudiante abandonará el reforzamiento del aprendizaje de determinados contenidos matemáticos, cuando los motivos que incidieron, hayan dejado de existir o hayan cumplido sus fines, lo que se corresponde con el carácter consciente de los procesos psíquicos que propugna el Enfoque Histórico Cultural, como se apuntó en los fundamentos teóricos. De igual forma el alumno tendrá la posibilidad en cada ejercicio de reflexionar sobre su propia estrategia de solución, la podrá comparar con la utilizada por el docente, corrigiendo los posibles errores cometidos. En esto debe tenerse presente el control del **tiempo** en la resolución de los ejercicios, por lo que el estudiante estará consciente de ello y podrá autorregularse, reflexionando sobre qué estrategias deberá utilizar para disminuirlo, si fuera necesario.
- **La argumentación:** Esto permitirá expresar el razonamiento empleado para demostrar una proposición, para convencer a los demás de lo que se afirma o se niega, estableciendo para ello semejanzas y diferencias entre el hecho propuesto y lo que se concluye. De esta forma con la utilización de la argumentación el docente podrá evaluar si la orientación efectuada en cada actividad, fue la correcta, si los estudiantes se sienten motivados por su realización, si son capaces de valorar su proceder adecuadamente y poder elaborar las acciones para corregir las deficiencias que se detecten, perfeccionar la estrategia y evaluar en qué medida el estudiante ha interiorizado el empleo de una determinada estrategia.

5. Valoración de especialistas y profesores sobre la propuesta didáctica.

La propuesta metodológica antes expuesta nos permite introducir una propuesta didáctica que tenga en cuenta la utilización de estrategias metacognitivas y el uso del Derive para la enseñanza del tema de Funciones, de forma tal que se favorezca el aprendizaje de los contenidos en los estudiantes, del Nivel Medio de COLAPEC.

Se seleccionó un grupo de profesores y especialistas a los cuales se les solicitó la valoración de esta propuesta, los resultados obtenidos muestran alto grado de aceptación.

Gran aceptación tuvo por los maestros las exigencias didácticas para los ejercicios: la ejercitación, la modelación, la utilización del lenguaje matemático adecuado, la reflexión y la argumentación.

6. Conclusiones

En la República Dominicana, a pesar de que se han hecho grandes esfuerzos por mejorar la educación existente, las políticas educativas que se han seguido no han sido lo suficientemente efectivas como para ponernos al nivel de los avances que requiere desarrollo socioeconómico y político actual.

El mejoramiento de la educación y la búsqueda de vías que faciliten la enseñanza son retos que tenemos que asumir para poder lograr nuestro objetivo: la formación de seres concientes, capaces y creativos que puedan hacer frente con certeza y determinación a las problemáticas que se presenten.

El valor de los conceptos matemáticos en la formación de un estudiante es una realidad que no se puede poner en dudas por la utilidad, la importancia y el valor cultural del conocimiento de esta asignatura para la comprensión del mundo físico, económico, social y tecnológico, así como también para el desarrollo de valores y actitudes.

Después de todas las investigaciones realizadas en el trabajo explicado anteriormente podemos emitir corroboraciones e inferencias:

1. El empleo de las Tic´s en el proceso enseñanza-aprendizaje, ha evidenciado la necesidad de transformar el trabajo metodológico actual en uno que incorpore el uso de las computadoras para la compresión por parte de los estudiantes de los contenidos que reciben en las diferentes asignaturas.
2. Resultados de estudios diagnósticos han puesto en evidencia que los estudiantes del Nivel Medio presentan insuficiencias en la asimilación de los conceptos que se les imparte.

A través de las estrategias propuestas el estudiante, con la ayuda del uso de las computadoras, puede apropiarse de los conceptos en una forma que le resulta más atractiva y menos laboriosa, y a la vez se propicia la ejercitación, modelación, lenguaje matemático adecuado, la reflexión y la argumentación.

La propuesta metodológica ha contado con la valoración positiva de los involucrados en el proceso, dígase, estudiantes y profesores especialistas en la materia objeto de estudio, quienes reconocen en la metodología, una vía adecuada para la asimilación de concepto a través del uso de las computadoras.

Bibliografia

Almeida, B. Borges, J., (2001[a].) El trabajo con la tarea para el estudio individual en la clase de Matemática. Memorias COMAT 2001. ISBN 959-160098-4.

Araya, R. (2002). ¿Qué significa comprender una idea Matemática? Informe presentado de los resultados del Proyecto Fondef D99I1049 de la Universidad de Chile.

Bernaveu, M y Quintana, A., (2004). Dirección del proceso del aprendizaje de las asignaturas priorizadas. Matemática. En: Seminario nacional para educadores, Noviembre de 2004.

Castellanos, D. (1999). Centro De Estudios Educacionales. Investigación: El Cambio Educativo En La Secundaria Básica: Grupo De Aprendizaje: Aprendizaje Desarrollador: Dimensiones, Sub-Dimensiones e Indicadores.

