UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2010, Número 23, páginas 201-210
ISSN: 1815-0640
Coordinado por
Agustín Carrillo de Albornoz

GeoGebra. Un recurso imprescindible en el aula de Matemáticas

Agustín Carrillo de Albornoz Torres

Antes de nada quisiera dejar claro que este trabajo no tiene como objetivo ofrecer una lección magistral sobre el uso de un determinado programa, por el contrario solo intenta ofrecer información de utilidad para aquel profesorado que aún no conozca GeoGebra o que todavía no se haya animado a utilizarlo en su aula.

A pesar de la amplia oferta existente de programas de geometría dinámica, de cálculo simbólico o de representación de funciones, además de la gran cantidad de páginas webs que ofrecen diferentes applets con propuestas para llevar al aula, considero que GeoGebra está ganando terreno al resto de opciones y, poco a poco se está haciendo imprescindible en el aula sobre todo cuando se apuesta por el uso de las TIC como recurso didáctico.

A las posibilidades que ofrece y a la sencillez para su uso, hay que añadir sus características de software libre, disponible para distintas plataformas y sobre todo en continuo desarrollo, ofreciendo siempre la última versión que se puede descargar en la Web www.geogebra.org.

Creado por **Markus Hohenwarter**, actualmente en la Universidad Johannes Kepler de Linz (Austria) ha aumentado de manera exagerada el número de usuarios en todo el mundo, ofreciendo traducciones del programa en casi todos los idiomas.

GeoGebra no es solo geometría dinámica (Geo) y álgebra (Gebra), es mucho más, ya que ofrece herramientas y opciones que permitirán trabajar cualquier contenido matemático, sobre todo en niveles educativos equivalentes a Primaria, Secundaria o Bachillerato, sin contar las propuestas de futuro en las que están trabajando que harán que sea imprescindible para enseñar matemáticas.

Primeros pasos con GeoGebra

Para comenzar a utilizar GeoGebra es necesario tener claro algunas ideas previas que ayudaran para profundizar y complicar poco a poco las construcciones que se puedan realizar.

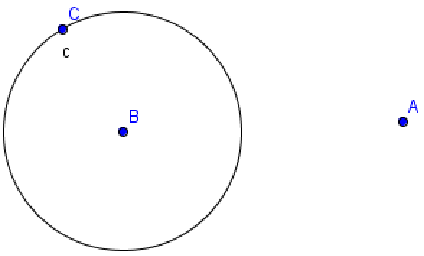
A partir de unos objetos básicos en el plano se irán estableciendo relaciones entre ellos que, cuando estén bien definidas, se mantendrán al cambiar las condiciones iniciales.

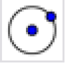
Esta es una de las características de los programas de geometría dinámica que diferenciara entre dibujar y construir. Dibujar será trazar unos objetos junto a otros sin ninguna relación entre ellos y por tanto, al modificar las condiciones iniciales, al no existir relaciones, se perderán las relaciones que deberían existir entre ellos; sin embargo al hablar de construir estamos indicando que se han establecido relaciones matemáticas o geométricas entre los objetos que se mantendrán al cambiar las condiciones iniciales. Aclaramos esto con un sencillo ejemplo.

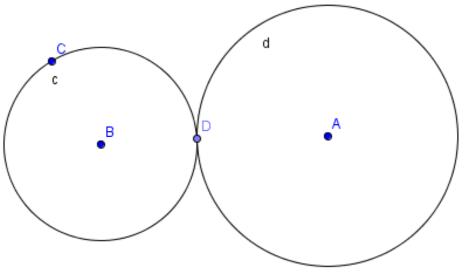
Actividad 1.

A partir de una circunferencia c y un punto exterior A. Traza la circunferencia que tenga centro a A y sea tangente a la circunferencia c.

Comenzamos dibujando los objetos iniciales, el punto A y la circunferencia c.

