UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
Junio de 2010, Número 22, páginas 9-35
ISSN: 1815-0640
firma invitada

Del *Problem Solving* a los *Recorridos de Estudio e Investigación*. Crónica del viaje colectivo de una comunidad científica

Josep Gascón Pérez

Resumen

En este trabajo describiremos brevemente la génesis y el desarrollo de *una de las líneas de investigación* de la didáctica de las matemáticas en España desde principios de los años 80 del pasado siglo hasta nuestros días. Esta descripción será inevitablemente sesgada y en cierta medida autobiográfica, pero los verdaderos protagonistas de la historia serán los problemas a los que una pequeña comunidad se ha enfrentado a lo largo de estos 30 años. Ambos, los tipos de problemas y la comunidad, han evolucionado paralelamente y ésta se ha constituido como comunidad científica compartiendo, utilizando y desarrollando la Teoría Antropológica de lo Didáctico (Chevallard 1992, 1997, 1999; Chevallard, Bosch & Gascón 1997)

Abstract

In this work we will describe brief the genesis and the development of one of the lines of investigation of the didactics of the mathematics in Spain from beginning of the 80s of last century to the present day. This description will be inevitably slanted and uo to a point autobiographical, but the real protagonists of the history will be the problems which a small community has faced throughout these 30 years. Both, the types of problems and the community, they have evolved parallel and this one has been constituted as scientific community sharing, using and developing the Anthropologic Theory of the Didactic. (Chevallard 1992, 1997, 1999; Chevallard, Bosch & Gascón 1997)

Resumo

Neste trabalho descreveremos brevemente a gênese e o desenvolvimento de uma das linhas de pesquisa da didática das matemáticas na Espanha desde princípios dos anos 80 do século passado até os nossos dias. Esta descrição será inevitavelmente sesgada e em certa medida autobiográfica, mas os verdadeiros protagonistas da história serão os problemas aos que uma pequena comunidade se enfrentou ao longo destes 30 anos. Ambos, os tipos de problemas e a comunidade, evoluíram paralelamente e esta se constituiu como comunidade científica compartilhando, utilizando e desenvolvendo a Teoria Antropológica da Didática (Chevallard 1992, 1997, 1999; Chevallard, Bosch & Gascón 1997).

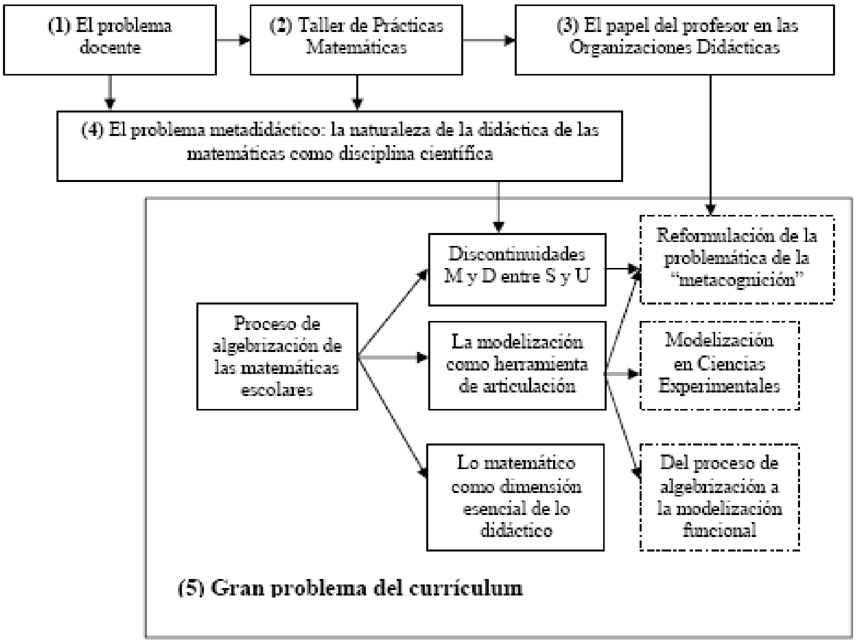
Si estuviera reescribiendo este libro empezaría con un análisis de la estructura comunitaria de la ciencia, tema que recientemente se ha convertido en importante objeto de la investigación sociológica, y que también empiezan a tomar en serio los historiadores de la ciencia.

Thomas S. Kuhn
La estructura de las revoluciones científicas
Posdata (1969)

Introducción

El desarrollo de toda disciplina científica está profundamente ligado, como no podría ser de otra manera, a la *evolución de los problemas* de los que sucesivamente se ocupa y, por tanto, debe interpretarse a la luz del desarrollo de dichos problemas. Como sucede en todos los ámbitos científicos el desarrollo de la didáctica de las matemáticas se lleva a cabo en el seno de una comunidad de investigadores fragmentada en pequeñas subcomunidades. En lo que sigue tomaremos como protagonistas de la narración a los *problemas didácticos* que constituyen la "razón de ser" de una de dichas subcomunidades.[1]

Con la perspectiva que proporcionan treinta años de trabajo continuado, podemos mostrar un esquema general de las cuestiones problemáticas que nuestra comunidad ha ido estudiando a lo largo de todo este tiempo y disponer así de un mapa global del recorrido. Es importante subrayar, sin embargo, que la evolución de esta problemática no ha sido continua ni lineal ni, mucho menos, previsible de antemano y que se ha ido diversificando a medida que se tomaba conciencia de la magnitud y la complejidad del *problema de la Educación Matemática* (Gascón 2002). Esquemáticamente puede hablarse de cinco líneas de investigación profundamente relacionadas entre sí, que surgen históricamente de un *problema docente* (Gascón 1999b).



[1] Utilizaré las notas a pie de página para dar algunos datos biográficos de esta pequeña comunidad científica que también denominaré "nuestra comunidad". A este respecto hay que decir que si bien en la primera mitad de este periodo (1980-1995) yo fui el responsable de coordinar el trabajo de la citada comunidad, desde 1995 podemos hablar de una coordinación compartida con Marianna Bosch.

En determinados trabajos, y hasta en ciertas etapas relativamente prolongadas, algunos de estos problemas toman un protagonismo especial mientras que otros parecen haber desaparecido completamente. Pero a la larga los problemas importantes reaparecen con nuevas implicaciones, modificando de nuevo el panorama de la problemática didáctica global[2].

1. La problemática docente de la enseñanza de las matemáticas como punto de partida

Si nos situamos en 1980 podemos visualizar una pequeña comunidad de profesores de matemáticas que no compartíamos el punto de vista mayoritario que consideraba en aquel momento la enseñanza de las matemáticas como un “arte” que difícilmente podía ser objeto de investigaciones sistemáticas ni de indagaciones disciplinadas. En contra de esta idea dominante empezaba a tomar fuerza en nuestra incipiente comunidad la convicción de que muchas cuestiones importantes y no triviales relativas a la enseñanza de las matemáticas eran ignoradas debido a una falsa *transparencia* originada por su inmediatez. Reclamábamos, en consecuencia, un cierto *distanciamiento* para poder llevar a cabo un estudio “científico” de la problemática docente del profesor de matemáticas.

Se empezaba así a poner en duda la que podríamos denominar *solución del sentido común* al problema de la Educación Matemática y, en particular, los presupuestos implícitos (y también muchos de los explícitos) del *movimiento de renovación de materiales*, que había jugado un papel muy importante en la dinamización de la enseñanza de las matemáticas en España a lo largo de la década de los 70 pero que, por razones que nadie intentaba explicar, no estaba dando en la práctica los resultados esperados.

Empezaron a plantearse preguntas que apuntaban hacia una especie de investigación “fundamental”. Entre dichas preguntas podemos citar:

(a) ¿Cómo *fundamentar los criterios* para decidir el tipo de material matemático que debería diseñarse así como la metodología didáctica más adecuada en una situación escolar dada? Se preconizaba así, aunque de forma incipiente, la irrenunciable ambición de construir una nueva disciplina científico-experimental: la didáctica de las matemáticas.

(b) ¿De donde proviene la *misteriosa persistencia y universalidad* de las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas?

(c) ¿Hasta qué punto estas dificultades dependen de la *especificidad de los diferentes aprendizajes matemáticos*? De aquí emergerá posteriormente la convicción de que la nueva ciencia debería desarrollarse en el seno de la comunidad matemática porque su objeto de estudio era, primariamente, la propia actividad matemática.

(d) ¿Cuál es la relación entre *motivación y aprendizaje*? ¿Existe una relación causal simple entre ellas o, simplemente, una correlación alta?

[2] Así, por ejemplo, la problemática en torno a la *dimensión ostensiva* de la actividad matemática fue abordada en la tesis de Marianna Bosch (1994) y ha reaparecido recientemente con fuerza (Arzarello et Alt. 2008).

(e) ¿Cómo medir experimentalmente los *cambios en el aprendizaje* producidos por una intervención didáctica determinada?

Esta primera etapa concluye con las investigaciones relativas a la *Resolución de Problemas*[3] y una interpretación crítica del movimiento clásico del *Problem Solving* mediante el planteamiento de una problemática más básica:

(1) ¿Qué se entiende por *problema de matemáticas*? ¿Qué papel juegan los problemas resolubles mediante un *algoritmo*? ¿Y los problemas de *demostración*?

(2) ¿Problemas aislados o *clases de problemas*? ¿De donde extraer los criterios de clasificación de problemas?

(3) ¿Cómo diseñar una instrucción dirigida a mejorar la capacidad de resolver problemas? ¿Basta con dar una "descripción" de la actividad que llevan a cabo los resolutores expertos? (Kilpatrick 1967) ¿De donde extraer, en este caso, las categorías para llevar a cabo dicha descripción? ¿No sería necesario utilizar un modelo teórico?

(4) ¿Cómo identificar los cambios que sufre la actividad de resolución de problemas en función del tipo de instrucción escolar?

Sin pretender resumir aquí las respuestas (parciales) a estas cuestiones que empezaron a emerger en el trabajo de nuestra incipiente comunidad, describiremos brevemente los *supuestos metodológicos y epistemológicos* en los que dichas respuestas se fundamentaban. Esta explicitación de los supuestos básicos es importante porque es precisamente la evolución de los mismos y su crítica parcial o, en otros términos, su *contextualización en un marco más comprensivo*, la que dará origen posteriormente a nuevas perspectivas de la investigación y, en definitiva, constituirá el motor que hará evolucionar la problemática.