De Guzmán, M, (1993). Enseñanza de las ciencias y la Matemática. Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura. Editorial Popular. ISBN: 84-7884-092-3

Díaz Barriga, A. (2002). Hacia las aplicaciones de la Matemática en la escuela media superior de México. Universidad Autónoma de Querétaro. México. Año2. N°4. Xixim. En: [http://www.uaq.mx/matematicas/red m]

Flavell, J. (1976). Metacognitive Aspects of Problem Solving. In: Resnick, Lauren B. . (ed.): The Nature Of Intelligence. L. Erlbaum, NJ

Flavell, John H./ Friedrichs, Ann/ Hoyt, Jane. (1970). Developmental Changes in Memorization Processes. In: Cognitive Psychology, 1, 1970, 324-340.

Ginoris, Quesada, O. (2001). Didáctica desarrolladora: teoría y práctica de la escuela cubana. Curso Preevento No. 43. IPLAC. Pedagogía 2001. La Habana.

Ginoris, Quesada, O. (2002). Didáctica Desarrolladora; Teoría y Práctica de La Escuela Cubana, Conferencia impartida en Memorias del V evento Internacional de Enseñanza de la Matemática Instituto Superior Pedagógico. "Juan Marinello". Diciembre, 2002 Matanzas.

González, A., Recarey, S. y Addine, F. (2002). "Capítulo 4: El proceso de enseñanza aprendizaje: un reto para el cambio educativo", Aprender es crecer. La Habana. Cuba.

Hernández, D., Sánchez, A., Laguna, A. (2001). ¿Cómo organizar el proceso de enseñanza aprendizaje en la carrera de Economía utilizando estrategias didácticas? En:[http://www.monografias.com/trabajos13/artestrg/] Consultado el 20 de febrero de 2005.

Jiménez, M., (2002). Sistema de conocimientos geométricos que deben dominar los estudiantes de preuniversitario según el programa de matemática vigente. ISP "Enrique José Varona". Documento Microsoft Word, abril, 2002.

Labarrere, A. (1994). Pensamiento. Análisis y Autorregulación de la actividad cognoscitiva de los alumnos. Ángeles Editores, México DF.

Lira Olivares, D. (2001). Enfoque integral para la enseñanza de la Matemática en Secundaria. Correo del Maestro Núm. 62.

Llivina, M., (1998). "Una Propuesta Metodológica para contribuir al desarrollo de la capacidad para resolver problemas matemáticos". Tesis en opción al grado de Doctor en Ciencias Pedagógicas. La Habana. Cuba.

Ortega, T. (2003). Otras orientaciones de la licenciatura de matemáticas. Revista Electrónica Interuniversitaria de Formación del Profesorado, 4(2) ISSN 1575-0965. La Habana. Cuba.

Ortega, T.; Blázquez, S. (2003) Otras orientaciones de la licenciatura de matemáticas. Revista Electrónica Interuniversitaria de Formación del Profesorado, 4(2) ISSN 1575-0965.

Ortiz, Torres, E. (2001). El enfoque cognitivo del aprendizaje y la informática educativa en la Educación Superior. Congreso Internacional Online de Psicología Aplicada. Disponible en [http://www.psicologia-online.com/ciopa2001]. Consultado el 15 de febrero 2002.

Silvestre M y Zilberstein, J. (2002), ¿Cómo hacer más eficiente el aprendizaje?, Ediciones CEIDE, México.

Tarifa, L. (2005). Metodología para la utilización de estrategias de enseñanza en la Matemática I de las carreras de Ciencias Técnicas. Tesis de Doctorado. Matanzas. Cuba.

Torres, P. (1999). La Matemática Educativa, Vigotsky, y la manipulada ZDP ISPEJV, Cuba. Documento WORD.

Vigotsky, L. S. (1979). El desarrollo de los procesos psíquicos superiores. Barcelona. Edición crítica.

Zilberstein, J (2001ª.) Hacia una enseñanza de las ciencias en el nuevo milenio y el desarrollo del pensamiento de las alumnas y alumnos. Perspectiva desde una concepción desarrolladora. Conferencia Impartida En Pedagogía 2001.

Zilberstein, J. (2001). Calidad Educativa y Diagnóstico del Aprendizaje Escolar. Curso Pre-congreso Pedagogía 2001, Instituto Pedagógico Latinoamericano y Caribeño (IPLAC). La Habana, Cuba, febrero 2001.

Zilberstein, J. (2004ª). Calidad de la Educación aprendizaje y diagnóstico integral. Artículo tomado del libro: Diagnóstico y transformación de la Institución Docente. Zilberstein J , Ediciones CEIDE, México, 2004.

José Ramón Terrero Dominici. Máster en Ciencias de la Educación con Mención en Enseñanza de la Matemática, profesor de Matemáticas del Colegio APEC “Minetta Roques” (COLAPEC) de la Universidad APEC (UNAPEC) de la República Dominicana.

Olga Lidia Pérez González. Doctora en Ciencias Pedagógicas, Master en Educación Superior y Profesora Titular de Matemática en la Universidad de Camaguey (UC). Secretaria General del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (CLAME**).** Vicedecana de Investigación y Postgrado de la Facultad de Informática de la UC. Miembro de Comité Académico de Maestrías de Educación con mención en enseñanza de la MateMiembro de Comité Académico de Maestrías de Educación con mención en enseñanza de la Matemática en Cuba, México y República Dominicana.