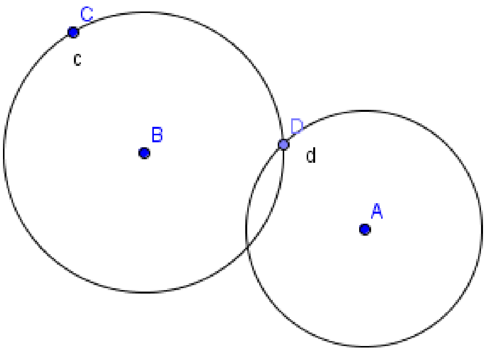


Podemos intentar "dibujar" la circunferencia tangente, para ello seleccionamos la herramienta .

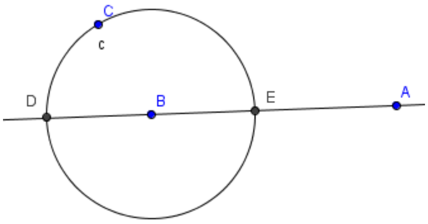


Antes de cambiar nada en la construcción, pensemos si hemos utilizado alguna propiedad geométrica.

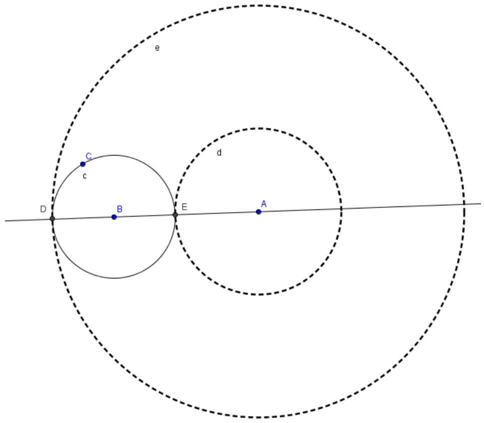
La respuesta es que no hemos utilizado ninguna propiedad y por tanto al mover la circunferencia c o el punto A, las circunferencias dejarán de ser tangentes, como podemos observar en la imagen siguiente al mover el punto A.



La construcción correcta se logrará al determinar de manera exacta el punto de tangencia. Para ello, basta con trazar la recta que une A con el centro de la circunferencia para determinar los puntos de tangencia que serán los puntos de intersección.

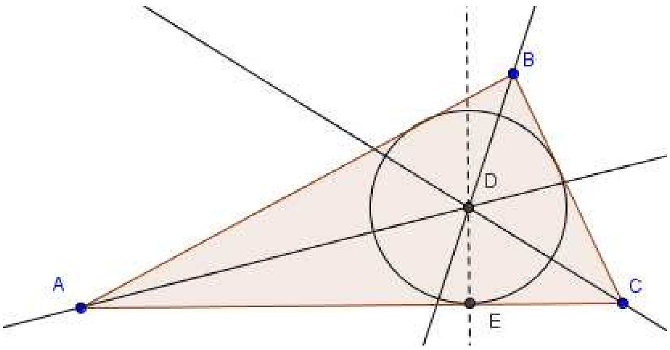


Ya solo queda trazar las dos circunferencias que cumplen la condición pedida de tangencia.



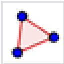
La primera construcción se ha obtenido dibujando y por tanto no mantiene relaciones que si se han utilizado en la segunda que si es una construcción.

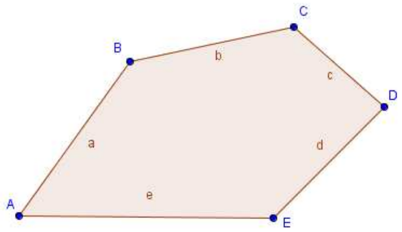
Algo similar ocurre cuando se propone la construcción de la circunferencia inscrita a un triángulo en la que una vez obtenido el incentro se intenta dibujar la circunferencia sin pensar que es necesario determinar el punto de tangencia sobre cualquiera de los lados.



Actividad 2.