En primer lugar no se pretendía investigar los *mecanismos psicológicos* del aprendizaje de los métodos de resolución de problemas. En consecuencia se definía *problema*, *clase de problemas* y *método de resolución* sin hacer ninguna referencia a los estados mentales del sujeto que resuelve el problema. En segundo lugar, el interés se centraba en el *dominio de los métodos de resolución*, en lugar de utilizar la actividad de resolución de problemas para motivar o posibilitar la adquisición de ciertos *sistemas conceptuales*. En tercer lugar se introducía la noción de *alumno hipotético* con el objetivo de idealizar la actividad de resolución de problemas y liberarla, provisionalmente, de las variables contextuales y cognitivas que distorsionan la estructura formal de los métodos de resolución.

A partir de estos supuestos básicos se proponía un esbozo de una teoría general de la resolución de problemas de matemáticas, se diseñaban metodologías didácticas concretas y se formulaban hipótesis contrastables empíricamente. Dicha contrastación se llevó a cabo en el aula, iniciándose así el estudio de la *actuación del solucionador real de problemas* en base al modelo proporcionado por el alumno hipotético.

[3] Uno de los frutos de esta primera etapa es la presentación de la tesis doctoral (Gascón 1989). Esta tesis fue la primera de Didáctica de las Matemáticas que se leía en el Departamento de Matemáticas de la Universitat Autònoma de Barcelona. Para poder ser aceptada se requirieron informes favorables de los profesores Lluis Santaló y Peter Hilton.

2. Primera ampliación de la problemática. El *Taller de Prácticas Matemáticas* y la necesidad de nuevos dispositivos didácticos

A finales de los años 80 y principios de los 90 entramos en contacto con los trabajos sobre *modelización* llevados a cabo por el equipo del profesor Yves Chevallard de la Universidad de Aix-Marsella. Los resultados de estos trabajos influyeron sobre nuestro punto de vista respecto al papel de la Resolución de Problemas en el ámbito global de la enseñanza escolar de las matemáticas.

Estos trabajos se situaban en la línea de los análisis precursores de Guy Brousseau de los fenómenos didácticos dentro de una perspectiva sistémica. En síntesis, mientras la tradición anglosajona del *Problem Solving*[4] centró el interés en torno a las reglas heurísticas potencialmente útiles para resolver problemas (lo que constituye una posible interpretación, pero no la única, de la heurística de Pólya), la mal denominada "escuela francesa" se interesó prioritariamente por la *situación didáctica* creada en torno a la actividad de resolución de problemas en el aula, entendiendo esta actividad como un medio para "hacer matemáticas" más que como un fin en sí misma.

Estos trabajos mostraban que el punto de vista dominante en el movimiento clásico del *Problem Solving* tendía a provocar una *descontextualización del problema*: éste se presentaba, en el uso escolar habitual, *aislado y sin conexión con el sistema* (matemático o extra-matemático) a partir del cual surge en una determinada actividad matemática. Se planteaba, implícitamente, una cierta contraposición entre el *conocimiento del sistema* y la simple *resolución de los problemas* que resultan (o deberían resultar) del estudio del mismo. Esta separación podría explicar, al menos parcialmente, la dificultad de los alumnos para hacerse suyo el problema (la *devolución del problema* en la terminología de Brousseau), dado que dicha devolución sólo parece posible a partir de una devolución previa del sistema en el seno del cual surge el problema en cuestión.

¿Cuál es la relación entre este punto de vista y los trabajos iniciales de nuestra comunidad en resolución de problemas? La respuesta no es sencilla, pero lo que está claro es que en ambos casos se pretende superar, aunque en direcciones diferentes, las limitaciones del punto de vista clásico sobre la resolución de problemas liderado por el movimiento del *Problem Solving*.

Parecía interesante, por tanto, plantearse la posibilidad de elaborar un modelo capaz de abarcar ambas generalizaciones: la que lleva del problema a un método de resolución y, por lo tanto, al *estudio de una clase de problemas* y la que lleva del problema a un *sistema* (matemático o extra-matemático) que le proporciona un contexto y que converge en el *proceso de modelización de dicho sistema.*

[4] El denominado movimiento del *Problem Solving* en matemáticas tiene su origen en los trabajos de Pólya (1945, 1954, 1962-5) y fue desarrollado inicialmente por Kilpatrick (1967), Bell (1976), Lesh & Landau (1983) y Schoenfeld (1985) entre otros, así como por Landa, Luria y Tsvetkova dentro de la escuela soviética (Kilpatrick & Wirszup 1969-75). En este trabajo no analizaremos ni la primera etapa del movimiento del *Problem Solving*, etapa que podríamos denominar "clásica" y que se describe en Kilpatrick (1985), ni tampoco el desarrollo posterior de dicho movimiento (en el número 39 de *ZDM Mathematics Education*, publicado en 2007, se hace una revisión del estado actual de las investigaciones en torno a la Resolución de Problemas).

El avance en esta dirección condujo muy pronto a situar la problemática de la resolución de *clases de problemas* en relación con la *modelización matemática*. En este estadio del desarrollo de la problemática didáctica surgió el interés por llevar a cabo un análisis más fino de la actividad matemática, esto es, la necesidad de construir y utilizar un modelo funcional de dicha actividad.[5] Con la emergencia de la *teoría de los momentos didácticos* apareció la necesidad ineludible de crear un nuevo dispositivo didáctico en el que el momento del *trabajo de la técnica* pudiese vivir con normalidad en las instituciones docentes. A dicho dispositivo se le dio el nombre de *Taller de Prácticas Matemáticas*.

Nació así una nueva línea de investigación que ocupó gran parte del trabajo de nuestra comunidad en los años sucesivos y que se materializó en el diseño y experimentación de diversos Talleres de Prácticas Matemáticas y, también en la indagación de las funciones potenciales de ese nuevo dispositivo didáctico en la enseñanza universitaria de las matemáticas (Bosch & Gascón 1993, 1994).

3. Segunda ampliación de la problemática. El papel del profesor en las Organizaciones Didácticas escolares

Paralelamente al desarrollo de la línea de investigación que partiendo del *Problem Solving* hace una primera estación en los *Talleres de Prácticas Matemáticas*, surgen nuevas cuestiones problemáticas relacionadas en primera instancia con el problema de la formación matemático-didáctica del profesorado de matemáticas[6] y, posteriormente, con el papel del profesor en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

Éste es otro de los problemas omnipresentes, aunque como problema *teórico explícito* tiene una aparición bastante tardía. Podría afirmarse que en la segunda mitad de la década de los 90 aunque no se había planteado explícitamente el *problema del currículum de matemáticas* ni, mucho menos, el *problema de la articulación de la matemática escolar*, se estaban empezando a tratar dichos problemas "en acto" mediante el diseño de libros de texto y las correspondientes Guías Didácticas[7]. En estos textos se pretendía incorporar algunos aspectos de la actividad matemática cuya importancia había sido puesta de manifiesto en los trabajos de investigación.

Así, por ejemplo, se planteaba la actividad matemática escolar como el *estudio de campos de problemas matemáticos* que van desarrollándose a medida que se avanza en el proceso de estudio. Se enfatizaba que resolver un problema no es una cuestión de suerte y que "entender" las matemáticas *no es un proceso instantáneo*. Para hacer matemáticas, como para llevar a cabo cualquier otra actividad humana

[5] A través de Marianna Bosch, en esos momentos alumna de tesis de Chevallard, tuvimos la oportunidad de invitar al profesor Yves Chevallard a la UAB en enero de 1991. Éste impartió un curso titulado *Teoría y Práctica de la ingeniería didáctica: algunas consideraciones.* En él empezó a desarrollar las ideas básicas para analizar la actividad matemática en términos del *enfoque antropológico*. Pero lo más importante es que dicho curso constituyó el germen de la *teoría de los momentos didácticos* y en él Chevallard subrayó la importancia capital de una dimensión de la actividad matemática bastante desconocida y mal considerada: el *momento del trabajo de la técnica.*

[6] También aparecieron cuestiones relativas al papel potencial de la Didáctica de las Matemáticas en la formación de todo matemático, independientemente de la profesión que como tal matemático vaya a desarrollar en un futuro. Ninguna de estas cuestiones puede separarse de la problemática, siempre presente, de la naturaleza de la Didáctica de las Matemáticas como disciplina.

[7] En este proyecto participaron, además de M. Bosch, los profesores Josep Maria Lamarca, Albert Compta y Pedro Miguel G. Urbaneja.

(como, por ejemplo, jugar a baloncesto), *existen técnicas* (normalmente no algorítmicas) que hay que trabajar hasta llegar a dominarlas para poder acceder a un nivel más alto de la actividad. Se trata de un proceso lento que, como sucede con cualquier otra actividad humana que persigue un objetivo valioso y que requiere paciencia y el establecimiento de objetivos a largo plazo.

En cuanto a la *teorización didáctica explícita* de la problemática que gira en torno al *papel del profesor* en el proceso de estudio escolar de las matemáticas, hay que decir que se ha empezado a tratar en épocas relativamente recientes. Lo cierto es que aún hoy día estamos lejos de disponer de las herramientas teóricas para tratar globalmente dicho problema. De hecho, en el ámbito del *enfoque epistemológico* en didáctica de las matemáticas las investigaciones sobre las "*prácticas docentes*" del profesor de matemáticas han aparecido bastante tardíamente y, desde luego, mucho más tarde que en las investigaciones llevadas a cabo dentro del *enfoque cognitivo*. Puede considerarse que no fue hasta principios de la década de los 90 cuando, por primera vez, el desarrollo de algunas teorías que se sitúan inequívocamente en el Programa Epistemológico – singularmente la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) y la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) – permitió empezar a abordar el estudio de la *modelización del papel del profesor*[8].

En los primeros trabajos de nuestra comunidad en esta línea de investigación se postula la importancia de la formación didáctica básica para *todas las profesiones del matemático* (y no sólo para los futuros profesores de matemáticas) y se empieza a criticar el prejuicio que lleva a buscar la solución de los problemas de la *formación del profesorado* en conocimientos que supuestamente "deben existir ya en algún lugar" y que, por tanto, únicamente faltaría identificarlos.

Las primeras aportaciones de nuestra comunidad a este basto problema pueden esquematizarse en dos apartados: una reformulación del problema para despersonalizarlo y situarlo en el ámbito más comprensivo de las Organizaciones Didácticas (OD) y una primera descripción de la codeterminación (o determinación recíproca) entre ciertos tipos ideales de OD y el modelo epistemológico de las matemáticas que las sustenta.