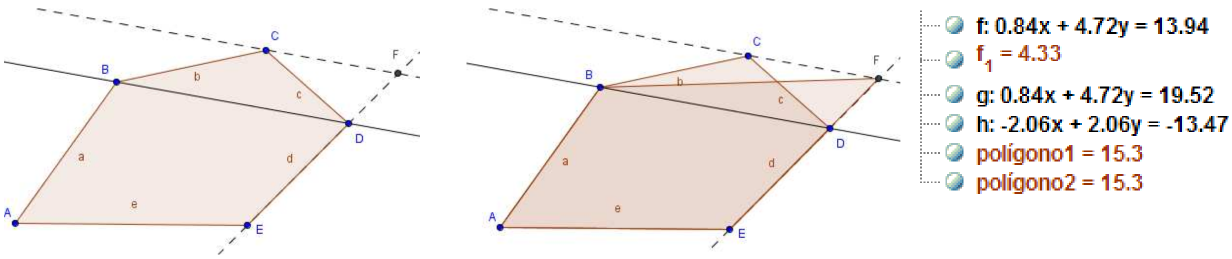
A partir de un polígono cualquiera, construir un nuevo polígono con un lado menos pero cuya área sea igual a la del polígono inicial.

Comenzamos dibujando un polígono cualquiera, utilizando para ello la herramienta *Polígono* :



Aplicando que dos triángulos con igual base y altura tendrán la misma área, unimos dos vértices, por ejemplo B y D con una recta. Trazamos la recta paralela a BD por el vértice intermedio C y prolongamos el lado ED.

El punto de corte de estas dos rectas será el nuevo vértice que hace que se cumpla la condición de mantener el área ya que los triángulos BCD y BDF tienen igual base y altura. Ya solo queda dibujar el nuevo polígono cuya área es igual a la del polígono inicial tal como aparece en la vista algebraica.

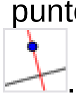


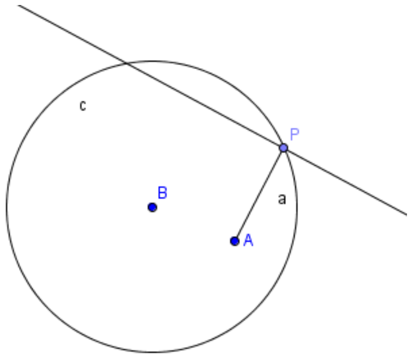
Como propuesta de trabajo planteamos la construcción de un polígono con un lado más cuya área sea igual a la del polígono inicial. En la imagen que hemos insertado correspondiente a la ventana algebraica podemos observar que aparecen las ecuaciones de las rectas que hemos trazado, lo cual nos da nuevas posibilidades de trabajo en el aula.

Mostremos nuevas actividades, por ejemplo algunos lugares geométricos que se pueden obtener a partir de la opción *Lugar* que ofrece GeoGebra, representada por la herramienta  o a partir de las opciones de las posibilidades de animación y trazo que quizás sean más vistosas.

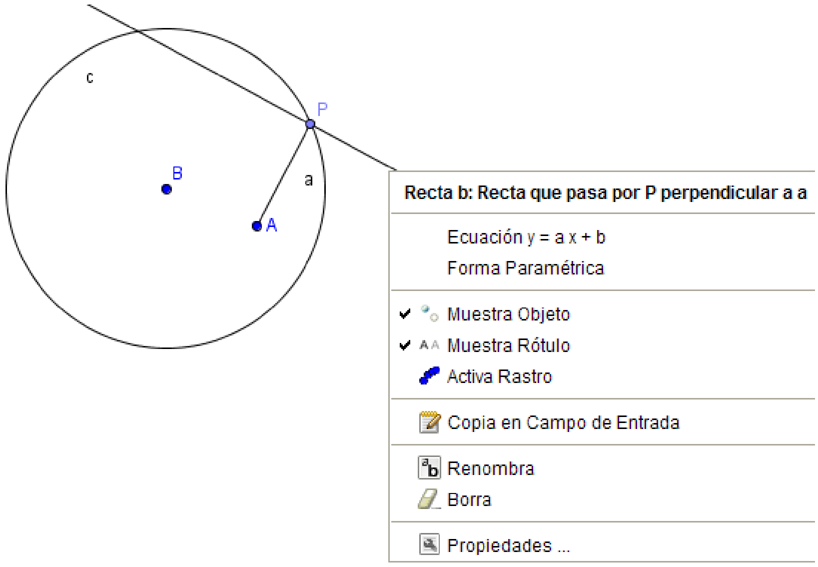
Actividad 3.

Sea A un punto interior de una circunferencia c y P un punto de ella. Hallar el lugar geométrico descrito por las rectas perpendiculares al segmento PA, cuando P recorre la circunferencia.