3.1. Reformulación en el ámbito de la TAD del problema del papel del profesor

Partiendo de la noción cultural de "prácticas docentes del profesor de matemáticas" se constata que dichas prácticas constituyen una parte inseparable de la "*praxeología didáctica espontánea del profesor*" (que contiene, además de la praxis, los discursos que interpretan y justifican dichas prácticas) y, por tanto, que es imprescindible modelizar ésta como un todo. Pero, además, lo que hace un profesor particular en una situación de enseñanza concreta proviene siempre de una *amalgama de préstamos institucionales* cuyas funciones permanecen desconocidas y que van cambiando a lo largo del tiempo. Se trata, por tanto, de una utilización ocasional y oportunista de fragmentos de una organización que denominaremos *praxeología (u organización) didáctica institucional.* Es obvio que para dar razón de la praxeología didáctica espontánea del profesor se requiere esta segunda ampliación del sistema empírico a modelizar. Sólo así se podrá superar el punto de

[8] Fue precisamente en l'École d'Été de 1991 en la que, por primera vez, se trató explícitamente en el ámbito del Programa Epistemológico el tema "*La place de l'enseignant dans le système didactique*".

vista de los enfoques esencialmente cognitivos e individualistas que pretenden responder a cuestiones del tipo:

(a) ¿Cómo caracterizar los *conocimientos* y las *concepciones de un profesor* (o de un determinado tipo de profesores)?

(b) ¿Cómo se relacionan dichas concepciones con las *prácticas docentes* que éstos llevan a cabo? ¿En qué medida los "puntos de vista respecto a lo que son las matemáticas y a cómo se deben enseñar" determinan las *prácticas docentes* que el profesor realiza efectivamente en el aula?

(c) ¿Cómo inciden los conocimientos y las concepciones del profesor sobre el *aprendizaje matemático de los alumnos*?

Sustituyendo este planteamiento por un conjunto de cuestiones mucho más comprensivas relativas a las OD institucionales y que, con las herramientas que proporciona la TAD, pueden formularse como sigue (Barbé et Alt. 2005):

(a) ¿Cómo caracterizar las *organizaciones didácticas* que viven en las instituciones escolares?

(b) ¿Cuáles son las restricciones que las OD imponen sobre la emergencia y la evolución de las *praxeologías espontáneas del profesor*? ¿Qué papel juega la formación matemático-didáctica del profesor en el desarrollo de su relación personal a las praxeologías matemáticas y didácticas institucionales?

(c) ¿Cómo se condicionan mutuamente las OD y las OM que viven en una institución escolar determinada? ¿Qué implicaciones tienen sobre la matemática "a enseñar" y sobre la matemática "efectivamente enseñada"?

Es obvio que los resultados de la investigación didáctica relativos a la *práctica docente del profesor de matemáticas* (y, más en general, los resultados relativos a la determinación mutua entre las OM y las OD escolares) deberán servir para modificar las condiciones de trabajo de éste (los dispositivos didácticos institucionalizados, la reorganización de la matemática escolar, el diseño de programas de estudio, etc.). Pero, en contra de la evidencia del sentido común, no está claro que todo conocimiento necesario para el control de una actividad deba ser forzosamente transmitido a los actores de dicha actividad, puesto que no está probado que dicho conocimiento explícito mejore la actividad en cuestión. Puede mostrarse que, en algunos casos y en determinadas condiciones, dicho conocimiento puede entorpecer y hasta desvirtuar el desarrollo de la actividad[9].

En otros términos, aunque tuviésemos resultados concluyentes respecto a los problemas relativos al papel del profesor de matemáticas en las OD escolares, no está claro en qué medida ni en qué forma sería conveniente enseñar estos resultados (o las *técnicas didácticas* que pudiesen derivarse de ellos) a dichos profesores como parte de su formación didáctica. Ésta es, por tanto, otra cuestión abierta y, por cierto, nada trivial.

[9] Esta idea, con ciertas variantes, aparece en Brousseau (1993): "La posibilidad de enseñar didáctica a los profesores depende de la capacidad de éstos para mantener una separación entre, por un lado, su actividad profesional como profesores de matemáticas, y por otro, los medios profesionales que posibilitan esta actividad. Y esta separación no está, en principio, asegurada. No se pueden lanzar en paracaídas resultados de didáctica a los profesores, sin más, de la misma manera que no se pueden dar medicamentos a un pueblo en el que no hay ni médicos ni hospitales. La eficacia docente de los conocimientos didácticos depende, por lo tanto, de la posibilidad social de organizar las relaciones futuras entre profesores y didactas. Sin esta organización fracasaremos. Y este es el punto crucial del desarrollo y control de la actividad de los profesores […]".

3.2. Descripción de los tipos ideales de OD y análisis de su relación con el modelo epistemológico de las matemáticas en el que se sustentan

Como respuesta (parcial) a las citadas cuestiones se caracterizaron tres tipos ideales de OD bidimensionales: *clásicas*, *empiristas* y *constructivistas* mostrando que cada uno de ellos se sustenta en un modelo epistemológico general de las matemáticas y se elaboró un "espacio" de los *tipos ideales de OD posibles* como instrumento metodológico para analizar las OD empíricas (Gascón 2001a).

Se ha mostrado que sobre las OD posibles en una institución determinada inciden restricciones más específicas que las que provienen del nivel de la disciplina matemática considerada como un todo (esto es, más específicas que las que provienen del modelo epistemológico *general* de las matemáticas) y, también, restricciones más genéricas. Entre las primeras se han estudiado las restricciones originadas por el modelo epistemológico *específico* de un área o de un sector de las matemáticas escolares y entre las segundas algunas las provenientes de los niveles "pedagógico", "escolar" y "social".

3.2.1. *El caso del álgebra elemental*

Se ha estudiado la influencia del modelo epistemológico específico del álgebra elemental dominante en la ESO sobre las OD que existen en esta institución escolar. Algunos trabajos han puesto de manifiesto que el modelo epistemológico específico del álgebra elemental es una parte esencial del discurso que pretende justificar, interpretar y engendrar las técnicas didácticas de la enseñanza del álgebra en la E.S.O. (Bolea, Bosch & Gascón 2001a, 2001b, 2004). Dado que el álgebra es un contenido presente "casi por todo" en la Enseñanza Secundaria de las matemáticas, su estudio abre la vía para estudiar la influencia del modelo epistemológico general (de las matemáticas) dominante en una institución escolar sobre las OD que pueden vivir en dicha institución. En la sección 5.1. se analiza con más detalle este caso.

3.2.2. *El caso de los límites de funciones*

En este caso hemos estudiado el fenómeno de la *bicefalia del currículum*, cuya explicación última habría que buscarla en el proceso histórico de *transposición didáctica*[10] y en la presión del discurso matemático sabio sobre la matemática enseñada en Secundaria. Como resultado de este fenómeno no ha sido posible articular la práctica matemática escolar que el diseño curricular propone llevar a cabo en la Secundaria post-obligatoria española con las exigencias "sabias" de rigor y formalismo correspondientes. El resultado final es conocido: en el diseño curricular de la enseñanza secundaria española no se construye un *discurso tecnológico* adecuado a la práctica de cálculo de límites que se puede desarrollar efectivamente en dicha institución ni se propone una *práctica matemática* que pueda sustentarse en la teoría de los límites de funciones (en términos ε-δ) que aparece efectivamente. Esta *teoría* debe considerarse como un mero "artefacto decorativo" puesto que no permite ni describir, ni justificar ni interpretar la actividad matemática que propone la escuela en torno a los límites de funciones (Barbé et Alt. 2005).

[10] La TAD puede considerarse como el desarrollo histórico de la Teoría de la Transposición Didáctica cuya primera publicación en forma de libro data de 1985 (Chevallard 1985/1991). En Bosch & Gascón (2007) se describe la evolución del enfoque antropológico entre 1980 y 2005 y sus principales aportaciones al desarrollo de la ciencia didáctica.

Este fenómeno de la *bicefalia* tiene dos consecuencias didácticas importantes:

(a) Provoca enormes dificultades para descifrar, a partir de los datos curriculares, *cuál es la OM a enseñar*. Es previsible que, de forma más o menos implícita, el profesor tome el "álgebra de límites" como la *OM a enseñar*, puesto que se trata de la OM local más cercana (en términos de los objetos matemáticos que la constituyen) al conjunto de tareas, técnicas y tecnologías existentes en el currículum a este nivel de enseñanza. Pero esta elección no eliminará las dificultades y hasta contradicciones originadas por la ausencia curricular de la tecnología matemática necesaria para interpretar y justificar la práctica efectivamente realizada y por la presencia de elementos tecnológicos "ajenos" a la misma.

(b) *Hace prácticamente imposible* "*dar sentido*" matemático a la OM a enseñar puesto que sin salir del tema del "cálculo de límites" no es posible dar cuenta del *porqué* y *para qué* debe estudiarse dicho tema. Pero el *encierro en el nivel temático* hace que el profesor no tenga ni los medios ni la legitimidad para reestructurar las relaciones entre el conjunto de los *temas* de un *sector* del currículum (y, mucho menos, de los *sectores* de un *área* como, por ejemplo, el cálculo diferencial escolar).

Tanto el fenómeno de la bicefalia como sus indeseables consecuencias didácticas pueden interpretarse, al menos parcialmente, como el resultado de la incidencia del modelo epistemológico específico de la OM escolar en torno a los límites de funciones sobre la OD escolar correspondiente (esto es, sobre la forma de organizar el proceso de estudio de los límites de funciones). Este trabajo constituye un ejemplo paradigmático de la fecundidad de los resultados de la investigación didáctica cuando se reformula en el ámbito de la TAD el problema del papel del profesor.

4. El problema "metadidáctico" de la naturaleza de la didáctica de las matemáticas como disciplina

El interés de nuestra comunidad por el problema de la *epistemología de la didáctica de las matemáticas*, esto es, por el problema de la naturaleza de la didáctica de las matemáticas como disciplina se remonta, de hecho, a los orígenes, en 1980. Ya en esa época se proponía, en contra de la ideología dominante en aquellos momentos, construir una nueva disciplina científico-experimental, la didáctica de las matemáticas, que tomase la actividad matemática como su objeto primario de estudio. Pero, naturalmente, el tratamiento sistemático de dicho problema ha requerido de desarrollos teóricos relativamente recientes y que, de hecho, se siguen elaborando[11].

[11] En 1991 nuestra comunidad se integra en un Seminario a nivel del estado español: el *Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas* (SI-IDM) que se funda en ese momento. Dicho Seminario ha mantenido una importante actividad científica desde su nacimiento hasta el año 2005. Entre sus objetivos fundacionales figura explícitamente y de manera muy relevante estudiar el problema de la naturaleza de la didáctica de las matemáticas como disciplina. No es de extrañar que, cuando en 1998 un importante número de miembros del SI-IDM manifestamos la intención de constituirnos como grupo de trabajo en el seno de la incipiente *Sociedad Española de Investigadores en Educación Matemática* (SEIEM), lo hiciésemos bajo la denominación de *Didáctica de las Matemáticas como Disciplina Científica* (DMDC). De hecho, una de las preocupaciones principales comunes al SI-IDM y al grupo DMDC gira en torno al esclarecimiento del objeto de estudio propio de la didáctica de las matemáticas, la naturaleza de los problemas didácticos, la relación de la didáctica con otras disciplinas y, muy en especial, a las relaciones entre las matemáticas y la didáctica de las matemáticas.