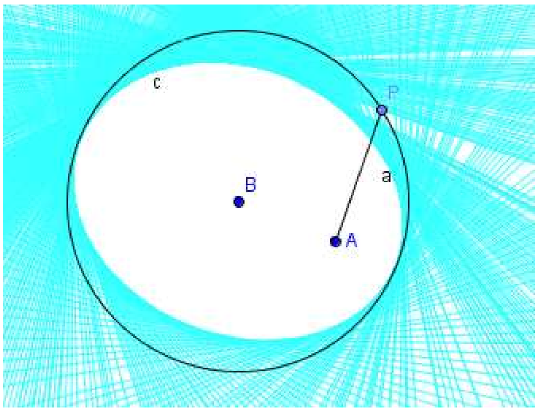
Comenzamos dibujando los objetos iniciales A, P y c, dibujando a continuación, el segmento PA y la recta perpendicular al segmento por el punto P, utilizando para ello las herramientas *Segmento*  y *Recta perpendicular* .



Para obtener el lugar geométrico activamos la traza de la recta perpendicular pulsando el botón derecho con el cursor situado sobre ella.



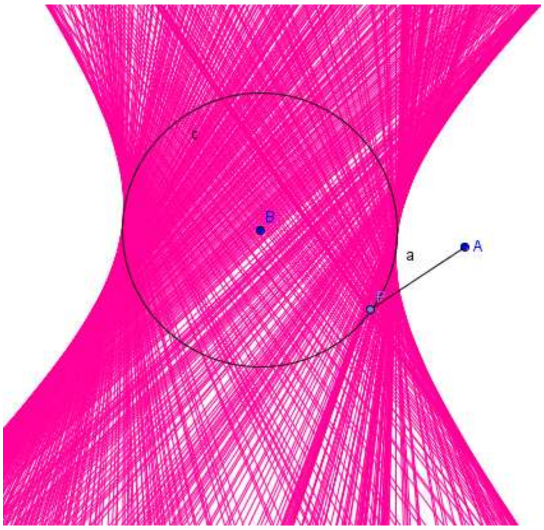
Ya solo nos queda mover el punto P para que aparezca el lugar descrito cuando el punto recorre la circunferencia.



Podemos observar que se trata de una elipse cuyo centro es el centro de la circunferencia y A es uno de sus focos. Como alternativa podemos diseñar la construcción para que el movimiento del punto P se produzca de manera automática en lugar de manual.

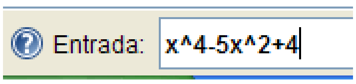
Ahora, podemos plantear ¿qué ocurre cuando el punto A es un punto exterior a la circunferencia c?

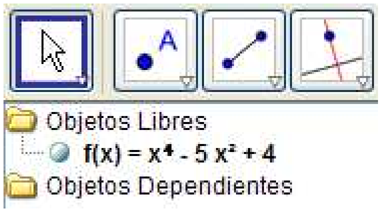
Sólo tendremos que arrastrar el punto A fuera de la circunferencia, teniendo la precaución de pulsar las teclas Ctrl – F para eliminar el rastro anterior, antes de volver a mover el punto P para obtener la imagen de una nueva cónica, en este caso una hipérbola.



Como GeoGebra no es solo geometría, proponemos algunas actividades para trabajar otros contenidos, como puede ser la representación de funciones.

Para representar una función basta con escribir su ley de formación en la línea de Entrada que encontramos en la parte inferior de la ventana.



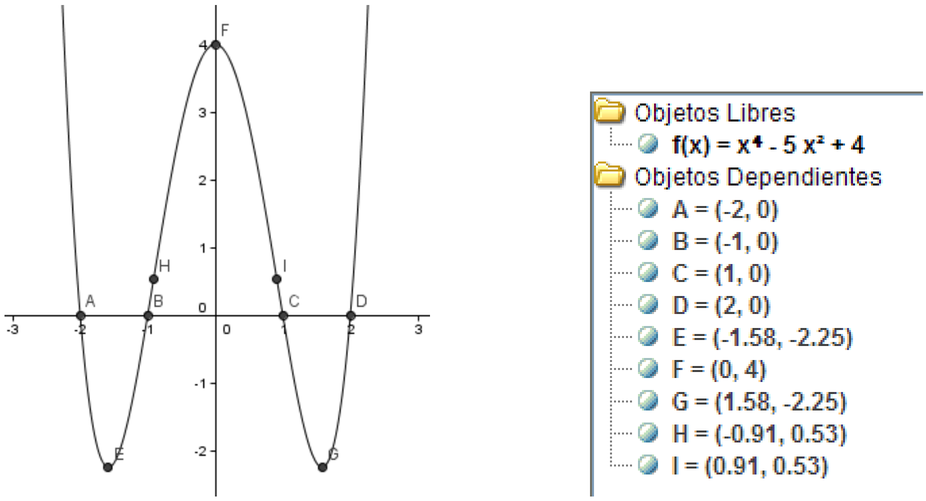


Aparecerá la representación de la función como aparece en la imagen siguiente, en la que previamente hemos activado la representación de los ejes de coordenadas a partir de las opciones disponibles en el menú *Vista*.

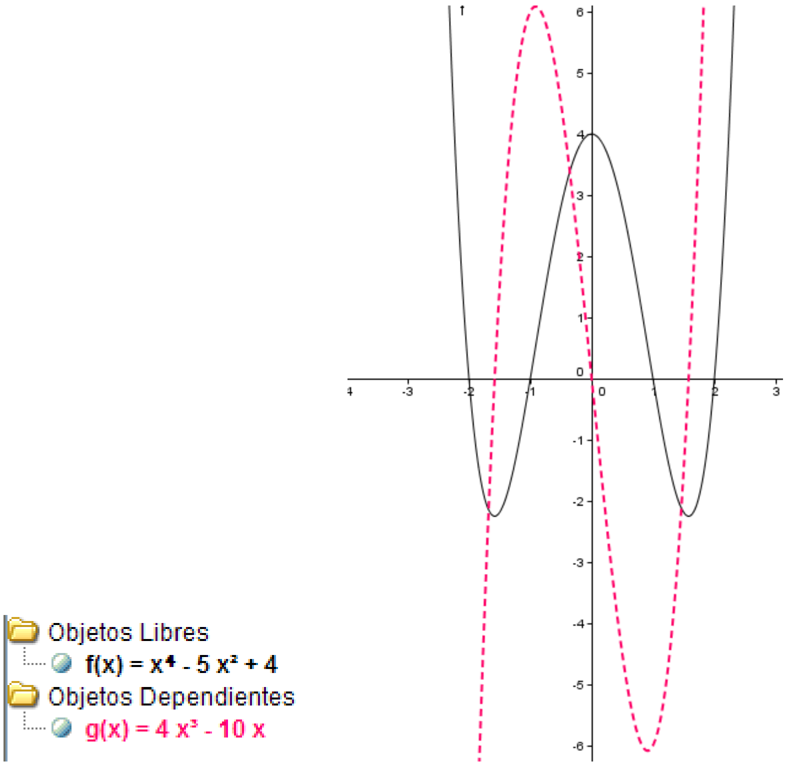
¿Qué podemos hacer a partir de la representación de una función?

Al pulsar sobre la pestaña Comando aparecerá la amplia lista de funciones disponibles, que en este caso, al tratarse de una función polinómica es aún mayor ya que podemos obtener las raíces, los extremos o los puntos de inflexión a partir de las instrucciones raíz[f(x)], extremo[f(x)] y puntoinflexión[f(x)].

Los puntos correspondientes aparecerán representados en la función y sus coordenadas las tendremos en la ventana algebraica.