Un primer posicionamiento de nuestra comunidad en relación a este problema es el siguiente: para clarificar el problema "metadidáctico" debemos realizar el esfuerzo de evitar confusiones entre las *prácticas sociales* relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y la *disciplina* que estudia los fenómenos emergentes de dichas prácticas. A fin de contribuir a clarificar dicha distinción, parece razonable, al menos en este punto, seguir la tradición europea y denominar "*didáctica de las matemáticas*" a la disciplina en cuestión[12].

Es precisamente en el momento en que la didáctica de las matemáticas se distingue de ese conglomerado de "enfoques", "paradigmas", "teorías", "tradiciones" y "prácticas profesionales" de diversos tipos que constituyen lo que habitualmente se denomina *Mathematics Education*, cuando puede empezar a ser considerada como disciplina autónoma (relativamente, como todas) y cuando puede surgir la cuestión epistemológica de cuál es su naturaleza como tal disciplina y, en particular, la cuestión del *universo de disciplinas* en el que se sitúa, así como el ámbito dentro del cual hemos de *delimitar su objeto de estudio*. La respuesta a estas cuestiones determinará en gran medida el tipo de problemas que tratará y, por tanto, la naturaleza de la disciplina.

Siguiendo el punto de vista de Yves Chevallard en este problema, nuestra comunidad propone situar la *didáctica de las matemáticas* en el universo de la *antropología de las matemáticas* (Chevallard 1991) en el que compartirá con la historia y la epistemología[13] de las matemáticas un mismo objeto de estudio: *la génesis, el desarrollo, la utilización y la difusión personal e institucional del saber matemático*. Cada una de estas disciplinas se caracterizará, dentro del ámbito de la antropología de las matemáticas, por la *forma específica de tomar en consideración* "*lo matemático*". En una primera aproximación propusimos caracterizar la didáctica de las matemáticas, en el ámbito de la antropología de las matemáticas, como la disciplina cuya manera específica de tomar en consideración "lo matemático" consiste en *integrarlo con* "*lo pedagógico*". Simplificando mucho las cosas, se postula que existen, esencialmente, dos maneras diferentes de llevar a cabo este proceso de integración o *didactificación conjunta de lo pedagógico y lo matemático* que se corresponden con los dos Programas de Investigación que aparecen en cierta reconstrucción racional del desarrollo de la didáctica de las matemáticas[14].

Desde el punto de vista del Programa Cognitivo se supone que el problema de la Educación Matemática puede ser abordado y resuelto a partir del análisis de

[12] Nuestra disciplina recibe diferentes nombres en las diversas tradiciones culturales. Entre éstos figura el de "*Matemática Educativa*" que, al parecer, se acuñó en México y se utiliza en algunos países iberoamericanos. "En el mundo anglosajón, el nombre que le han dado a la práctica social asociada es el de *Mathematics Education*, mientras que en la Europa continental le han llamado [a la disciplina] *didactique des mathématiques* o *didaktik der mathematik* [...]" (Cantoral 1996, p. 133).

[13] La epistemología de las matemáticas tal como se la conceptualiza en nuestra comunidad es el resultado de una doble ampliación de la epistemología clásica: la primera tuvo lugar a partir de la década de los setenta gracias, especialmente, a los trabajos de Imre Lakatos (1971, 1976, 1978a, 978b); la segunda ampliación de la epistemología de las matemáticas está generada por la necesaria ampliación de su base empírica para alcanzar el rango de disciplina "experimental" (Gascón 1993).

[14] Se utiliza la *reconstrucción racional* (Lakatos 1971), de la evolución de la didáctica de las matemáticas que se describe inicialmente en Gascón (1998) y se desarrolla en Gascón (2002, 2003a, 2003b) y que expresa nuestro punto de vista respecto a la naturaleza de nuestra disciplina. Partiendo de la *problemática de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*, –como objeto de investigación básico de la didáctica de las matemáticas– se postula la existencia de dos ampliaciones sucesivas de dicha problemática que modifican progresivamente su *objeto primario de investigación* dando origen, respectivamente, a dos Programas de Investigación (Lakatos 1978b) en didáctica de las matemáticas: el *Programa Cognitivo* y el *Programa Epistemológico*.

ciertas *características individuales de los sujetos* (actitudinales, cognitivas, metacognitivas, motivacionales, lingüísticas, etc.) relativas a su relación con los *objetos matemáticos*. Por tanto, para tratar dicho problema, la didáctica de las matemáticas debe construir y contrastar empíricamente modelos:

(a) De la *estructura cognitiva* asociada a un concepto.

(b) Del *desarrollo del pensamiento matemático* del sujeto.

Así, por ejemplo, Ed Dubinsky inicia la Teoría APOS (Asiala et Alt. 1996) a partir de la reformulación del mecanismo de la *abstracción reflexiva* de Piaget, para aplicarla a las matemáticas "avanzadas" y considera que: "La teoría *APOS* trata de describir el desarrollo, en la mente del alumno, de la comprensión de un concepto matemático". (Dubinsky 2000, p. 61). Por su parte, Alan H. Schoenfeld considera, análogamente, que elaborar una "*teoría de la mente*" es uno de los objetivos principales de la Investigación en Educación Matemática (Schoenfeld 2001).

Desde el punto de vista del Programa Epistemológico, por el contrario, el problema de la Educación Matemática debe ser abordado a partir del análisis de las *prácticas matemáticas* que se llevan a cabo en las diferentes instituciones (no sólo docentes). Por tanto, para tratar dicho problema, la didáctica de las matemáticas debe construir y contrastar empíricamente:

(a) Un modelo *epistemológico general* de las matemáticas y los correspondientes *modelos locales* de sus diferentes ámbitos (que deben ser coherentes con el modelo epistemológico general).

(b) Modelos de la *génesis y el desarrollo* (la "ecología") *de las OM* en cada una de las instituciones y de su *difusión* intra-institucional e inter-institucional.

Esta hipótesis provoca una *matematización*[15] del problema de la Educación Matemática y, al mismo tiempo, una *despersonalización* del mismo puesto que lo sitúa a un *nivel institucional*, relativamente independiente de la *voluntad*, la *formación*, la *motivación*[16] y las restantes *características individuales* de los sujetos de las instituciones (Gascón 2002).

5. Líneas de investigación en torno al gran problema del currículum

Todos los problemas que nuestra comunidad ha ido formulando y abordando a lo largo de estos 30 años y, en particular, aquellos que han convergido en las tesis que se han dirigido y elaborado en su seno, presentan dos características principales:

(a) Por una parte tienden a abarcar un ámbito cada vez más amplio del universo didáctico-matemático. Se observa una tendencia a tratar problemas didácticos cuyo ámbito matemático engloba, al menos, el nivel de las áreas (el álgebra, la geometría o el cálculo) mucho más allá de las nociones, los objetos y los temas matemáticos concretos.

[15] Puesto que el análisis científico de las prácticas matemáticas requiere *elaborar* modelos epistemológicos nuevos de los diferentes ámbitos de las matemáticas (así como un modelo epistemológico general). Esto no puede hacerse sin llevar a cabo *reorganizaciones* de los saberes matemáticos para que puedan ser reconstruidos en las diferentes instituciones y difundidos entre ellas. Dichas reorganizaciones deben ser consideradas como una actividad genuinamente matemática.

[16] Así, por ejemplo, cuando se pretende resolver el problema de la Educación Matemática apelando básicamente a la *formación de los profesores* y a la *motivación de los alumnos* se vuelve a caer en el mito pedagógico que, resurgiendo de sus cenizas, vuele a proponer una presunta "solución" repetidamente fracasada.

(b) Y, por otra, se relacionan con aspectos específicos del que podríamos llamar *problema del currículum* (¿Cómo diseñar, de manera didácticamente fundamentada, el currículum de matemáticas para cierta etapa educativa?) y con el problema asociado al fenómeno de la *desarticulación* de la matemática escolar (¿Cómo organizar la enseñanza escolar de las matemáticas de manera que provoque la articulación de todos los tipos de contenidos que propone el currículum: procedimentales, conceptuales y actitudinales? ¿Cómo conseguir, en definitiva, que los conocimientos matemáticos aprendidos por los alumnos no se reduzcan a un conjunto completamente desarticulado de técnicas más o menos algorítmicas y carentes de sentido?).

Podría decirse que ha sido la propia evolución interna de cada uno de los problemas, construidos y abordados con la ayuda de las herramientas que proporciona la TAD, la que ha provocado un desarrollo de la problemática en esta dirección.

En lo que sigue, para simplificar el relato, agruparemos los tipos de problemas didácticos estudiados en torno a *líneas de investigación* que, a su vez, cristalizan en sendas tesis doctorales dirigidas y realizadas dentro de nuestra comunidad. Hay que subrayar, sin embargo, que las intersecciones entre estas diferentes líneas de investigación –así como entre cada una de ellas y los problemas más generales descritos anteriormente– son múltiples. Por otra parte, muchos de los trabajos que desembocaron en un proyecto de tesis doctoral se iniciaron con bastante anterioridad a la explicitación de dicho proyecto y, como es natural, se prolongan más allá de la lectura de la tesis.

5.1. El proceso de algebrización de las Organizaciones Matemáticas escolares[17]

La línea de investigación que desemboca en el trabajo de tesis de Pilar Bolea tiene su origen en los trabajos germinales de Yves Chevallard (1985, 1989a, 1989b, 1989c) y en otros trabajos que relacionan el patrón de *Análisis-Síntesis* con la emergencia del lenguaje algebraico (Gascón 1989, 1993, 1993-94, 1999a). En estos trabajos preliminares se desarrollan algunas ideas que relacionaban el Patrón de Análisis-Síntesis con la emergencia del lenguaje algebraico (o, en la terminología de Lakatos, que ponían de manifiesto la "naturaleza analítica del álgebra). A partir de este momento hemos desarrollado una gran cantidad de esfuerzos (artículos, cursos de doctorado y ponencias) en esta dirección. Aunque no es posible resumir las aportaciones de esta línea de trabajo, esquematizaremos brevemente en lo que sigue las principales cuestiones tratadas en este ámbito hasta el año 2002, añadiendo en cada caso algún elemento de respuesta a la misma.

1. *El "álgebra elemental", ¿aparece en la ESO como una OM en sí misma o como un instrumento de estudio de otras praxeologías*? Ni como una cosa ni como la otra. Debería aparecer inicialmente como un "instrumento algebraico" para dar origen, progresivamente, a OM cada vez más algebrizadas. Sólo posteriormente el modelo algebraico puede independizarse del sistema de partida.

[17] Esta línea de investigación cristalizó en la tesis doctoral de Pilar Bolea defendida en 2002 (Bolea 2003).

2. *Utilizando la estructura de las OM, ¿cómo se pueden caracterizar las modelizaciones algebraicas en el conjunto de modelizaciones matemáticas*? (a) Permiten modelizar explícita y materialmente las técnicas matemáticas. (b) Sitúan el modelo en el nivel tecnológico de la OM modelizada. (c) El modelo algebraico de una OM puede interpretarse como una extensión de OM.

3. *¿Qué relación hay entre las modelizaciones algebraicas y el grado de algebrización de las praxeologías matemáticas*? Existe una *dualidad* entre las OM algebrizadas (que hemos caracterizado a partir de un conjunto de indicadores IGA1-IGA4) y las modelizaciones algebraicas.

4. *¿Cómo se transforman las OM y la OD a lo largo del proceso de algebrización*? (a) Integración de los componentes de OM. (b) Reducción drástica del material ostensivo utilizado. (c) Completación relativa de la OM.

5. *¿Cuál es el grado de algebrización de las OM que se estudian actualmente en la Enseñanza Secundaria*? Fenómeno de la desalgebrización del currículum de la ESO. Carácter problemático del proceso de algebrización de las OM escolares (contradicción con el contrato didáctico institucional vigente actualmente en la ESO).

6. *¿Por qué, en la institución escolar de Secundaria, se tiende a identificar el "álgebra" con una obra que prolonga y generaliza unilateralmente la "aritmética escolar" (aritmética generalizada)? ¿Por qué la introducción al álgebra escolar siempre está ligada a la aritmética? ¿Cómo se relaciona este fenómeno, que podríamos denominar "aritmetización del álgebra escolar" con el fenómeno, aparentemente inverso, de la "algebrización de la aritmética escolar moderna*"? Fenómeno de la atomización del proceso de estudio en las instituciones escolares.

7. *¿Es posible algebrizar una OM concreta en el segundo ciclo de la ESO (14-16 años), aunque ésta aparezca como una obra prealgebraica en la OM escolar*? Las modificaciones encaminadas a hacer vivir localmente una OM algebrizada en la ESO serán inestables y tenderán a desaparecer a corto plazo. Ver el caso de la divisibilidad (Gascón 2001b).

8. *¿Qué características específicas, en términos de los momentos del estudio y de los dispositivos didácticos, debería tener una OD escolar para hacer posible el estudio escolar de una OM plenamente algebrizada? ¿Cuáles son las restricciones que dificultan la existencia de este tipo de procesos de estudio en la Enseñanza Secundaria*? (a) Posibilidad de llevar a cabo un cuestionamiento tecnológico. (b) Potenciación del carácter manipulativo (escrito) del momento exploratorio. (c) Creación de un dispositivo didáctico en el pudiese vivir el momento del trabajo de la técnica.

9. *¿Cómo podemos describir y analizar la actividad didáctica del profesor como director del proceso de estudio del álgebra escolar? ¿Cuál es la "tecnología didáctica" dominante en la ESO respecto del álgebra escolar? ¿Cómo afecta dicha tecnología –esto es, el discurso interpretativo y justificativo de las técnicas didácticas que se utilizan en la enseñanza del álgebra– sobre el proceso de estudio?* El modelo que identifica el "álgebra escolar" con una prolongación y generalización unilateral de la "aritmética escolar" (aritmética generalizada) constituye la base sobre la que

descansa la tecnología didáctica espontánea del profesor respecto de la enseñanza del álgebra escolar.

5.2. Discontinuidades Matemáticas y Didácticas entre la Secundaria y la Universidad[18]

Partiendo de un problema docente que es percibido como "acuciante" por parte de los profesores de matemáticas del primer ciclo universitario, se inició esta línea de investigación en la década de los años 90 (Gascón 1997).

Fue en el año 2000 cuando de manera clara se empezó a formular una conjetura general, a modo de hipótesis básica de esta línea de investigación, utilizando las nociones de *praxeología puntual*, *local* y *regional*. Se trata de una caracterización de las OM que se estudian en Secundaria como *puntuales*, *rígidas* y *aisladas* y de las OM que se estudian en la Universidad como *regionales* cuya presentación suele concentrarse, por razones de economía, en una teoría en la que la OM en cuestión acaba cristalizando. En ambas instituciones se dificulta enormemente la reconstrucción de OM *locales relativamente completas* lo que hace que el tránsito de Secundaria a la Universidad sea un momento especialmente delicado del proceso global de estudio de las matemáticas y ponga de manifiesto de manera prototípica el *fenómeno de la desarticulación de la matemática escolar*.

Los trabajos que se sitúan en esta línea de investigación giran en torno a cinco conjeturas específicas que hemos propuesto para describir en primera instancia los diferentes aspectos o dimensiones de la rigidez de las OM que, según la conjetura general, se estudian en Secundaria:

C1: Dependencia de la nomenclatura asociada a una técnica.

C2: Ausencia del cuestionamiento tecnológico de las técnicas y, en particular, de la interpretación del resultado obtenido con ella.

C3: Inexistencia de dos técnicas escolares diferentes para realizar una misma tarea. No forma parte de la responsabilidad matemática asignada al alumno decidir de entre dos técnicas (o dos variaciones de una misma técnica) cuál es la más adecuada para realizar una tarea concreta.

C4: No reversión de las técnicas para realizar la tarea "inversa" de una tarea dada.

C5: Ausencia de situaciones abiertas que requieran un trabajo de modelización.

La metodología de investigación utilizada consistió en la comparación entre dos tipos de indicadores empíricos de estas conjeturas (una muestra de estudiantes de primeros cursos de diferentes facultades y escuelas técnicas y una muestra de los libros de texto más utilizados. Los resultados obtenidos en esa comparación ponen claramente de manifiesto que la *relación personal* de los alumnos a las OM que se estudian en Secundaria está esencialmente determinada por la *relación institucional* a dichas OM. Se confirma, una vez más, que el origen del fenómeno que estamos analizando es institucional, lo que constituye uno de los postulados básicos del enfoque epistemológico.

---

[18] Esta línea de investigación cristalizó en la tesis doctoral de Cecilio Fonseca (2004).

Otro resultado importante obtenido en esta línea de investigación es la caracterización de las *OM locales relativamente completas* tanto en lo que se refiere a su estructura, en términos de los componentes que la constituyen: tipos de problemas, técnicas, tecnología y teoría, como al proceso de una hipotética reconstrucción escolar de las mismas, en términos de momentos del proceso de estudio (Bosch, Fonseca & Gascón 2004)

Asimismo se puso de manifiesto la conveniencia de partir de una cuestión (que acabará siendo la "razón de ser" de la OM que se construirá) suficientemente rica como para generar nuevas cuestiones y requerir como respuesta una OM local relativamente completa. Dicha cuestión puede ser intramatemática o extramatemática. Así, por ejemplo, algunos trabajos partieron de una cuestión planteable en el ámbito de la economía y cuya respuesta requiere construir una OM local relativamente completa en torno a la diagonalización de matrices (Bosch, Fonseca & Gascón 2003). Resultó, en definitiva, que las discontinuidades entre la Secundaria y la Universidad no dependen únicamente, ni principalmente, de la naturaleza de las OM que se estudian en Secundaria y que se han caracterizado como OM *puntuales*, *rígidas* y *aisladas*. En efecto, otra de las aportaciones importantes de esta línea de investigación demuestra que en la Enseñanza Universitaria no se retoman las técnicas matemáticas que se estudian en Secundaria para mostrar sus limitaciones, desarrollarlas con ayuda de los nuevos elementos tecnológicos y teóricos que aporta la matemática universitaria e incluirlas en OM más amplias (locales, regionales, …) y completas. Y esto es así incluso en aquellos casos en que las técnicas de Secundaria se vuelven a utilizar en la Universidad como es el caso de la Regla de Ruffini (Bosch, Fonseca & Gascón, to appear**)**.

5.3. La modelización como instrumento de articulación de la matemática escolar. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales[19]

El problema de la articulación de la matemática escolar o, en otros términos, la problemática en torno al fenómeno de la desarticulación de las OM escolares y en particular el aislamiento escolar de la *relación de proporcionalidad*, ha estado latente desde mediados de los años 90. En efecto en un libro de texto del año 1995 ya se proponía una OM a enseñar (en torno a las relaciones funcionales entre dos magnitudes) que *integra la relación de proporcionalidad de magnitudes* como una más dentro de un determinado conjunto limitado de relaciones funcionales. Esta propuesta podría interpretarse como una aportación implícita al problema didáctico de la articulación de la matemática escolar. Sin embargo hay que esperar al año 2001 para que se relacione explícitamente la articulación con la modelización matemática. Los primeros trabajos en dicha dirección se refieren a la desarticulación de la geometría escolar y, en particular, con el estudio de la incidencia del *autismo temático* sobre dicha desarticulación (Gascón 2003c; García et Alt. 2006).

En el caso de la proporcionalidad este punto de vista requiere cuestionar el modelo epistemológico de la proporcionalidad que se desprende de los libros de texto y del diseño curricular y que, por tanto, es el dominante en la institución escolar

[19] Esta línea de investigación culminó en la tesis doctoral de Francisco Javier García (2005). La profesora Luisa Ruiz Higueras de la Universidad de Jaén asumió la codirección de esta tesis doctoral.

y acaba siendo asumido implícitamente (y acríticamente) por la inmensa mayoría de las investigaciones en este campo.

El cuestionamiento de dicho modelo ha conducido a discutir abiertamente la posibilidad de tomar el "*razonamiento proporcional*" como objeto de estudio en sí mismo. Dado que el aislamiento de la proporcionalidad como ámbito de investigación se corresponde con la distribución tradicional de la matemática escolar (en temas, sectores y áreas) impuesta por los programas oficiales, la tesis también cuestiona el criterio que guía dichos programas para aislar la relación funcional de proporcionalidad y sugiere alternativas.