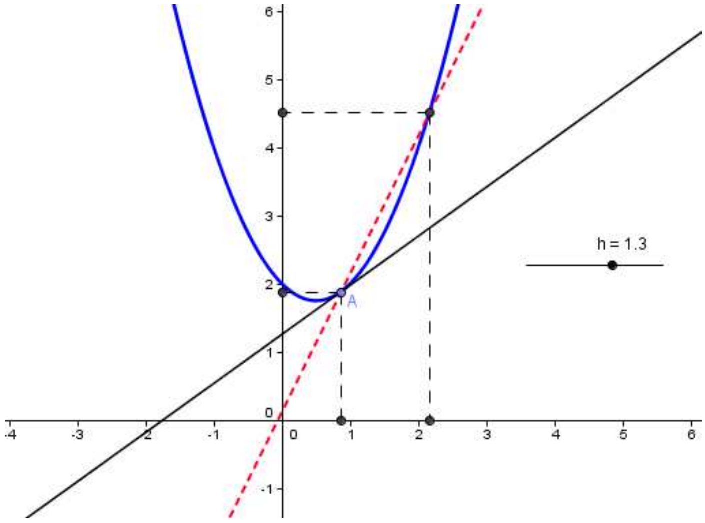


Además, para cualquier función podemos obtener su función derivada utilizando el comando *Derivada*, que devuelve la expresión a la vez que la representa.



De manera similar se podrá obtener la integral utilizando la sintaxis integral[f(x)] o el valor de una integral definida cuando además se incluyan los extremos de integración integral[f(x],a, b].

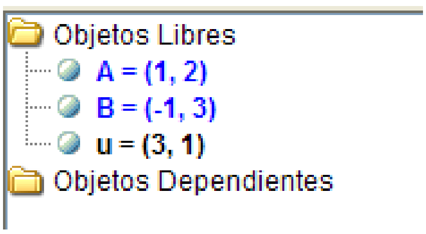
Pensemos lo fácil que resultaría realizar una construcción para facilitar la interpretación del concepto de derivada en un punto.

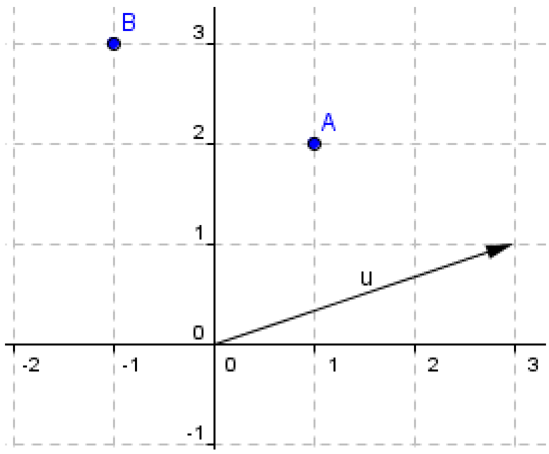


Como ya hemos indicado al dibujar cualquier punto aparecen de manera automática sus coordenadas en la ventana algebraica, pero si deseamos realizar el proceso contrario, dibujar un punto a partir de sus coordenadas, bastará con introducirlas a partir de la línea de entrada, escribiendo (a,b) o A=(a,b), siendo a y b las coordenadas y A el nombre que desea asignar al punto.

Es recomendable acceder al menú *Vista* para activar la cuadrícula.

Si escribimos u=(a,b) estaremos creando el vector u cuyas coordenadas serán (a,b).



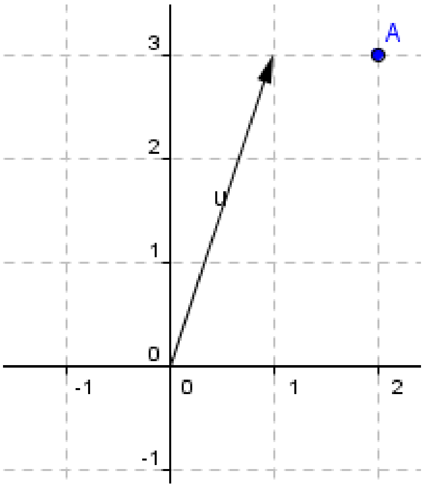


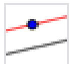
Con opciones como las anteriores es fácil deducir que GeoGebra será de gran ayuda para resolver problemas de geometría afín o euclídea como el que se propone a continuación.

Actividad 4.

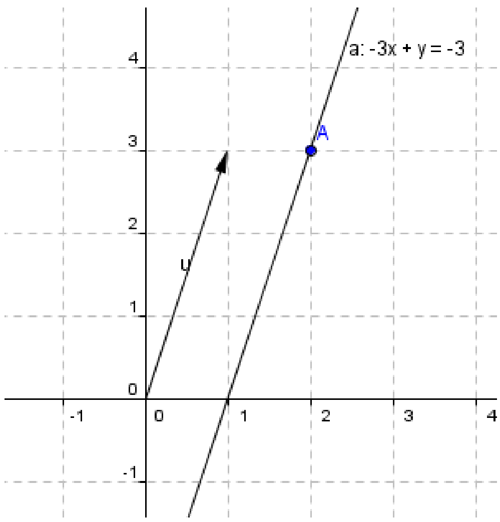
Halla la ecuación de la recta definida por el punto A (2, 3) y el vector $\vec{u} = (1, 3)$. Determina la ecuación de la recta paralela que pasa por el punto (-2, 1).

Comenzamos definiendo el punto A y el vector $\vec{u}$, introduciendo sus coordenadas a partir de la línea de entrada.

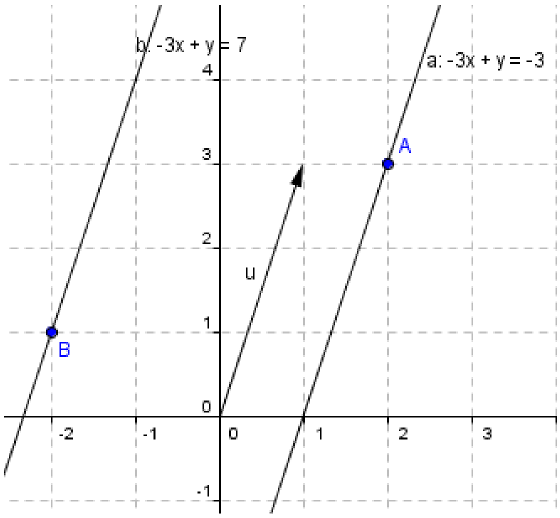


Para trazar la recta pedida podemos utilizar la herramienta Recta Paralela  para dibujar la recta paralela al vector $\vec{u}$ por el punto A o escribir en la línea de entrada la instrucción recta[A,u].

En cualquiera de los dos casos, aparecerá la representación de la recta y su ecuación en la ventana algebraica que también se mostrará en la ventana gráfica cuando se indique en las propiedades del objeto (recordamos que hay que pulsar el botón derecho sobre el objeto del que se desea cambiar las propiedades).



Para resolver el segundo apartado, bastará con introducir el nuevo punto y repetir el proceso anterior.



Como actividad para que realicen proponemos:

En el triángulo de vértices A(3, 2), B(-1, -2) y C(-4,4). Calcular:

a. Las ecuaciones de las rectas que contienen a los lados.
b. Las ecuaciones de las alturas.
c. La longitud de la altura trazada desde el vértice A.
d. Las coordenadas del ortocentro.

Esperamos que estas sencillas actividades permitan hacerse una primera idea de GeoGebra a quien no lo conozca y le animen a trabajar con él, para ir descubriendo el enorme potencial que ofrece, que como indiqué al principio está en continua evolución y desarrollo con nuevas versiones que ampliarán las posibilidades de cálculo simbólico o de representación en 3D.

En este trabajo no hemos entrado en descripción de herramientas y tareas ya que en la web de GeoGebra se puede descargar un manual, sin contar la gran cantidad de ejemplos que es posible encontrar en la red (en la bibliografía os propongo algunas) que seguro ayudarán a incorporarlo como un recurso más, de enorme potencia y sobre todo fácil de utilizar en el aula por la sencillez que conlleva como otra de sus principales características.

Bibliografía

Proyecto Gauss. Instituto Tecnologías Educactivas del Ministerio de Educación de España. http://recursostic.educacion.es/gauss/web/
Webs interactivas de matemáticas elaboradas por Manuel Sada. http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/index.htm
Geometría dinámica y matemáticas. http://geometriadinamica.es/
Presentaciones con GeoGebra de Rafael Losada. http://www.iespravia.com/rafa/rafa_geogebra.htm
Geometría dinámica en matemáticas. Página de José Antonio Mora. http://jmora7.com/
Actividades con GeoGebra. Web de Ignacio Larrosa. http://www.xente.mundo-r.com/ilarrosa/GeoGebra/