De este doble cuestionamiento, que pone en tela de juicio la pertinencia de aislar la proporcionalidad como objeto de investigación y como objeto matemático a enseñar, surge otra de las principales aportaciones de esta línea de investigación: el problema didáctico de la proporcionalidad debe ser integrado en el estudio mucho más comprensivo del problema de la enseñanza-aprendizaje de las *relaciones funcionales entre magnitudes*.

La respuesta que proponemos al problema didáctico planteado se materializa en el diseño y experimentación de un *Recorrido de Estudio e Investigación* (REI) (Chevallard 2005, 2006) generado por una cuestión relativa a los posibles Planes de Ahorro.

(a) En primer lugar se postula que la necesaria articulación entre las OM escolares en torno a las relaciones funcionales entre magnitudes (incluyendo entre ellas la relación de proporcionalidad) debe partir del *cuestionamiento de las razones de ser* de dichas relaciones funcionales y de la posibilidad de plantearlas más allá del nivel temático.

(b) En segundo lugar se acepta que la citada razón de ser común a las relaciones funcionales entre magnitudes radica en la problemática de la *modelización de sistemas* en los que dos o más magnitudes son susceptibles de estar relacionadas entre sí. Este segundo postulado responde a la *capacidad articuladora* de la actividad de modelización matemática.

5.4. Lo matemático en la creación y análisis de Organizaciones Didácticas. El caso de los Sistemas de Numeración y la medida de magnitudes continuas[20]

En la confluencia del problema metadidáctico (sobre la epistemología de la didáctica de las matemáticas) y el problema del papel del profesor en las OD escolares se encuentra el problema de la relación entre "lo matemático" y "lo didáctico". Con los instrumentos que proporciona la TAD se ha empezado a estudiar este último problema en dos casos muy relacionados entre sí: la medida de magnitudes continuas y los sistemas de numeración. En ambos casos "lo matemático" aparece como el núcleo o el "esqueleto" en torno al que se estructura la organización del proceso de estudio, esto es, la Organización Didáctica.

En el caso de los *Sistemas de Numeración* se parte de una *cuestión generatriz* que pretende indagar cuáles son las características que cumple nuestro sistema de numeración (posicional completo) para que se haya impuesto de manera absoluta

[20] Esta línea de investigación ha dado origen al trabajo de tesis doctoral de Tomás Ángel Sierra (2006).

sobre todos los que han existido a lo largo de la historia (cosa que no ha sucedido, por ejemplo, con las lenguas).

Se diseñó y experimentó un proceso de estudio en el que la reconstrucción del sistema de numeración posicional completo se obtenía como el resultado final de una sucesión creciente de OM que abarcan tipos de problemas cada vez más amplios y técnicas progresivamente más potentes.

$$q \to OM_i \subset OM_a \subset OM_h \subset OM_p$$

En este esquema del MER diseñado, *q* representa la citada cuestión generatriz, OM_i la Organización Matemática inicial que o bien dispone de un solo símbolo o bien de infinitos símbolos (uno para cada número natural). Las tres últimas Organizaciones Matemáticas son, respectivamente, OM desarrolladas entorno a: un sistema de numeración "aditivo" (OM_a), un sistema de numeración "híbrido" (OM_h) y un sistema de numeración "posicional" (OM_p). Cada una de estas OM intermedias constituye un eslabón del "esqueleto" matemático y puede considerarse como una respuesta parcial y provisional (que se completa relativamente en la siguiente OM de la cadena) a la cuestión generatriz.

El objetivo del proceso didáctico no puede reducirse en ningún caso a la OM_p finalmente construida (que no es otra que la OM en torno a al sistema de numeración posicional completo) sino que debe abarcar todo el recorrido de estudio puesto que las OM intermedias son las que *motivan y dan sentido* a la OM final.

En el caso de la *medida de magnitudes continuas* se elaboró un MER con el objetivo de integrar los tres dominios que, según Brousseau (2000) aparecen separados para los alumnos y de una manera un poco confusa: (a) el universo de los objetos medibles concretos, (b) el universo de los procedimientos de definición de la aplicación medida y (c) el universo de la estructura numérica. Dicha integración comporta la decisión de incluir en el MER de la medida de magnitudes el universo de los *objetos medibles* y la actividad de *medición efectiva*, lo que contrasta con la práctica escolar habitual que no considera dicho universo como verdaderamente "matemático" debido a la sujeción de la Escuela a la institución "sabia" productora del saber.

Mediante dicha integración se pretendía empezar a poner las condiciones que permitan superar el fenómeno indeseable de la *aritmetización de la medida* y, por otra, volver a instaurar en la matemática escolar la *dialéctica entre la medida exacta y la medida aproximada*.

5.5. Metacognición, Resolución de Problemas y Enseñanza de las Matemáticas. Reformulación de la problemática de la metacognición desde el enfoque antropológico[21]

Utilizando las herramientas que proporciona el enfoque antropológico (en particular, la *complejidad creciente de las praxeologías* y los *niveles de codeterminación didáctica*) se muestra que la problemática en torno a lo que habitualmente se denomina "metacognición" puede interpretarse como un aspecto más de la actividad matemática y tratarse propiamente en el ámbito de la

[21] Esta línea de investigación ha dado origen al trabajo de tesis doctoral de Esther Rodríguez (2005).

problemática didáctico-matemática. Se trata, en definitiva, de abordar, con las nuevas herramientas, algunos de los problemas didácticos que habían quedado abiertos en antiguas investigaciones en torno a la resolución de problemas de matemáticas.

Así el problema del papel de la *metacognición* en la resolución de problemas de matemáticas se ha abordado utilizando una reformulación del problema que parte de reinterpretar los "hechos didácticos" que están en la base del Problema de Pólya[22] abordado por el movimiento clásico del *Problem Solving* (Rodríguez, Bosch & Gascón 2008).

Desde el punto de vista de la TAD se postula que muchos de los hechos didácticos que son considerados como indicios de *dificultades cognitivas o metacognitivas de los estudiantes* pueden explicarse mejor a partir del análisis de la estructura de las OM y de las OD que tienen cabida en la institución escolar. Para sustentar esta afirmación se reinterpretaron como sigue algunos de los hechos que constituyen la base empírica del Problema de Pólya.

(1) La *planificación de estrategias* matemáticas para resolver problemas no rutinarios requiere poder situar el problema en una OM al menos local y esto es muy difícil en las actuales instituciones docentes puesto que, como hemos mostrado en trabajos anteriores, las OM locales relativamente completas están prácticamente ausentes en la matemática escolar (Bosch, Fonseca & Gascón 2004).

(2) El *control de las estrategias* matemáticas y la capacidad de *evaluar* y *regular* su funcionamiento y sus resultados sólo pueden llevarse a cabo en relación explícita con la *razón de ser* de la OM en la que el problema en cuestión ha surgido, esto es, en referencia a las cuestiones a las que dicha OM responde. Pero de nuevo hay que recordar que la ausencia escolar de la razón de ser de las OM que se estudian en la Escuela es un hecho habitual que está directamente relacionado con un fenómeno didáctico de largo alcance que se ha denominado *autismo temático* (Chevallard 2001, Gascón 2003c).

(3) Para incluir la denominada *regulación metacognitiva* en la escuela habría que superar la separación estricta entre lo (considerado como) matemático y lo (considerado como) pedagógico en la institución escolar. Esto comportaría una nueva distribución de responsabilidades entre el profesor y los estudiantes que llevaría a compartir, en cierta medida, algunas responsabilidades presuntamente pedagógicas (en el sentido de no matemáticas) y que el *contrato didáctico* actual asigna en exclusiva al profesor.

5.6. Ecología de la Modelización Matemática en la enseñanza universitaria de las Matemáticas. Los Recorridos de Estudio e Investigación[23]

Dado un programa oficial de estudios propuesto en una institución docente determinada y descrito en términos clásicos, esto es, mediante temas (que

[22] El que denominamos "problema de Pólya" puede formularse en los siguientes términos: Suponiendo que los estudiantes dominan las técnicas "básicas" o elementales y poseen los conocimientos matemáticos necesarios, ¿cómo conseguir que sean capaces de construir y utilizar adecuadamente *estrategias complejas* para resolver "verdaderos" problemas matemáticos o problemas "creativos"? (Bosch & Gascón 2005).

[23] Esta línea de investigación ha dado origen al trabajo de tesis doctoral de Berta Barquero (2009).

contienen "definiciones", "teoremas", "demostraciones" y algunos tipos de problemas), ¿cómo diseñar un proceso de estudio que permita articular en una OM suficientemente comprensiva y relativamente completa las OM puntuales y bastante rígidas que aparecen aisladas en el programa en cuestión?

Se postuló que la modelización matemática ha de jugar un papel esencial en este proceso de articulación y, en consecuencia, cualquier ingeniería didáctica deberá sustentarse en un análisis previo de las *restricciones transpositivas* que dificultan que la modelización matemática viva con normalidad en las instituciones docentes, incluyendo las de nivel universitario.

Así, después de reformular el problema docente de la enseñanza de las matemáticas en CCEE en términos de *articulación y funcionalidad* de la matemática enseñada para que ésta pueda utilizarse como herramientas para *dar respuesta a cuestiones problemáticas* dentro de las CCEE, se plantea una segunda reformulación en la que la modelización, en sentido clásico, juega un papel central: ¿cómo conseguir que las matemáticas se enseñen como una *herramienta de modelización de situaciones* o *hechos científicos*, de tal forma que la enseñanza globalmente considerada no se organice en función de los contenidos matemáticos sino de los problemas o proyectos que los estudiantes deben realizar?

Pero la formulación del problema en el ámbito de la TAD requirió, además, una redefinición de la noción de *modelización matemática* para integrarla en el modelo epistemológico de las matemáticas que propone la TAD y una ampliación del espacio institucional tradicionalmente reservado a la didáctica de las matemáticas a fin de subrayar la *dimensión ecológica* del problema:

(a) ¿Qué *condiciones* se requieren y qué *restricciones* dificultan o impiden que las OM se enseñen, aprendan, estudien y utilicen como herramientas de modelización en los actuales sistemas de enseñanza de las matemáticas para CCEE?

(b) ¿En qué nivel de la *escala de codeterminación matemático-didáctica* aparecen estas restricciones y en qué nivel deberíamos situarnos para poder considerarlas como condiciones "modificables"?

(c) ¿Qué tipo de OD posibilitarían una integración global (más allá de una experimentación local) de la modelización matemática (interpretada como la TAD propone) en los citados sistemas de enseñanza? ¿Cuál es la *ecología* de estas organizaciones didácticas?

Para empezar a responder al problema didáctico así planteado hemos llevado a cabo un estudio empírico muy amplio con ayuda del cual hemos ido caracterizando el modelo didáctico y el modelo epistemológico dominantes en la institución universitaria de los que se desprenden las primeras restricciones sobre la vida de la modelización matemática en las instituciones universitarias. Para responder a estas restricciones, hemos propuesto, diseñado e implementado un nuevo dispositivo didáctico, los *Recorridos de Estudio e Investigación* (REI) introducidos por Chevallard (2005, 2006). Este nuevo dispositivo didáctico apuesta por la introducción de una nueva epistemología escolar que reemplaza el paradigma escolar de la "monumentalización" de los saberes por un paradigma de cuestionamiento del mundo.

A propósito de los REI, podemos esquematizar una evolución que se inició en la problemática docente en torno al papel de la *resolución de problemas* en la enseñanza de las matemáticas (y cuya respuesta inicial fue propuesta por el movimiento clásico del *Problem Solving*), continuó con la problemática en torno al papel del *trabajo de la técnica* como dimensión esencial de la actividad matemática (y cuya respuesta la proporcionó el *Taller de Prácticas Matemáticas*) y que ahora culmina en los REI como dispositivo didáctico que constituye la respuesta de la TAD al problema de la desarticulación y de la falta de sentido de la matemática escolar.

5.7. Iniciación escolar al álgebra elemental y su articulación con la modelización funcional[24]

Después de los citados trabajos de tesis de Javier García surgió la necesidad de estudiar el *problema ecológico* de la modelización funcional lo que requirió, a su vez, la elaboración previa de un MER de dicho ámbito de la matemática escolar (situado, en el caso de España, en el nivel de Bachillerato, esto es, para alumnos de entre 16 y 18 años). Al abordar el correspondiente problema de ingeniería didáctica mediante el *diseño y experimentación* de un proceso de estudio en el que la modelización funcional era imprescindible, aparecieron múltiples *restricciones* institucionales entre las que destaca el *carácter prealgebraico* de la matemática escolar (Ruiz Munzón et Alt. 2007a, 2007b). Reaparecía así el problema, en cierto sentido "previo", de la necesaria introducción temprana del álgebra elemental que aunque había sido descrito y analizado en la tesis de Pilar Bolea, no había sido tratado en su totalidad.

Apareció así la conveniencia de diseñar un MER capaz de articular globalmente la introducción del álgebra elemental en los primeros cursos de la ESO (12-14 años), lo que incluye el lenguaje algebraico y los números negativos (Bolea & Cid 2007), con el desarrollo del instrumento algebraico en la segunda etapa de la ESO (14-16 años) y con la modelización funcional en el Bachillerato (16-18 años). Dicho MER se formuló en términos de una sucesión de OM cada vez más amplias y completas de tal manera que cada una de las OM que aparecen puede considerarse como un modelo matemático de la anterior (Ruiz Munzón et Alt. to appear).

Nos planteamos, en primer lugar, el problema de *cómo introducir el álgebra* (entendida como un instrumento de modelización) en la primera etapa de la ESO (12-14 años). Mostramos, mediante un desarrollo teórico y un extenso trabajo experimental, que es posible introducir el instrumento algebraico en la enseñanza obligatoria de manera completamente *funcional*, en lugar de reducir el álgebra elemental a la *manipulación formal* del cálculo algebraico (lo que incluye la resolución de ecuaciones y la resolución de ciertos prototipos de problemas de "planteo algebraico").

Para ello fue necesario proponer una "razón de ser" del álgebra escolar, esto es, explicitar y dar visibilidad institucional a un tipo de cuestiones que, postulamos, son las cuestiones que viene a resolver la modelización algebraica y las que dan sentido a la introducción temprana del álgebra. Además, dado que pretendíamos iniciar a los alumnos en el *uso de la modelización algebraica*, debíamos elegir un

[24] Esta línea de investigación ha dado origen al trabajo de tesis doctoral en fase de finalización de Noemí Ruiz Munzón que se presentará en el Departamento de Matemáticas de la Universitat Autònoma de Barcelona.

sistema inicial para modelizar que cumpla fuertes restricciones institucionales, puesto que situamos la citada introducción en la primera etapa de la ESO española (en concreto en el segundo curso, 13-14 años). Tomamos como punto de partida el sistema de los "*problemas aritméticos*", esto es, problemas que pueden resolverse mediante una cadena de operaciones aritméticas (+, –, ×, /) ejecutables a partir de los *datos* que acostumbran a ser cantidades conocidas de ciertas magnitudes. Tanto las cantidades que resultan de las operaciones intermedias como la *cantidad incógnita*, tienen que poder ser interpretadas en el contexto del enunciado del problema. Las técnicas clásicas de resolución de los problemas aritméticos escolares se materializan en *discursos verbales* que, partiendo de los datos y mediante una cadena de operaciones aritméticas, permiten calcular la cantidad incógnita.

¿Qué cuestiones problemáticas pueden dar sentido (requerir necesariamente) la introducción funcional del lenguaje algebraico? Postulamos que se trata de un tipo de cuestiones que se caracterizan por *plantearse en términos de relaciones* entre las variables del problema y cuya respuesta es, en general, otra *relación*. Una vez que los alumnos estén en posesión del instrumento algebraico, ¿qué ampliaciones progresivas de dicha OM se requerirán para avanzar en las *sucesivas etapas del proceso de algebrización*? ¿Qué nuevos dispositivos didácticos se requerirán para llevarlo a cabo? A medida que avance el proceso de algebrización, ¿cómo se modificará el estudio del resto de las OM escolares? ¿Cómo se reorganizará el currículum de matemáticas de la Enseñanza Secundaria, desde la divisibilidad, la geometría sintética, la probabilidad y la estadística, hasta el estudio de las relaciones funcionales entre magnitudes y la introducción del cálculo diferencial e integral? Estos son algunos de los problemas que se tratan en el trabajo de tesis de Noemí Ruiz Munzón.

6. ¡Salvemos los problemas!

Toda investigación parte de un problema y, como dice Lakatos, debería concluir generando nuevos problemas más profundos y relevantes. Este convencimiento, que es muy claro para todo investigador, corre el peligro de diluirse y hasta de desaparecer en una cultura cada vez más mercantilizada. Como dice Daniel Innerarity refiriéndose a la filosofía, es absolutamente imprescindible salvar la capacidad de generar problemas y, podríamos añadir, la capacidad de vivir con ellos:

[…] en unos momentos en los que la solución de los problemas pasa por ser el convencimiento –nada ingenuo, cuidadosamente forjado a base de prisas y olvidos– de que no hay problemas, cuando abundan soluciones demasiado fáciles a problemas apenas formulados, cuando la facilidad se ha convertido en indecencia y la rapidez aliada de lo rudimentario. […] Cultura es también, y sobre todo, respeto a las preguntas que no podemos responder […]. Salvemos los problemas frente a la presión de los competentes […] (Innerarity 2005).

En lo que concierne a la *didáctica de las matemáticas*, y dado que formamos parte de la generación fundadora de esta disciplina, podemos decir que estamos todavía inmersos en pleno proceso de *desmagificación* (Bosch, Chevallard & Gascón 2006). Así, es habitual encontrarnos todavía con ilusionistas, no siempre desinteresados, que proponen soluciones "mágicas" a los problemas didáctico-matemáticos. Dichas soluciones suelen presentarse en forma de *eslóganes pedagógicos* que, naturalmente, pretenden dar soluciones *inmediatas*, *directas* y *completas* a los problemas que el "sentido común" plantea utilizando las nociones aceptadas y vigentes en la cultura escolar.

Así pues, como en el caso de la filosofía, es imprescindible *salvar los problemas didácticos* frente a la presión de los ilusionistas y los competentes. Éste ha sido uno de los impulsos que, sin ser muy conscientes de ello, ha guiado la génesis y el desarrollo de nuestra pequeña comunidad científica a lo largo de los últimos 30 años.

Referencias bibliográficas

Arzarello, F., Bosch, M., Gascón, J. & Sabena, C. (2008). The ostensive dimension through the lenses of two didactic approaches, *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 40, 179-188.

Asiala, A., Brown, A., De Vries, D., Dubinsky, E., Mathews, D. & Thomas, K. (1996). *A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education*, en Kaput J., Shoenfeld, A. y Dubinsky, E. (Eds.), Research in Collegiate Mathematics Education II, pp.1-32.

Barbé, J., Bosch, M., Espinoza, L. & Gascón, J. (2005). Didactic restrictions on the teacher's practice: the case of limits of functions in Spanish high schools, *Educational Studies in Mathematics* 59, 235-268.

Barquero, B. (2009). *Ecología de la Modelización Matemática en la enseñanza universitaria de las Matemáticas,* Tesis doctoral, Universitat Autònoma de Barcelona.

Bell, A. W. (1976). *The Learning of General Mathematical Strategies, Doctoral dissertation, Shell Center for Mathematical Education*, University of Nottingham.

Bolea, P. (2003). *El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares.* Monografía del Seminario Matemático García de Galdeano, 29. Departamento de Matemáticas. Universidad de Zaragoza.

Bolea, P., Bosch, M. & Gascón, J. (2001a). La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en proceso de algebrización. El caso de la proporcionalidad, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 21/3, 247-304.

Bolea, P., Bosch, M. & Gascón, J. (2001b). Cómo se construyen los problemas en Didáctica de las Matemáticas. *Educación Matemática*, 13(3), 22-63.

Bolea, P., Bosch, M. & Gascón, J. (2004). Why is modelling not included in the teaching of algebra at secondary school? *Quaderni di Ricerca in Didattica*, 14, 125-133.

Bolea, P. & Cid, E. (2007). Diseño de un modelo epistemológico de referencia para introducir los números negativos en un entorno algebraico, *II Congreso Internacional sobre la TAD*, Uzès (Francia), pendiente de publicación.

Bosch, M. (1994). La dimensión ostensiva en la actividad matemática. El caso de la proporcionalidad, Universitat Autònoma de Barceona, tesis doctoral.

Bosch, M., Chevallard, Y. & Gascón, J. (2006). Science or magic? The use of models and theories in didactics of mathematics, *Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, Universitat Ramon Llull, Barcelona.

Bosch, M., Fonseca, C. & Gascón, J. (2003). Una situación fundamental de álgebra lineal, *Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas (SI-IDM),* Córdoba.

Bosch, M., Fonseca, C. & Gascón, J. (2004). Incompletitud de las Organizaciones Matemáticas Locales en las instituciones escolares, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 24/2; 205-250.

Bosch, M., Fonseca, C. & Gascón, J. (to appear). El momento del trabajo de la técnica en la completación de Organizaciones Matemáticas: el caso de la división sintética y la factorización de polinomios, *Educación Matemática*, (aceptado para su publicación).

Bosch, M. & Gascón, J. (1993). Prácticas en Matemáticas: el trabajo de la técnica, en: Filloy E. y Puig L., *Memorias del Tercer Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática* (Valencia, junio 1991), CINVESTAV, México, 141-152.

Bosch, M. & Gascón, J. (1994). La integración del momento de la técnica en el proceso de estudio de campos de problemas de matemáticas, *Enseñanza de las Ciencias,* 12 (3), 314-332.

Bosch, M. & Gascón, J. (2005). La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques. In Mercier, A., Margolinas, C. (eds.), *Balises pour la didactique des mathématiques*, (pp. 107-122), La Pensée Sauvage : Grenoble.

Bosch, M. & Gascón, J. (2007). 25 años de transposición didáctica, en Ruiz-Higueras, L., Estepa, A. y García, F.J. (eds.) *Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico*. Jaén: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Jaén, 385-406.

Brousseau, G. (1993). La didáctica de las matemáticas en la formación del profesorado, conferencia pronunciada en las *Segundas Jornadas de Matemáticas y Didáctica de las Matemáticas*, Universitat Autònoma de Barcelona. [Publicada en catalán, La didàctica de les matemàtiques en la formació del professorat, *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*, 11/1, 33-45 (1996)].

Brousseau, G. (2000). Les différents univers de la mesure et leurs situations fondamentales. Un exemple d'utilisation de la théorie des situations pour l'ingénierie. *Quaderni di Ricerca in Didattica,* 9. Disponible en: http://dipmat.math.unipa.it/~grim/quaderno9.htm.

Cantoral, R. (1996). Una visión de la matemática educativa, en *Investigaciones en Matemática Educativa*, Grupo Editorial Iberoamérica: México, 131-147.

Chevallard, Y. (1985/1991). *La Transposition Didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. La Pensée Sauvage, Grenoble (2ª edición 1991).

Chevallard, Y. (1985). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège: l'évolution de la transposition didactique, *Petit x* 5, 51-94.

Chevallard, Y. (1989a). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège - Deuxième partie: Perspectives curriculaires : la notion de modelisation. *Petit x, 19*, 45-75.

Chevallard, Y. (1989b). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège – Troisième partie: Perspectives curriculaires: voies d'attaque et problèmes didactiques. *Petit x, 25*, 5-38.

Chevallard, Y. (1989c): *Aspects d'un travail de théorisation de la didactique des mathématiques. Etude du cas de l'algèbre élémentaire*, Nota de síntesis disponible en el IREM d'Aix-Marseille.

Chevallard, Y. (1991): *Didactique, anthropologie, mathématiques*, Postfacio a la 2ª edición de *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*, La pensée Sauvage: Grenoble.

Chevallard, Y. (1992): Concepts fondamentaux de la didactique: Perspectives apportées par une approche anthropologique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12/1, 73-112.

Chevallard, Y. (1997): Familière et problématique, la figure du professeur, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 17/3, 17-54.

Chevallard, Y. (1999): L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 19/2, 221-266.

Chevallard, Y. (2001). Aspectos problemáticos de la formación docente, *XVI Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas*, Huesca. Recuperable en http://www.ugr.es/local/jgodino/siidm.htm

Chevallard, Y. (2005). La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire: transposition didactique des mathématiques et nouvelle épistémologie scolaire. *Conferencia dada en la 3ª «Université d'été Animath», Saint-Flour, 22-27 de Agosto de 2004.* Publicado en *La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire, APMEP,* 239-263.

Chevallard, Y. (2006). Steps towards a new epistemology in mathematics education. *Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, Universitat Ramon Llull: Barcelona, 21-30.

Chevallard, Y., Bosch, M. & Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. ICE/Horsori, Barcelona.

Dubinsky, E. (2000). De la investigación en matemática teórica a la investigación en matemática educativa: un viaje personal, *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* (*RELIME*), 3(1), 47-70.

Fonseca, C. (2004). *Discontinuidades Matemáticas y Didácticas entre la Secundaria y la Universidad*, Universidad de Vigo, Tesis doctoral.

García, F. J., Gascón, J., Ruiz Higueras, L. & Bosch, M. (2006). Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics, *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik,* 38(3), 226-246.

García, F. J. (2005). *La modelización como instrumento de articulación de la matemática escolar. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales.* Jaén: Tesis Doctoral, Departamento de Didáctica de las Ciencias, Universidad de Jaén.

Gascón, J. (1989). *El Aprendizaje de Métodos de Resolución de Problemas de Matemáticas*, Tesis doctoral, Universitat Autònoma de Barcelona.

Gascón, J. (1993). Desarrollo del conocimiento matemático y análisis didáctico: Del patrón análisis-síntesis a la génesis del lenguaje algebraico. *Recherches en didactique des mathématiques,* 13(3), 295-332.

Gascón, J. (1993-1994). Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternative à l'« arithmétique généralisée ». *Petit x,* 37, 43-63.

Gascón, J. (1997). Cambios en el contrato didáctico: el paso de estudiar matemáticas en Secundaria a estudiar matemáticas en la Universidad, *SUMA*, 26, 11-21.

Gascón, J. (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. *Recherches en Didactique des Mathématiques.* 18(1) 7-34.

Gascón, J. (1999a). La naturaleza prealgebraica de la matemática escolar. *Educación matemática.* 11(1), 77-88.

Gascón, J. (1999b). Fenómenos y problemas en didáctica de las matemáticas. In T. Ortega, (Ed.), *Actas del III Simposio de la SEIEM* (pp. 129-150). Valladolid: SEIEM.

Gascón, J. (2001a). Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* (*RELIME*), 4(2), 129-159.

Gascón, J. (2001b). Reconstrucción de la divisibilidad en la Enseñanza Secundaria. *Quadrante. Revista Teórica e de Investigação*, 10/2; 33-66.

Gascón, J. (2002). El problema de la Educación Matemática y la doble ruptura de la Didáctica de las Matemáticas, *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española,* 5/3; 673-698.

Gascón, J. (2003a). From the Cognitive to the Epistemological Programme in the Didactics of Mathematics: Two Incommensurable Scientific Research Programmes? *For the Learning of Mathematics* 23/2, 44-55.

Gascón, J. (2003b). La Pedagogía y la Didáctica frente a la problemática del profesorado Conferencia plenaria, XVI Congreso de ENCIGA, Cangas do Morrazo (Pontevedra).

Gascón, J. (2003c), Efectos del "autismo temático" sobre el estudio de la Geometría en Secundaria. Parte I. Desaparición escolar de la razón de ser de la geometría, *Suma. Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*, 44; 25-34.

Innerarity, D. (2005). Salvemos los problemas, *EL PAIS* – Opinión – 07-06-2005.

Kilpatrick, J. (1967). *Analyzing the solution of word problems in mathematics: an exploratori study*, Doctoral dissertation, Stanford University.

Kilpatrick, J. (1985). A retrospective account of the past twenty-five years of research on teaching mathematical problem solving. In E. Silver (Ed.), *Teaching and learning mathematical problem solving: multiple research perspectives* (pp. 1-15). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Kilpatrick & Wirszup (1969-75). *Soviet Studies in the Psychology of Learning and teaching Mathematics,* Vol. III, Problem Solving in Arithmetic and Algebra, Survey of recent east European mathematical literature, University of Chicago.

Kuhn, T.S. (1969). *La estructura de las revoluciones científicas.* México: Fondo de Cultura Económica (1979).

Lakatos, I. (1971). *History of Science and its Rational Reconstructions*, en R. C. Buck y R. S. Cohen (eds.): *P.S.A..,* 1970, Boston Studies in the Philosophy of Science, 8, pp. 91-135. Dordrecht: Reidel [Trad. española: *Historia de la ciencia y sus reconstrucciones racionales*, Tecnos: Madrid, 1974].

Lakatos, I. (1976). *Proofs and Refutations: The logic of mathematical discovery* (J. Worrall and E. Zahar, Eds.). Cambridge University Press.

Lakatos, I. (1978a). *Mathematics, Science and Epistemology: Philosophical Papers*, Vol. 2, Cambridge University Press: Cambridge [Trad. española: *Matemáticas, ciencia y epistemología*, Alianza:Madrid, 1981].

Lakatos, I. (1978b). *The Methodology of Scientific Research Programmes*, Philosophical Papers Vol. 1, Cambridge University Press: Cambridge [Trad. española: *La metodología de los programas de investigación científica*, Alianza: Madrid, 1983].

Lesh, R. & Landau, M. (1983). *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*, Academic Press: New York.

Pólya, G. (1945). *How to solve it* (2d ed. 1957). Princeton: Princeton University Press.

Pólya, G. (1954). *Mathematics and Plausible Reasoning* (Volume 1: *Induction and analogy in mathematics*; Volume 2: *Patterns of plausible inference*). Princeton: Princeton University Press.

Pólya, G. (1962-5). *Mathematical Discovery* (*2 Vol.*) New York: John Wiley and Sons.

Rodríguez, E. (2005). *Metacognición, resolución de problemas y enseñanza de las matemáticas: una propuesta integradora desde el enfoque antropológico.* Tesis Doctoral. Madrid: Universidad Complutense de Madrid.

Rodríguez, E., Bosch, M. & Gascón, J. (2008). A networking method to compare theories: Metacognition in Problem Solving reformulated within the Anthropological Theory of the Didactic, *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 40, 287-301.

Ruiz Munzón, N., Bosch, M. & Gascón, J. (2007a). Modelización funcional con parámetros en un taller de matemáticas con WIRIS. En A. Estepa, L. Ruiz, F. J. García (Eds.), *Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD)* (pp. 677-702). Jaén: Publicaciones de la Universidad de Jaén.

Ruiz Munzón, N., Bosch, M. & Gascón, J. (2007b). The functional algebraic modelling at Secondary level. En D. Pitta-Panzati & G. Philippou (Eds.), *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2170-2179). Nicosia: University of Cyprus.

Ruiz Munzón, N., Bosch, M. & Gascón, J. (to appear). Un modelo epistemológico de referencia del álgebra como herramienta de modelización. *3rd Conference on the Anthropological Theory of the Didactic (Sant Hilari Sacalm, Spain, January, 26-29, 2010).* http://www.crm.cat/cdidactic/

Schoenfeld, A.H. (1985). *Mathematical problem solving,* San Diego, CA: Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (2001). Objetivos y métodos de la investigación en Educación Matemática, *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española,* 4/1, 185-203.

Sierra, T. A. (2006). *Lo matemático en la creación y análisis de Organizaciones Didácticas. El caso de los Sistemas de Numeración*, Tesis Doctoral, Universidad Complutense de Madrid.